بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی‌ارشد

در رشته ریاضی(محض)

عنوان:

دوگانی الکساندر

استاد راهنما:

دکترمسعود طوسی

استاد مشاور:

دکتر حسین سبزرو

۱۳۸۶/۱۲/۲۴

پژوهش‌گر:

رسول پناهی حسن‌باروق

۱۰۲۵۶۱

تابستان ۱۳۸۶

۱۰۲۵۶۱

تاریخ ....

شماره ....

پیوست ....

دانشگاه شهید بهشتی

«بسمه تعالی»

«صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
تلفن: ۲۹۹۰۱

باز گشت به مجوز دفاع شمارهٔ ۲۰۰/۲۱۷۸/ت/د مورخ ۸۶/۶/۲۶ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه: **رسول پناهی‌حسن‌باروق** شماره شناسنامه:**۲۲۱** صادره از: **اردبیل** متولد: **۱۳۵۹** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد:**ریاضی محض**

با عنوان:

دوگانی الکساندر

به راهنمایی:

آقای دکترمسعود طوسی

طبق دعوت قبلی در تاریخ **۸۶/۶/۳۱** تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمره **۱۸/۷۵ (هیجده‌وهفتادوپنج صدم)** و درجه **عالی** مورد تصویب قرار گرفت.

	مرتبه علمی	نام دانشگاه	امضاء
۱- استاد راهنما: آقای دکتر مسعود طوسی	دانشیار	شهید بهشتی	
۲-مشاور: آقای دکتر حسین سبزرو	استادیار	پژوهشگاه بنیادی	
۳- داور: آقای دکتر رحیم زارع‌نهندی	استاد	تهران	
۴- داور: آقای دکتر صمد حاج‌جباری	استادیار	شهید بهشتی	
۵- مدیر گروه: آقای دکتر علیرضا سالمکار	استادیار	شهید بهشتی	

سپاس‌گزاری

وظیفهٔ خود می‌دانم تا از دوستانی که من را در انجام دادن این پایان‌نامه یاری رسانده‌اند تشکر کنم. از دکتر مسعود طوسی به خاطر قبول کردن راهنمایی این پایان‌نامه، که در مدت زمان انجام این پایان‌نامه، بر میزان علاقه‌مندی به ریاضیات، و دیدگاه من نسبت به آموزش ریاضی تاثیر زیادی داشته است، متشکرم. همچنین از دکتر حسین سبزرو که مشاورهٔ این پایان‌نامه را به عهده گرفتند. از دوستان عزیزم آقایان بهروز عدالت‌زاده، بهزاد چناقلو، مصطفی سبحانی (سپنتا)، و مسلم محمدی (رستم) سپاس‌گزارم.

تعداد ساعاتی را که دوست عزیزم مسعود بهرامی صرف آماده شدن این متن کرده است برای پاس کردن یک درس ٦ واحدی کفایت می‌کند. از مسعود صمیمانه سپاس‌گزارم و امیدوارم روزی محبت‌های او را جبران کنم.

رسول پناهی حسن‌باروق
تابستان ۸۶

چکیده

شکل مقدماتی دوگانی الکساندر، رابطه‌ای عمیق است بین همولوژی یک مجتمع سادکی Δ و کوهومولوژی یک مجتمع سادکی دیگر Δ^*، که دوگان Δ نامیده می‌شود. مجتمع‌های سادکی رابطه‌ای نزدیک با ایدآل‌های آزاد از توان دارند. از طریق همین ارتباط نزدیک، دوگانی الکساندر وارد جبر تک‌جمله‌ای‌ها شد، ولی محدود به ایدآل‌های آزاد از توان بود. هدف اول این پایان‌نامه ارائهٔ تعریف جدید دوگانی الکساندر است به طوری که ایدآل‌های تک‌جمله‌ای را نیز شامل شود. این تعریف جدید مشخص نمی‌کند که دوگانی الکساندر در برخورد با نگاشت‌های بین این اشیاء چگونه رفتار می‌کند. هدف بعدی این پایان‌نامه ارائهٔ تعریفی از دوگان الکساندر به صورت یک تابعگر است.

مقدمه

عمل‌گر دوگان الکساندر نخست برای ایدآل‌های آزاد از توان و با استفاده از مجتمع‌های سادکی شکل گرفته است. در بخش هشت، مجتمع‌های سادکی را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم مجتمع‌های سادکی روی مجموعهٔ رئوس $\{1, \ldots, n\}$ در تناظری دوسویی با ایدآل‌های آزاد از توان در حلقهٔ $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ هستند. از طرفی هر مجتمع سادکی Δ، یک ایدآل ترتیبی در مجموعهٔ جزئاً مرتب زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{1, \ldots, n\}$ است. برای مجموعه‌های جزئاً مرتب، یک مفهوم دوگانی کاملا شناخته شده وجود دارد. هنگامی که این دوگانی را روی Δ به کار ببریم، به دوگان الکساندر مجتمع سادکی Δ می‌رسیم. با توجه به تعریف دوگان الکساندر روی مجتمع‌های سادکی و تناظرِ بین مجتمع‌های سادکی و ایدآل‌های آزاد از توان، مفهوم دوگان الکساندر را روی ایدآل‌های آزاد از توان ارائه می‌دهیم. در بخش نُه، عمل‌گرِ دوگان الکساندر را روی ایدآل‌های تک‌جمله‌ای دلخواه تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم یکتایی مولدهای مینیمال I و یکتایی اشتراک $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ هم‌ارز هستند. ایدآل‌های آزاد از توان نوع خاصی از ایدآل‌های تک‌جمله‌ای هستند. نشان خواهیم که تعریف جدید دوگانی الکساندر با تعریف قدیم آن روی ایدآل‌های آزاد از توان هم‌خوانی دارد.

ایدآل‌های تک‌جمله‌ای تنها S ـ مدول‌های $\mathbb{Z}^n$ ـ مدرج نیستند. همچنین واضح نیست که دوگان الکساندر در برخورد با نگاشت‌های بین ایدآل‌هاچگونه رفتار می‌کند. هدف نهایی فصل چهار بیانِ دوگان الکساندر به صورت یک تابعگر است. تابعگرهای دوگانی الکساندر در زیررسته‌های کاملی از رستهٔ S ـ مدول‌های $\mathbb{Z}^n$ ـ مدرج معرفی می‌شوند. این زیررسته‌ها در بخش دَه معرفی می‌شوند. در بخش یازده نشان خواهیم داد که رسته‌های معرفی شده در بخش دَه با هم یک‌ریخت هستند. به وسیلهٔ این یک‌ریختی‌های رسته‌ای همراه با دوگانی متلیس مدرج، ساختن بنای تابعگر دوگانی الکساندر در بخش آخر تحقق می‌یابد. در بخش آخر نشان خواهیم که تنها یک راه برای تعمیم عمل‌گر دوگانی الکساندرِ روی ایدآل‌های تک‌جمله‌ای، به یک تابعگر وجود دارد.

مطالبی که در بالا بیان شد خلاصه‌ای از فصل اول منبع [8] است. این مطالب نمایی کلی از محتوای فصل‌های سوم و چهارم این پایان‌نامه را نشان می‌دهد. مطالب دو فصل اول به پیش‌نیازها اختصاص دارد. پیش‌نیازها، با مقدمه‌ای از نظریهٔ رسته آغاز می‌شود.

