دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی– گرایش آنالیز عددی

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه:

بررسی وجود جواب رده‌هایی از معادلات انتگرال و حل عددی آنها با استفاده از روش گالرکین

« زهره صفار»

استاد راهنما:

دکتر جواد وحیدی

استاد مشاور:

دکتر سیامک فیروزیان

آبان۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

مرکز بابل

پایان‌نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی– گرایش آنالیز عددی

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه:

بررسی وجود جواب رده‌هایی از معادلات انتگرال و حل عددی آنها با استفاده از روش گالرکین

« زهره صفار »

استاد راهنما:

دکتر جواد وحیدی

استاد مشاور:

دکتر سیامک فیروزیان

آبان ۱۳۹۰

اینجانب زهره صفار دانشجوی ورودی سال ۱۳۸۸ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گواهی می‌نمایم چنانچه در پایان‌نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته‌ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده‌ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می‌دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

نام و نام خانوادگی دانشجو: زهره صفار

تاریخ و امضاء

اینجانب زهره صفار دانشجوی ورودی سال ۱۳۸۸ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گواهی می‌نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان‌نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله، کتاب و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

نام و نام خانوادگی دانشجو: زهره صفار

تاریخ و امضاء

آبان ۱۳۹۰

تقدیم به:

ارزشمندترین سرمایه‌های زندگی

پدر، مادر و همسر و فرزندان عزیزم

تقدیر و تشکر

خدا را سپاس که توفیق اتمام این پایان‌نامه را به من عطا فرمود. به راستی که او دانا و تواناست.

لازم می‌دانم مراتب سپاس و امتنان خویش را از استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر جواد وحیدی ابراز نمایم که با رهنمودهای ارزشمند خود در تمامی مراحل این پژوهش منت بزرگی بر من نهاده و دلسوزانه بنده را راهنمایی فرمودند.

بی‌شک اجرای این تحقیق بدون مشاوره‌ی استاد ارجمندم جناب آقای دکتر سیامک فیروزیان میسر نمی‌گردید، بدینوسیله از کمکهای ارزنده ایشان تشکر می‌کنم.

از جناب آقای دکتر ماشاا... متین فر که پایان‌نامه اینجانب را مطالعه و داوری فرمودند، بسیار متشکرم.

از خانم ایرانتاج باباجان تبار که به عنوان نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه در جلسه دفاع از پایان‌نامه حضور داشتند، بسیار سپاسگزارم.

از پدر و مادر عزیز و یکایک اعضای خانواده‌ام که همیشه پشتیبان من بودند، بسیار متشکرم.

از همسر عزیز و مهربان و فرزندان دلبندم که با مهرو محبت خود مرا همراهی کردند و همواره مشوق من بوده‌اند بسیار سپاسگزارم.

چکیده

این پایان نامه مشتمل بر ٤ فصل است:

فصل اول را به بیان پیش‌نیازهای ریاضی این پایان‌نامه و مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل و انتگرال اختصاص می‌دهیم.

در فصل دوم یک روش جدید برای پیدا کردن جواب تقریبی مسائل مقدار اولیه (**IVP**) و انواع معادلات انتگرال فردهلم و ولترا معرفی می‌کنیم. ابتدا با معرفی مجموعه‌ای از توابع مستقل به تشکیل یک پایه کامل برای فضای برداری پرداخته، سپس با استفاده از ترکیب خطی این توابع در روش مانده وزن‌دار روش گالرکین را تشریح می‌کنیم.

در فصل سوم یک روش عددی برای نمایش معادلات انتگرال فردهلم- ولترا نوع دوم معرفی می‌کنیم که در قالب یک دستگاه خطی از معادلات انتگرال فردهلم به کار گرفته می‌شود، همچنین وجود و یکتایی جواب دستگاه، مورد بحث قرار می‌گیرد. در ادامه روشهای ترتیب و گالرکین را به کار می‌گیریم تا یک دستگاه خطی از معادلات جبری بدست آید که با روشهای عددی قابل حل است. به علاوه خطای تخمین در هر مورد محاسبه می‌شود.