نظریهٔ رسته زبان سودمندی برای ارائهٔ مباحث این متن در اختیار ما قرار می‌دهد. به همین دلیل اولین بخش از این متن به بیان مفاهیم و تعاریفی از نظریهٔ رسته، که در بخش‌های بعد مورد استفاده قرار خواهد گرفت، اختصاص داده

شده است. هدف عمدهٔ این بخش ارائهٔ مفهوم یک‌ریختی رسته‌ها و تعریف تابعگرهای جمعی و رسته‌های آبلی است. رسته‌های تعریف ۳.۱۰ چند مثال از رسته‌های آبلی هستند. این رسته‌ها زیررسته‌های کاملی از رستهٔ S ـ مدول‌های $\mathbb{Z}^n$ ـ مدرج هستند.

مدول‌های مدرج نمونه‌ای از ساختارهای ریاضی هستند که با اعمال شرایطی معین روی مدول‌ها به دست می‌آیند. در بخش دوّم حلقه‌ها و مدول‌های مدرج را تعریف می‌کنیم. سپس چند خاصیت ابتدایی آن‌ها را بیان می‌کنیم، و در نهایت با ارائهٔ چند تعریف و قضیه، که تعمیمی از مفاهیم مربوط به حلقه‌ها هستند، به این بخش خاتمه می‌دهیم.

هرچند رستهٔ R ـ مدول‌های مدرج را در حالت کلی بیان می‌کنیم، امّا تنها رسته‌ای که در این متن با آن سر و کار خواهیم داشت، رستهٔ S ـ مدول‌های $\mathbb{Z}^n$ ـ مدرج است. در بخش سوّم، مفهوم تحلیل آزاد مدرج مینیمال را در این رسته بیان می‌کنیم.

حلقهٔ $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ درجه‌بندی شناخته شده‌ای دارد (مثال ۱۳.۲). در این درجه‌بندی، ایدآل‌های همگن حلقهٔ S دقیقاً همان ایدآل‌هایی هستند که توسط تک‌جمله‌ای‌ها تولید می‌شوند. در بخش چهارم ایدآل‌های تک‌جمله‌ای در حلقهٔ چندجمله‌ای‌های روی میدان k را بررسی می‌کنیم. نشان خواهیم داد که هر ایدآل تک‌جمله‌ای یک مجموعهٔ مولد مینیمال یکتا دارد (نتیجهٔ ۸.۴). سپس نشان می‌دهیم هر ایدآل تک‌جمله‌ای مانند I را می‌توان به صورت اشتراک $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ غیرزاید از ایدآل‌های تحویل‌ناپذیر نوشت (قضیهٔ ۱۲.۴ و نتیجهٔ ۱۳.۴).

دوگانی الکساندر یک عمل‌گر روی ایدآل‌های تک‌جمله‌ای است. تعمیم این عمل‌گر، به یک تابعگر در رستهٔ $\mathcal{M}_{+}^{\mathbf{a}}$، با استفاده از تابعگر دوگان متلیس مدرج و تابعگرهای تعریف ۱.۱۱ شکل می‌گیرد. نظر به اهمیت تابعگر دوگان متلیس مدرج، فصل کاملی به این تابعگر اختصاص داده شده است. برای درک بیشتر تابعگر دوگان متلیس مدرج ابتدا این تابعگر را در رستهٔ مدول‌ها تعریف می‌کنیم. برای این کار به مفهوم پوشش انژکتیو نیاز داریم. فصل دوّم با مطالبی در مورد مدول‌های انژکتیو آغاز می‌شود. هر مدول را می‌توان در یک مدول انژکتیو نشاند. از بین تمام مدول‌های انژکتیوی که می‌توان مدول M را در آن‌ها نشاند، آن‌هایی که به نوعی مینیمال هستند از اهمیت خاصی برخوردارند. این مدول‌ها را پوشش انژکتیو M می‌نامیم. نشان خواهیم داد که هر مدول M پوشش انژکتیو دارد و هر دو پوشش انژکتیو از M با هم یک‌ریخت هستند. پوشش انژکتیو مدول M را با نماد $E_R(M)$ نشان می‌دهیم. در بخش شِش، تابعگر دوگانی متلیس $D := \mathrm{Hom}_R(., E_R(R/\mathfrak{m}))$ معرفی می‌شود و خواص آن در حالت‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. دربخش هفت، تابعگر دوگانی متلیس (در حالت‌های خاص) معرفی می‌شود. نشان خواهیم داد که اگر حلقهٔ $\mathbb{Z}^n$ ـ مدرج $(R, \mathfrak{m})$، نوتری، $*$ ـ موضعی و $*$ ـ کامل باشد، دوگان متلیس مدرج شکل ساده‌ای به خود می‌گیرد. خاطرنشان می‌کنیم که حلقهٔ $\mathbb{Z}^n$ ـ مدرج S در تمام این شرایط صدق می‌کند.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش‌نیاز

۱ رسته‌ها

نظریهٔ رسته زبان سودمندی برای ارائهٔ مباحث این متن در اختیار ما قرار می‌دهد. به همین دلیل اولین بخش از این پایان‌نامه به بیان مفاهیم و تعاریفی از نظریهٔ رسته، که در بخش‌های بعد مورد استفاده قرار خواهند گرفت، اختصاص داده شده است. در ابتدا رسته‌ها را تعریف می‌کنیم. سپس چند مثال از تابعگرها، که ابزاری برای حرکت بین رسته‌های مختلف هستند، ارائه می‌دهیم. در ادامه تبدیلات طبیعی را، که به ما امکان می‌دهند تا تابعگرهای مختلف را با هم مقایسه کنیم، تعریف می‌کنیم و با استفاده از آن‌ها مفهوم یک‌ریختی رسته‌ها را معرفی می‌کنیم. پس از آن، با ارائهٔ مقدمات لازم، تعریف رسته‌های آبلی را ارائه می‌دهیم. این بخش را با تعریف تابعگرهای جمعی و قضیه‌ای در مورد آن‌ها به پایان می‌بریم.

به صورت غیر رسمی، یک رسته تشکیل شده است از رده‌ای از اشیاء ریاضی که از خواص ساختاری مشترکی برخوردار هستند و نگاشت‌هایی بین این اشیاء که این خواص را حفظ می‌کنند. این مفاهیم در تعریف زیر به صورت رسمی بیان شده‌اند.

تعریف ۱.۱ یک رسته تشکیل شده است از

۱. رده‌ای مانند $\mathcal{C}$ که اعضای آن را اشیاء $\mathcal{C}$ می‌نامیم؛ و

۲. رده‌ای از مجموعه‌های از هم جدا، که در آن برای هر جفتِ C و D از اشیأ $\mathcal{C}$ یک مجموعهٔ $hom_{\mathcal{C}}(C, D)$ وجود دارد (هر عنصر از $hom_{\mathcal{C}}(C, D)$ را یک ریخت از C به D می‌نامیم و با $f : C \longrightarrow D$ نشان می‌دهیم)؛ به طوری که

۳. به ازای هر سه‌تایی (A, B, C) از اشیاء در $\mathcal{C}$، تابعی مانند

$$hom_{\mathcal{C}}(B, C) \times hom_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow hom_{\mathcal{C}}(A, C)$$

(برای ریخت‌های $g : B \longrightarrow C$ و $f : A \longrightarrow B$، ضابطهٔ این تابع را به صورت $(g, f) \longmapsto g \circ f$ می‌نویسیم و $g \circ f : A \longrightarrow C$ را ترکیب f و g می‌خوانیم) وجود داشته باشد که در دو اصل زیر صدق کند:

آ) شرکت‌پذیری: هرگاه $h : C \longrightarrow D$، $g : B \longrightarrow C$ و $f : A \longrightarrow B$ ریخت‌هایی از $\mathcal{C}$ باشند، آن‌گاه $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

ب) همانی: به ازای هر شئ B از $\mathcal{C}$، ریختی مانند $1_B : B \longrightarrow B$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $g : B \longrightarrow C$ و $f : A \longrightarrow B$،

$$1_B \circ f = f \quad \text{و} \quad g \circ 1_B = g$$

در رستهٔ $\mathcal{C}$، ریخت $f : A \longrightarrow B$ را یک‌ریختی می‌نامیم اگر ریختی مانند $g : B \longrightarrow A$ در $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد به طوری که $g \circ f = 1_A$ و $f \circ g = 1_B$. ترکیب دو یک‌ریختی، وقتی تعریف شده باشد، یک یک‌ریختی است. اگر $f : A \longrightarrow B$ یک‌ریختی باشد، آنگاه A و B را یک‌ریخت می‌گوییم و می‌نویسیم $A \cong B$.

مثال ۲.۱ برای حلقهٔ داده شدهٔ R، رستهٔ $\mathcal{C}(R)$ را به این صورت تشکیل می‌دهیم: R ـ مدول‌ها را به عنوان اشیاء در نظر می‌گیریم و به ازای هر جفت R ـ مدول A و B قرار می‌دهیم $hom_{\mathcal{C}(R)}(A, B) = \mathrm{Hom}_R(A, B)$. ریخت f یک‌ریختی است اگر و تنها اگر f یک‌ریختی R ـ مدول‌ها باشد.

تعریف ۳.۱ یک زیررستهٔ $\mathcal{D}$ از رستهٔ $\mathcal{C}$ عبارت است از

۱. یک زیرردهٔ $\mathcal{D}$ از ردهٔ $\mathcal{C}$ که اشیأ متعلق به $\mathcal{D}$ را مشخص می‌کند؛ و

۲. رده‌ای از مجموعه‌ها، که در آن برای هر جفتِ C و D از اشیأ $\mathcal{D}$ یک زیرمجموعه از $hom_{\mathcal{C}}(C, D)$ وجود دارد که با نماد $hom_{\mathcal{D}}(C, D)$ نشان داده می‌شود و ریخت‌های از C به D را در $\mathcal{D}$ مشخص می‌کند؛ به طوری که

۳. اگر C یک شئ از $\mathcal{D}$ باشد، آن‌گاه ریخت همانی $1_C \in hom_{\mathcal{C}}(C, C)$ به $hom_{\mathcal{D}}(C, C)$ نیز متعلق باشد؛ و

۴. اگر $f \in hom_{\mathcal{D}}(A, B)$ و $g \in hom_{\mathcal{D}}(B, C)$، آنگاه $g \circ f \in hom_{\mathcal{D}}(A, C)$.

(که ترکیب ریخت‌ها، همان ترکیب ریخت‌ها در $\mathcal{C}$ است)

زیررستهٔ $\mathcal{D}$ از رستهٔ $\mathcal{C}$ را یک زیررستهٔ کامل می‌گوییم اگر برای هر جفتِ C و D از اشیأ $\mathcal{D}$ داشته باشیم $hom_{\mathcal{D}}(C, D) = hom_{\mathcal{C}}(C, D)$.

مثال ۴.۱ رستهٔ R ـ مدول‌های با تولید متناهی، که با نماد $\mathcal{M}_R$ نمایش داده می‌شود، زیررسته‌ای از $\mathcal{C}(R)$ (رستهٔ R ـ مدول‌ها) است. در واقع $\mathcal{M}_R$ زیررسته‌ای کامل از $\mathcal{C}(R)$ است.

تاثیر عمدهٔ نظریهٔ رسته بر ریاضیات به این علت است که به جای بررسی اشیأ ریاضی به صورتی منفرد، بر توصیف ریخت‌های بین این اشیأ تاکید می‌کند. این دیدگاه را می‌توان در مطالعهٔ خود رسته‌ها نیز به کار برد. بدین طریق، ما به سمت تعریف یک تابعگر که در واقع ریختی بین رسته‌هاست هدایت می‌شویم.

تعریف ۵.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ رسته باشند. یک تابعگر هموردِ F از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$، که با نماد $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ نشان داده می‌شود، یک جفت از نگاشت‌ها است (که هر دو با F نشان داده می‌شود): یکی نگاشتی که به هر شیئ C از $\mathcal{C}$، شیئ $F(C)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد و دیگری نگاشتی است که به هر ریخت $f : C \longrightarrow C'$ از $\mathcal{C}$، ریخت

$$F(f) : F(C) \longrightarrow F(C')$$

از $\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد به طوری که

۱. به ازای هر شیئ C از $\mathcal{C}$، $F(1_C) = 1_{F(C)}$؛ و

۲. به ازای هر دو ریخت f و g از $\mathcal{C}$، که ترکیب آنها تعریف شده باشد، $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

ملاحظه می‌کنیم که تابعگر F، نگاشت (بین مجموعه‌ها)

$$F : hom_{\mathcal{C}}(C, C') \longrightarrow hom_{\mathcal{D}}(F(C), F(C')),$$

را برای هر جفتِ C و C' از $\mathcal{C}$ القاً می‌کند. اگر $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ تابعگر دیگری باشد، ترکیب $G \circ F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ به طور طبیعی به این صورت تعریف می‌شود: $(G \circ F)(C) = G(F(C))$ و $(G \circ F)(f) = G(F(f))$.

مثال ۶.۱ تابعگر همانی $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ از $\mathcal{C}$ به خودش؛ این تابعگر، هر شیئ و هر ریخت را به خودش می‌برد. فرض کنید $\mathcal{C}'$ زیررسته‌ای از $\mathcal{C}$ باشد. تابعگر شمول، که با نماد $\mathrm{Inc} : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ نشان داده می‌شود، هر شیئ و هر ریخت را به خودش می‌برد.

تعریف ۷.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ رسته باشند. یک تابعگر پادورد T از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$، که با نماد $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ نشان داده می‌شود، یک جفت از نگاشت‌ها است (که هر دو با T نشان داده می‌شود): یکی نگاشتی که به هر شیئ C از $\mathcal{C}$، شیئ $T(C)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد و دیگری نگاشتی است که به هر ریخت $f : C \longrightarrow C'$ از $\mathcal{C}$، ریخت

$$T(f) : T(C') \longrightarrow T(C)$$

از $\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد به طوری که

۱. به ازای هر شیئ C از $\mathcal{C}$، $T(1_C) = 1_{T(C)}$؛

۲. به ازای هر دو ریخت f و g از $\mathcal{C}$، که ترکیب آنها تعریف شده باشد، داشته باشیم $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$.

بنابراین، تابعگر پادورد جهت ریخت‌ها را عوض می‌کند.

در مثال زیر تابعگر Hom را در رستهٔ مدول‌ها معرفی می‌کنیم. با استفاده از این تابعگر، در بخش ۶، تابعگر دوگانی متلیس را معرفی خواهیم کرد. اهمیت تابعگر دوگانی متلیس در بخش ۱۲ روشن خواهد شد.

مثال ۸.۱ فرض کنید R یک حلقهٔ جابه‌جایی و A یک R ـ مدول ثابت باشد. به ازای هر R ـ مدول C قرار دهید $F(C) = \mathrm{Hom}_R(A, C)$ ($T(C) = \mathrm{Hom}_R(C, A)$)، و به ازای هر هم‌ریختی $\alpha : C \longrightarrow C'$ از R ـ مدول‌ها، $F(\alpha)$ ($T(\alpha)$) را نگاشت القایی $\overline{f} : \mathrm{Hom}_R(A, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, C')$ ($\overline{f} : \mathrm{Hom}_R(C', A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, A)$) در نظر بگیرید. دراین‌صورت، با توجه به اینکه R جابه‌جایی است، F (T) یک تابعگر هموردِ (پادورد) روی رستهٔ $\mathcal{C}(R)$ است.

مثال ۹.۱ فرض کنید R یک حلقهٔ جابه‌جایی و N یک R ـ مدول ثابت باشد. به ازای هر R ـ مدول C قرار دهید $F(C) = C \otimes_R N$، و به ازای هر هم‌ریختی $\alpha : C \longrightarrow C'$ از R ـ مدول ها، $F(\alpha)$ را نگاشت القایی $\alpha \otimes \mathrm{Id}_N : C \otimes_R N \longrightarrow C' \otimes_R N$ در نظر بگیرید. دراین‌صورت، با توجه به اینکه R جابه‌جایی است، F یک تابعگر همورد روی رستهٔ R ـ مدول‌ها است. این تابعگر را معمولا با نماد $- \otimes_R N$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۰.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ رسته، و $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ تابعگرهایی همورد باشند. یک **تبدیل طبیعی** $\eta : F \longrightarrow G$، خانواده‌ای از نگاشت‌ها است که به هر شئ C از $\mathcal{C}$، ریخت $\eta_C : F(C) \longrightarrow G(C)$ از $\mathcal{D}$ را چنان نسبت می‌دهد که به ازای هر ریخت $\alpha : C' \longrightarrow C$ از $\mathcal{C}$، نمودار

$$\begin{tikzcd} F(C') \arrow[r, "\eta_{C'}"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & G(C') \arrow[d, "G(\alpha)"] \\ F(C) \arrow[r, "\eta_C"] & G(C) \end{tikzcd}$$

در $\mathcal{D}$ جابه‌جایی باشد. هرگاه به ازای هر C در $\mathcal{C}$، η_C یک‌ریختی باشد، آن‌گاه η را یک **تعادل طبیعی** از تابعگرهای F و G می‌نامیم؛ در این حالت تابعگرهای F و G را یک‌ریخت می گوییم.

مثال ۱۱.۱ هرگاه $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ یک تابعگر باشد، آن‌گاه انتساب $C \longmapsto 1_{T(C)}$، یک تعادل طبیعی را (از T به T) تعریف می‌کند. این تعادل طبیعی را با نماد $1_T : T \longrightarrow T$ نشان می‌دهیم و یک‌ریختی طبیعی همانی می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۱ رسته‌های $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ را یک‌ریخت می گوییم اگر تابعگرهای همورد $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ و $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ وجود داشته باشند به طوری که تابعگر $G \circ F$ با $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ (تابعگر همانی مثال ۶.۱)، و تابعگر $F \circ G$ با $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ یک‌ریخت باشد.

در قضیهٔ ۶.۱۱ ثابت خواهیم کرد که ۴ رستهٔ تعریف ۳.۱۰ با هم یک‌ریخت هستند. در اثبات قضیهٔ مذکور، از گزارهٔ ۱۴.۱ استفاده خواهیم کرد. قبل از بیان این گزاره، به تعریف زیر توجه کنید.

تعریف ۱۳.۱ تابعگر همورد $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ را **وفادار**[1] می گوییم اگر برای هر $C, C' \in \mathcal{C}$، نگاشت

$$F : hom_{\mathcal{C}}(C, C') \longrightarrow hom_{\mathcal{D}}(F(C), F(C')),$$

یک‌به‌یک باشد؛ F را **کامل**[2] می‌نامیم اگر نگاشت بالا پوشا باشد، و می گوییم F **چگال**[3] است اگر برای هر شئ D از $\mathcal{D}$، شئ‌ای از $\mathcal{C}$ مانند C وجود داشته باشد به طوری که $D \cong F(C)$. تابعگری را که وفادار و کامل است، **به طور کامل وفادار** می‌نامیم.

با توجه به تعاریف بالا، گزارهٔ زیر به سادگی اثبات می‌شود.

گزاره ۱۴.۱ رسته‌های $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ یک‌ریخت هستند اگر و تنها اگر یک تابعگر همورد مانند $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ وجود داشته باشد که چگال، وفادار و کامل باشد.

---

1. faithful
2. full
3. dense

برهان: گزارهٔ ۱۴.۳.۱ از منبع [۳] را نگاه کنید. ■

بخش قابل توجهی از نظریهٔ مقدماتی رسته‌ها، تلاش برای تعمیم هرچه بیشترِ مفاهیمِ رسته‌های شناخته شده (مانند، مجموعه‌ها یا مدول‌ها) به رسته‌های دلخواه است. در این‌جا، مفاهیمی مانند تک‌ریختی‌ها، برو‌ریختی‌ها، هسته‌ها و هم‌هسته‌های نگاشت‌ها را به رسته‌های دلخواه تعمیم می‌دهیم.

نمادگذاری ۱۵.۱ از این‌جا به بعد، معمولاً ترکیب دو ریخت از رسته را، به جای $g \circ f$ با نماد gf نشان خواهیم داد.

تعریف ۱۶.۱ یک ریخت $f : C \longrightarrow D$ از رستهٔ $\mathcal{C}$ را تک‌ریختی می‌نامیم هر گاه به ازای هر شیٔ B و ریخت‌های $g, h \in hom_{\mathcal{C}}(B, C)$،

$$fh = fg \quad \Longrightarrow \quad h = g.$$

ریخت f را برو‌ریختی می‌نامیم اگر به ازای هر شیٔ E و ریخت‌های $k, t \in hom_{\mathcal{C}}(D, E)$،

$$kf = tf \quad \Longrightarrow \quad k = t.$$

مثال ۱۷.۱ یک ریخت از رستهٔ مجموعه‌ها تک‌ریختی (برو‌ریختی) است اگر و تنها اگر یک‌به‌یک (پوشا) باشد.

شیٔ‌ای مانند 0 از رستهٔ $\mathcal{C}$ را شیٔ صفر می‌نامیم اگر 0 در رستهٔ $\mathcal{C}$ عمومی و هم‌عمومی باشد.[۴] بنابراین، به ازای هر شیٔ C از $\mathcal{C}$، تنها یک ریخت $C \longrightarrow 0$ و تنها یک ریخت $0 \longrightarrow C$ وجود دارد.

مثال ۱۸.۱ مدول صفر، یک شیٔ صفر در رستهٔ مدول‌های چپ روی یک حلقه است. رستهٔ مجموعه‌ها شیٔ صفر ندارد.

می‌توان نشان داد که هر دو شیٔ صفر از رستهٔ $\mathcal{C}$، در صورت وجود، با هم یک‌ریخت هستند و اگر 0 یک شیٔ صفر در رستهٔ $\mathcal{C}$ باشد، آن‌گاه ریخت یکتای $C \longrightarrow 0$ تک‌ریختی و ریخت یکتای $0 \longrightarrow C$ برو‌ریختی خواهد بود.[۵]

گزاره ۱۹.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ رسته‌ای باشد که شیٔ صفر 0 دارد. دراین‌صورت، برای هر جفتِ C و D از اشیاءی $\mathcal{C}$، ریخت یکتای $0_{C,D} : C \longrightarrow D$ وجود دارد به طوری که برای تمام ریخت‌های $f \in hom_{\mathcal{C}}(D, E)$ و $g \in hom_{\mathcal{C}}(B, C)$،

$$f \circ 0_{C,D} = 0_{C,E} \quad \text{و} \quad 0_{C,D} \circ g = 0_{B,D}.$$

برهان: گزارهٔ ۴.۳ از فصل ۱۰ منبع [۶] را نگاه کنید. ■

ریخت $0_{C,D}$ از گزارهٔ ۱۹.۱، ریخت صفر نامیده می‌شود.

آخرین گام در تعمیم خواص ریخت‌های متعلق به رسته‌های آشنا، به ریخت‌های درون رسته‌های دلخواه، ارائهٔ تعاریفی منطقی از هسته‌ها و هم‌هسته‌های ریخت‌ها است. این کار را با تعریف زیر آغاز می‌کنیم.

۴. شیٔ‌ای مانند I از رستهٔ $\mathcal{C}$، عمومی (هم‌عمومی) نامیده می‌شود اگر به ازای هر شیٔ C از $\mathcal{C}$، یک و تنها یک ریخت $I \longrightarrow C$ ($C \longrightarrow I$) وجود داشته باشد.

۵. گزارهٔ ۳.۳ از فصل ۱۰ منبع [۶].

تعریف ۲۰.۱ فرض کنید $f : C \longrightarrow D$ و $g : C \longrightarrow D$ ریخت‌هایی از رستهٔ $\mathcal{C}$ باشند. یک **هستهٔ تفاضلی**[٦] برای جفت (f, g)، ریختی مانند $i : B \longrightarrow C$ است با این خاصیت که:

i) $fi = gi$؛ و

ii) اگر $h : A \longrightarrow C$ ریختی باشد که $fh = gh$، آن‌گاه ریخت یکتای $\overline{h} : A \longrightarrow B$ وجود داشته باشد به طوری که $i\overline{h} = h$.

یک هم‌هستهٔ تفاضلی[۷] برای جفت (f, g)، ریختی مانند $j : D \longrightarrow E$ است با این خاصیت که:

i) $jf = jg$؛ و

ii) اگر $k : D \longrightarrow F$ ریختی باشد که $kf = kg$، آن‌گاه ریخت یکتای $\overline{k} : E \longrightarrow F$ وجود داشته باشد به طوری که $\overline{k}j = k$.

مثال ۲۱.۱ در رستهٔ مجموعه‌ها یک هستهٔ تفاضلی برای $f : C \longrightarrow D$ و $g : C \longrightarrow D$، نگاشت شمول $B \longrightarrow C$ است، که $B = \{c \in C : f(c) = g(c)\}$. طرحی مشابه نشان می‌دهد که هر جفت از ریخت‌ها در رستهٔ گروه‌ها، حلقه‌ها و مدول‌ها هستهٔ تفاضلی دارد.

مثال ۲۲.۱ فرض کنید $f : G \longrightarrow H$ و $g : G \longrightarrow H$ هم‌ریختی گروه‌ها باشند و N کوچک‌ترین زیرگروه نرمال شامل $\{f(a)g(a)^{-1} : a \in G\}$ از H باشد. دراین‌صورت (بنابر قضیهٔ ٦.۵ از فصل اول منبع [٦])، برور‌یختی کانونی $H \longrightarrow H/N$ یک هم‌هستهٔ تفاضلی برای (f, g) خواهد بود.

گزاره ۲۳.۱ فرض کنید $f : C \longrightarrow D$ و $g : C \longrightarrow D$ ریخت‌هایی از رستهٔ $\mathcal{C}$ باشند.

i) اگر $i : B \longrightarrow C$ یک هستهٔ تفاضلی برای (f, g) باشد، آن‌گاه i تک‌ریختی خواهد بود.

ii) اگر $i : B \longrightarrow C$ و $j : A \longrightarrow C$ هسته‌های تفاضلی برای (f, g) باشند، آن‌گاه یک‌ریختی یکتای $h : A \longrightarrow B$ وجود دارد به طوری که $ih = j$.

برهان: گزارهٔ ٦.۳ از فصل ۱۰ منبع [٦] را نگاه کنید. ■

تبصره ۲۴.۱ هم‌هسته‌های تفاضلی بروریختی هستند و دوگان گزارهٔ ۲۳.۱ (ii) برای آن‌ها برقرار است.

فرض کنید $\mathcal{C}$ رسته‌ای باشد که شیٔ صفر 0 و در نتیجه ریخت‌های صفر دارد (گزارهٔ ۱۹.۱). یک هسته برای ریخت $f : C \longrightarrow D$ (اگر وجود داشته باشد)، مساوی با هر هستهٔ تفاضلی جفت $(f, 0_{C,D})$ تعریف می‌شود و معمولاً با نماد $\mathrm{Ker} f$ نشان داده می‌شود. تعریف ۲۰.۱ و گزاره‌های ۱۹.۱ و ۲۳.۱ نشان می‌دهند که $k : K \longrightarrow C$ یک هسته برای $f : C \longrightarrow D$ است اگر و تنها اگر

i) k، تک‌ریختی‌ای باشد با خاصیت $fk = 0_{K,D}$؛ و

ii) اگر $h : B \longrightarrow C$ ریختی باشد که $fh = 0_{B,D}$، آن‌گاه ریخت یکتای $\overline{h} : B \longrightarrow K$ وجود داشته باشد که $k\overline{h} = h$.

---

6. difference kernel
7. difference cokernel

با توجه به گزارهٔ ۲۳.۱، k در حد یک‌ریختی یکتا است.

یک هم‌هستهٔ $t : D \longrightarrow E$ برای ریخت $f : C \longrightarrow D$، به طور دوگان، مساوی با هر هم‌هستهٔ تفاضلی جفت $(f, 0_{C,D})$ تعریف می‌شود و معمولاً با نماد $\mathrm{Coker} f$ نشان داده می‌شود. همانند بالا، t با شرایط زیر مشخص می‌شود:

i) k یک برو‌ریختی است با خاصیت $tf = 0_{C,E}$؛ و

ii) اگر $g : D \longrightarrow F$ ریختی باشد که $gf = 0_{C,F}$، آن‌گاه ریخت یکتای $\overline{g} : E \longrightarrow F$ وجود داشته باشد که $\overline{g}t = g$.

مثال ۲۵.۱ در رستهٔ گروه‌ها، حلقه‌ها و مدول‌ها یک هسته برای ریخت $f : C \longrightarrow D$، نگاشت شمول $K \longrightarrow C$ است که K همان هستهٔ معمولی است؛ $K = \{c \in C : f(c) = 0\}$. در رستهٔ مدول‌ها برو‌ریختی کانونی $D \longrightarrow D/\mathrm{Im} f$ یک هم‌هسته برای f است.

حال، شرایطی را روی مجموعه‌های ریختِ (hom های) یک رسته جست‌وجو می‌کنیم تا تحت آن‌ها، تعاریف و مفاهیم نظریهٔ مدول‌ها را هرچه بیشتر به رسته‌های (کم و بیش) دلخواه تعمیم دهیم. این جست‌وجو ما را به سمت تعریف رسته‌های آبلی هدایت می‌کند.

تعریف ۲۶.۱ رستهٔ $\mathcal{C}$ را Ab ـ رسته می‌نامیم اگر در شرایط زیر صدق کند:

i) برای هر جفتِ A و B از اشیای $\mathcal{C}$، مجموعهٔ $hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ ساختار گروه آبلی داشته باشد؛

ii) اگر $\lambda, \lambda' : A \longrightarrow B$ و $\mu, \mu' : B \longrightarrow C$ ریخت‌هایی از $\mathcal{C}$ باشند، آن‌گاه

$$\mu \circ (\lambda + \lambda') = \mu \circ \lambda + \mu \circ \lambda' \quad \text{و} \quad (\mu + \mu') \circ \lambda = \mu \circ \lambda + \mu' \circ \lambda.$$

برای هر جفتِ A و B از رستهٔ $\mathcal{C}(R)$، مجموعهٔ $hom_{\mathcal{C}(R)}(A, B)$ به طور طبیعی یک گروه آبلی است که در شرط (ii) از تعریف بالا صدق می‌کند. بنابراین، $\mathcal{C}(R)$ یک Ab ـ رسته است.

Ab ـ رستهٔ $\mathcal{C}$ را رستهٔ جمعی می‌نامیم اگر شئ صفر داشته باشد و هر جفت شئ A و B در $\mathcal{C}$ حاصل‌ضرب داشته باشد. در رسته‌های جمعی، حاصل‌ضرب‌های متناهی دقیقاً همان هم‌حاصل‌ضرب‌های متناهی هستند،[۸] و مرسوم است که از نماد $A \bigoplus B$ برای نشان دادن حاصل‌ضرب A و B استفاده کنند.

دنباله‌های دقیق کوتاه و مدول‌های انژکتیو و پروژکتیو، از مفاهیم شناخته شدهٔ نظریهٔ مدول‌ها هستند. در دو تعریف زیر این مفاهیم را به رسته‌های جمعی تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۲۷.۱ فرض کنید $\alpha : A \longrightarrow B$ و $\beta : B \longrightarrow C$ ریخت‌هایی از رستهٔ $\mathcal{C}$ باشند. دنبالهٔ

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

را دنبالهٔ دقیق کوتاه می گوییم هر گاه α هسته‌ای برای β باشد، و β هم‌هسته‌ای برای α باشد.

۸. بخش ۱۱.۲.۲ و تمرین ۶.۲.۲ از منبع [۳] را نگاه کنید.

تعریف ۲۸.۱ یک شیء E از رستهٔ $\mathcal{C}$ را انژکتیو می‌گوییم هرگاه برای هر دنبالهٔ دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0,$$

دنبالهٔ

$$0 \longrightarrow hom_{\mathcal{C}}(C,E) \xrightarrow{\beta_*} hom_{\mathcal{C}}(B,E) \xrightarrow{\alpha_*} hom_{\mathcal{C}}(A,E) \longrightarrow 0,$$

(یادآوری می‌کنیم که به ازای هر $f \in hom_{\mathcal{C}}(C,E)$ داریم $\beta_*(f) = f \circ \beta$، و به ازای هر $g \in hom_{\mathcal{C}}(B,E)$ داریم $\alpha_*(g) = g \circ \alpha$) دنباله‌ای دقیق از گروه‌های آبلی باشد.

تعریف ۲۹.۱ یک شیء P از رستهٔ $\mathcal{C}$ را پروژکتیو می‌گوییم هرگاه برای هر دنبالهٔ دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0,$$

دنبالهٔ

$$0 \longrightarrow hom_{\mathcal{C}}(P,A) \xrightarrow{\alpha_*} hom_{\mathcal{C}}(P,B) \xrightarrow{\beta_*} hom_{\mathcal{C}}(P,C) \longrightarrow 0,$$

(یادآوری می‌کنیم که به ازای هر $f \in hom_{\mathcal{C}}(P,A)$ داریم $\alpha_*(f) = \alpha \circ f$، و به ازای هر $g \in hom_{\mathcal{C}}(P,B)$ داریم $\beta_*(g) = \beta \circ g$) دنباله‌ای دقیق از گروه‌های آبلی باشد.

یکی از اهداف اصلی این بخش ارائهٔ تعریف رسته‌های آبلی است.

تعریف ۳۰.۱ رستهٔ جمعی $\mathcal{C}$ را رستهٔ آبلی می‌گوییم هرگاه:

i) هر ریخت متعلق به $\mathcal{C}$، هسته و هم‌هسته داشته باشد؛

ii) هر تک‌ریختی در $\mathcal{C}$، هسته‌ای برای هم‌هسته‌اش باشد؛

iii) هر بروریختی در $\mathcal{C}$، هم‌هسته‌ای برای هسته‌اش باشد.

برای دیدن مثال‌هایی از رسته‌های آبلی، تعریف ۳.۱۰ و قضیهٔ ۶.۱۱ را نگاه کنید.
این بخش را با تعریف تابعگرهای جمعی و قضیه‌ای در مورد آن‌ها به پایان می‌بریم.

تعریف ۳۱.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ رسته‌هایی جمعی باشند و $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ تابعگری همورد باشد. F را **تابعگر جمعی** می‌نامیم اگر به ازای هر جفتِ C و C' از اشیأی $\mathcal{C}$، نگاشت

$$F : hom_{\mathcal{C}}(C,C') \longrightarrow hom_{\mathcal{D}}(F(C),F(C')),$$

هم‌ریختی گروه‌ها باشد؛ یعنی، به ازای هر $f,g \in hom_{\mathcal{C}}(C,C')$، $F(f+g) = F(f) + F(g)$.

تابعگرهای پادورد جمعی، به طور مشابه تعریف می‌شوند.

قضیه ۳۲.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ رسته‌های جمعی باشند و $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ تابعگری جمعی باشد. دراین‌صورت،

i) اگر 0 یک ریخت صفر یا شیء صفر از $\mathcal{C}$ باشد، آن‌گاه $F(0)$ یک ریخت صفر یا شیء صفر از $\mathcal{D}$ خواهد بود.

ii) برای هر دو شیء C و C' از $\mathcal{C}$،

$$F(C \oplus C') \cong F(C) \oplus F(C').$$

برهان: لم ۱۹.۲.۲ و قضیهٔ ۲۰.۲.۲ از منبع [۳] را نگاه کنید. ■

۲ حلقه‌ها و مدول‌های مدرج

بعضی از ساختارهای ریاضی با اعمال شرایطی معین روی مدول‌ها به دست می‌آیند. در این گونه مواقع معمولا اولین سوالی که مطرح می‌شود این است که مفاهیم مربوط به مدول تا چه اندازه‌ای برای ساختار جدید قابل گسترش است. حلقه‌ها و مدول‌های مدرج نمونه‌ای از این ساختارها هستند. در این بخش ابتدا حلقه‌ها و مدول‌های مدرج را تعریف می‌کنیم سپس چند خاصیت ابتدائی آنها را بیان می‌کنیم و در نهایت با ارائهٔ چند تعریف و قضیه، که تعمیمی از مفاهیم مربوط به حلقه‌ها است، به این بخش خاتمه می‌دهیم.

برای شروع، به مفهوم تکوارهٔ مدرج‌کننده نیاز داریم. در این پایان‌نامه فقط با تکواره‌های مدرج‌کنندهٔ $\mathbb{N}_0^n$ و $\mathbb{Z}^n$ سر و کار داریم، با این حال حلقه‌ها و مدول‌های مدرج را در حالت کلی تعریف می‌کنیم.

تعریف۱.۲ مجموعهٔ Γ با عمل دوتایی $+$ را یک تکوارهٔ مدرج‌کننده[9] گوییم هرگاه

i) برای هر $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$،

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_2 + \gamma_1;$$

ii) برای هر $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$،

$$\gamma_1 + (\gamma_2 + \gamma_3) = (\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_3;$$

iii) عنصری مانند 0 وجود داشته باشد به طوری که

$$\forall \gamma \in \Gamma: \quad \gamma + 0 = \gamma;$$

iv) برای هر $\gamma_1, \gamma_2, \gamma \in \Gamma$،

$$\gamma + \gamma_1 = \gamma + \gamma_2 \quad \Longrightarrow \quad \gamma_1 = \gamma_2.$$

مثال۲.۲ با توجه به تعریف به سادگی می‌توان تشخیص داد که تمام گروه‌های آبلی، تکوارهٔ مدرج‌کننده هستند؛ به عنوان مثال، گروه $\mathbb{Z}^n$ با عمل جمع

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),$$

نمونه‌ای از یک تکوارهٔ مدرج‌کننده است. تکواره‌های مدرج‌کننده، محدود به گروه‌های آبلی نمی‌شوند؛ به عنوان مثال، مجموعهٔ $\mathbb{N}_0^n$، که $\mathbb{N}_0$ مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی است، با عمل جمع مولفه‌ای یک تکوارهٔ مدرج‌کننده است ولی یک گروه آبلی نیست. همان‌طور که گفته شد، تکواره‌های مدرج‌کنندهٔ $\mathbb{N}_0^n$ و $\mathbb{Z}^n$ در مباحثی که در این متن ارائه خواهند شد دارای اهمیت زیادی هستند.

فرض کنید $(R, +, \cdot)$ یک حلقه باشد. اعضای R همراه با عمل $+$ یک گروه تشکیل می‌دهند. بنابراین، صحبت کردن از زیرگروه‌های گروه جمعی R بامعنی است.

تعریف۳.۲ فرض کنید R یک حلقه و Γ یک تکوارهٔ مدرج‌کننده باشد. همچنین فرض کنید $\{R_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ خانواده‌ای از زیرگروه‌های گروه جمعی R باشد. حلقهٔ R همراه با خانوادهٔ $\{R_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ را یک حلقهٔ Γـ مدرج [10] گوییم هرگاه

---

9. grading monoid
10. Γ – graded ring

آ) $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ (مجموع مستقیم گروه‌ها)؛

ب) برای هر $\gamma, \gamma' \in \Gamma$، $R_\gamma R_{\gamma'} \subseteq R_{\gamma+\gamma'}$.

با این توضیح که $R_\gamma R_{\gamma'}$ مجموعهٔ تمام اعضایی است که به صورت زیر قابل بیان هستند:

$$a_{1,\gamma}\cdot b_{1,\gamma'} + \cdots + a_{n,\gamma}\cdot b_{n,\gamma'}, \quad (a_{i,\gamma}\in R_\gamma,\ b_{i,\gamma'}\in R_{\gamma'}).$$

خانوادهٔ $\{R_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ از تعریف ۳.۲ را یک درجه‌بندی برای R می‌نامیم. فرض کنید $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ حلقه‌ای Γ - مدرج باشد. هر R_γ را مولفهٔ همگن γ ام R می‌گوییم. هر عضو از R_γ را عضو همگن از درجهٔ γ می‌نامیم و درجهٔ هر عنصر همگن مانند r را با نماد $\deg(r)$ نمایش می‌دهیم. هر عنصر $s \in R$ نمایش یکتایی به صورت مجموع عناصر همگن دارد:

$$s = \sum_{\gamma\in\Gamma} s_\gamma, \quad s_\gamma \in R_\gamma;$$

این مجموع تنها شامل تعدادی متناهی عبارت ناصفر است. در نمایش بالا، هر s_γ را مولفهٔ همگن s از درجهٔ γ می‌گوییم. با توجه به تعریف، هرگاه عضوی از درجهٔ γ را در عضوی از درجهٔ γ' ضرب کنیم نتیجه عضوی از درجهٔ $\gamma+\gamma'$ می‌شود. خاطرنشان می‌کنیم که برای هر $\gamma\in\Gamma$، عنصر صفر حلقه، عنصری از درجهٔ γ است.

مثال ۴.۲ فرض کنید Γ یک تکوارهٔ مدرج‌کننده باشد. هر حلقهٔ R را می‌توان به صورت زیر به یک حلقهٔ Γ - مدرج تبدیل کرد:

$$R_\gamma = \begin{cases} R & ، \ \gamma = 0 \\ 0 & ، \ \gamma \neq 0. \end{cases}$$

این حلقهٔ Γ - مدرج را حلقهٔ Γ - مدرج بدیهی می‌نامیم.

گزاره ۵.۲ فرض کنید Γ یک تکوارهٔ مدرج‌کننده و R حلقه‌ای Γ - مدرج باشد. دراین‌صورت، عضو همانی (ضربی) R، همگن از درجهٔ صفر است.

برهان: فرض کنید $1_R = \sum_{\gamma\in\Gamma}\varepsilon_\gamma$ نمایش عضو همانی به صورت مجموعی از اعضای همگن باشد و η عضوی همگن از درجه λ باشد. دراین‌صورت،

$$\eta = \eta\cdot 1_R = \sum_{\gamma}\eta\cdot\varepsilon_\gamma \quad \Rightarrow \quad \eta - (\eta\cdot\varepsilon_0) = \sum_{\gamma\neq 0}\eta\cdot\varepsilon_\gamma.$$

با مقایسهٔ عبارت‌های از درجهٔ λ مشاهده می‌کنیم که $\eta = \eta\cdot\varepsilon_0$. بنابراین، با ضرب هر عضو همگن در ε_0، همان عضو به دست می‌آید. از طرفی، هر عضو از R را می‌توان به صورت مجموعی از اعضای همگن نوشت. پس، برای هر $s\in R$ داریم $s = s\cdot\varepsilon_0$. به خصوص

$$1_R = 1_R\cdot\varepsilon_0 = \varepsilon_0.$$

■

تبصره ۶.۲ با توجه به گزارهٔ بالا به سادگی می‌توان نشان داد که R_0 زیرحلقه‌ای از R است و برای هر $\gamma\in\Gamma$، R_γ یک R_0 - مدول است.

تعریف۷.۲ فرض کنید Γ یک تکوارهٔ مدرج‌کننده و $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ حلقه‌ای Γ ـ مدرج باشد. همچنین فرض کنید M یک مدول و $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ خانواده‌ای از زیرگروه‌های گروه جمعی M باشد. مدول M همراه با خانوادهٔ $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ را یک مدول Γ ـ مدرج[11] می‌نامیم هرگاه

آ) $M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ (مجموع مستقیم گروه‌ها)؛

ب) برای هر $\gamma, \gamma' \in \Gamma$، $R_\gamma M_{\gamma'} \subseteq M_{\gamma+\gamma'}$.

با این توضیح که $R_\gamma M_{\gamma'}$ مجموعهٔ تمام اعضایی است که به صورت زیر قابل بیان هستند:

$$a_{1,\gamma} \cdot m_{1,\gamma'} + \cdots + a_{n,\gamma} \cdot m_{n,\gamma'}, \quad (a_{i,\gamma} \in R_\gamma, \ m_{i,\gamma'} \in M_{\gamma'}).$$

خانوادهٔ $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ از تعریف ۷.۲ را یک درجه‌بندی برای M می‌نامیم. فرض کنید $M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ مدولی Γ ـ مدرج روی حلقهٔ Γ ـ مدرج $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ باشد. هر M_γ را مولفهٔ همگن γ ام M می‌گوییم. هر عضو از M_γ را عضو همگن از درجهٔ γ می‌نامیم و درجهٔ هر عنصر همگن مانند m را با نماد $\deg(m)$ نشان می‌دهیم. هر عنصر $m \in M$ نمایش یکتایی به صورت مجموع عناصر همگن دارد:

$$m = \sum_{\gamma\in\Gamma} m_\gamma, \quad m_\gamma \in M_\gamma;$$

این مجموع تنها شامل تعدادی متناهی عبارت ناصفر است. در نمایش بالا، هر m_γ را مولفهٔ همگن m از درجهٔ γ می‌گوییم. با توجه به تعریف، هرگاه عضو همگن $m \in M$ از درجهٔ γ را در عضو همگن $r \in R$ از درجهٔ γ' ضرب کنیم نتیجه عضوی همگن از درجهٔ $\gamma + \gamma'$ می‌شود. با توجه به این موضوع به سادگی می‌توان نشان داد که برای هر $\gamma \in \Gamma$، M_γ یک R_0 ـ مدول است.

مثال۸.۲ فرض کنید Γ یک تکوارهٔ مدرج‌کننده و $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ حلقه‌ای Γ ـ مدرج باشد. دراین‌صورت، حلقهٔ R را می‌توان به طور طبیعی یک R ـ مدول Γ ـ مدرج در نظر گرفت.

مثال۹.۲ فرض کنید Γ یک تکوارهٔ مدرج‌کننده و $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ حلقه‌ای Γ ـ مدرج باشد. همچنین فرض کنید M یک R ـ مدول باشد. قرار دهید $M_0 = M$ و به ازای هر $\gamma \neq 0$ قرار دهید $M_\gamma = 0$. به آسانی می‌توان نشان داد که مدول M همراه با خانوادهٔ $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ یک R ـ مدول Γ ـ مدرج است. اگر مدولی مانند M به این صورت مدرج شود، می‌گوییم M در درجهٔ صفر متمرکز شده است.

مثال۱۰.۲ با استفاده از R ـ مدول Γ ـ مدرجی مانند M می‌توان مدول مدرج جدیدی به این صورت تعریف کرد: عضوی مانند λ را از Γ ثابت در نظر می‌گیریم. $M[\lambda]$ را به عنوان R ـ مدول مساوی با M تعریف می‌کنیم ولی به ازای هر $\gamma \in \Gamma$ قرار می‌دهیم $(M[\lambda])_\gamma = M_{\lambda+\gamma}$. مدول مدرج $M[\lambda]$ را انتقال M به اندازهٔ λ می‌نامیم.

مثال۱۱.۲ فرض کنید $\{N_\lambda\}$ خانواده‌ای از R ـ مدول‌های Γ ـ مدرج باشد و $M = \bigoplus_\lambda N_\lambda$ (مجموع مستقیم مدول‌ها). به ازای هر $\gamma \in \Gamma$ قرار دهید $M_\gamma = \bigoplus_\lambda (N_\lambda)_\gamma$. به آسانی می‌توان نشان داد که مدول M همراه با خانوادهٔ $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$، یک R ـ مدول Γ ـ مدرج تشکیل می‌دهد.

---

11. Γ – graded module

قضیه۱۲.۲ فرض کنید Γ یک تکوارهٔ مدرج کننده و $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ حلقه‌ای Γ ـ مدرج باشد. همچنین فرض کنید K زیرمدولی از R ـ مدول Γ ـ مدرج $M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ باشد. دراین‌صورت، گزاره‌های زیر با هم معادل‌اند:

۱) $K = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(M_\gamma \bigcap K)$؛

۲) اگر $y \in K$، آن‌گاه تمام مولفه‌های همگن y متعلق به K خواهند بود؛

۳) K، به عنوان یک R ـ مدول، توسط مجموعه‌ای از اعضای همگن تولید می‌شود.

برهان:
(۲ ⇐ ۱) فرض کنید $y \in K$. دراین‌صورت، y نمایشی به شکل $y = \sum_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma$ دارد که در آن به ازای هر $\gamma \in \Gamma$، $y_\gamma \in (M_\gamma \bigcap K)$. از اینجا نتیجه می‌شود که y_γ مولفهٔ همگن y از درجه γ است و چون $y_\gamma \in (M_\gamma \bigcap K)$، داریم $y_\gamma \in K$.

(۳ ⇐ ۲) هر عضو از مدول Γ ـ مدرج M را می‌توان به صورت مجموع مولفه‌های همگن‌اش نوشت. پس، طبق فرض، هر عضو از K را می‌توان به صورت مجموعی از مولفه‌های همگن متعلق به K نوشت. بنابراین، زیرمدول تولید شده توسط اعضای همگن K، با خود K برابر است.

(۱ ⇐ ۳) فرض کنید K توسط خانوادهٔ $\{x_i\}_{i\in I}$ تولید شود و برای هر $i \in I$، x_i مولفه‌ای همگن از درجهٔ γ_i باشد. عضوی از R مانند $a = \sum_\gamma a_\gamma$ را در نظر بگیرید. دراین‌صورت، $a_\gamma \cdot x_i \in (M_{\gamma+\gamma_i} \bigcap K)$ و در نتیجه $a \cdot x_i \in \sum_\gamma (M_\gamma \bigcap K)$. بنابراین، $K = \sum_\gamma (M_\gamma \bigcap K)$. ■

زیرمدول K از مدول Γ ـ مدرج M را که در شرایط معادل (۱)، (۲) و (۳) از قضیهٔ قبل صدق می‌کند، زیرمدول همگن (یا مدرج) می‌نامیم و درحالتی که حلقهٔ R را به عنوان مدول Γ ـ مدرج روی خودش در نظر بگیریم (مثال ۸.۲)، زیرمدول‌های همگن را ایدآل مدرج (یا ایدآل همگن) می‌نامیم.

اگر $\{K_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرمدول‌های همگن M باشد، آن‌گاه $\bigcap_i K_i$ و $\sum_i K_i$ نیز همگن خواهند بود.[۱۲]

مثال۱۳.۲ فرض کنید $S = k[x_1, \dots x_n]$ حلقهٔ چندجمله‌ای‌های روی میدان k باشد. به ازای هر $\mathrm{b} = (b_1 \dots b_n) \in \mathbb{Z}^n$، زیرگروه S_{b} از گروه جمعی S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_{\mathrm{b}} = \begin{cases} \{a x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} : a \in k\} & \text{اگر } \mathrm{b} \in \mathbb{N}_0^n \\ 0 & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که با این تعریف، S حلقه‌ای $\mathbb{Z}^n$ ـ مدرج است. S را به طور طبیعی یک S ـ مدول $\mathbb{Z}^n$ ـ مدرج در نظر می‌گیریم. با توجه به قضیهٔ ۱۲.۲ و توضیحات پس از آن، هر ایدآل مدرج این حلقه، توسط اعضایی به شکل $\mathrm{x}^{\mathrm{b}} = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$، که $\mathrm{b} \in \mathbb{N}_0^n$، تولید می‌شود. در بخش ۴، ایدآل‌های مدرج این حلقه را به طور دقیق بررسی می‌کنیم. خاطرنشان می‌کنیم که در این متن حلقهٔ S را همواره با این درجه‌بندی، مدرج می‌کنیم.

فرض کنید $M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ یک مدول Γ ـ مدرج روی حلقهٔ Γ ـ مدرج $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$، و K زیرمدولی همگن از M باشد. به ازای هر $\gamma \in \Gamma$،

$$K_\gamma = M_\gamma \bigcap K, \qquad (1)$$

۱۲. گزارهٔ ۲۹ از بخش ۱۱.۲ منبع [۱۰].