در فصل چهارم یک روش برای یافتن جواب دقیق معادله انتگرالی نامتناهی مرزی(IBIE) از نوع دوم با هسته تبهگن در دو حالت یکی روی بازه $[0,\infty)$ و دیگری روی $(-\infty,\infty)$ پیشنهاد می‌شود. روش گالرکین با چندجمله‌ای لاگر مورد استفاده قرار می‌گیرد تا جواب تقریبی از (IBIE) بدست آید. روش تصویر به عنوان یک راهکار انتزاعی کلی معرفی می‌شود و یک طرح کلی برای تعیین و آنالیز روش تصویر برای حل معادلات با عملگر خطی در اختیار ما قرار می‌دهد.

واژه‌های کلیدی:

معادله انتگرال فردهلم ـ معادله انتگرال ولترا ـ معادله انتگرال- دیفرانسیل ـ معادلات انتگرال منفرد ـ دستگاه‌معادلات خطی ـ روش گالرکین ـ روش ترتیب ـ چند جمله‌ای لاگرـ روش نمایش.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل سوم: حل عددی معادلات انتگرال با استفاده از روشهای ترتیب و گالرکین

فصل چهارم: حل عددی معادلات انتگرال با چندجمله‌ایهای لاگر در روش گالرکین

فهرست تصاویر

عنوان **صفحه**

فهرست جدول

عنوان **صفحه**

فصل اول

مقدمات

دراین فصل به مفاهیم ابتدایی که در این پایان‌نامه مورد نیاز است پرداخته می‌شود. ابتدا تعریف و تقسیم‌بندی معادلات انتگرال خطی ارائه شده، در ادامه روش‌ها و تکنیک‌های حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم غیرهمگن همراه با مثال مورد بحث قرار می‌گیرد. در پایان معادلات انتگرال فردهلـم همگن با هسته جدائی‌پذیر معرفی شده و حل چند مثال ارائه می‌شود.(۱)

۱–۱ مقدمه‌ای بر معادله انتگرال

تعریف ۱: یک معادله انتگرال، معادله‌ای است که در آن تابع مجهول$u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد. یک نمونه از یک معادله انتگرال که درآن$u(x)$ تابع مجهولی است که باید معلوم شود به صورت زیر است.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt \qquad (۱)$$

$k(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می‌شود.$\alpha(x)$ و$\beta(x)$ حدود انتگرال هستند.

در معادله (۱) تابع مجهول یعنی$u(x)$ تنها در زیر علامت انتگرال ظاهر شده است. در حالت‌های دیگر ممکن است تابع مجهول در خارج از علامت انتگرال هم حضور داشته باشد. باید توجه کرد که هسته معادله یعنی$k(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل معلوم هستند.

هدف ما تعیین تابع مجهول یعنی$u(x)$است که در رابطه (۱) صدق می‌کند. برای این کار روش‌های مختلفی به کار برده می‌شود که در قسمت‌های بعد معرفی خواهند شد.

توجه این پروژه بیشتر روی این روش‌ها و نیز ارائه نمونه‌هایی جهت درک بهتر و ساده‌تر آنها متمرکز می‌باشد. معادلات انتگرال در خیلی از مباحث فیزیک و شیمی و مهندسی ظاهر می‌شوند.

۱–۲ تقسیم بندی معادلات انتگرال خطی

متـداول‌ترین معادلات انتگـرال را می‌توان به دو گروه معـادلات انتگـرال فردهلـم و معادلات انتگـرال ولتـرا دسته‌بندی نمود. در این پروژه چهار نوع معادلات انتگرال خطی مورد بحث قرار می-گیرد.

۱- معادلات انتگرال فردهلم

۲- معادلات انتگرال ولترا

۳- معادلات انتگرال- دیفرانسیل

٤- معادلات انتگرال منفرد

اکنون تعاریف و خواص عمده هر نوع را بررسی می‌کنیم.

۱–۲–۱ معادلات انتگرال خطی فردهلم

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم که در آنها حد پائین و حد بالای انتگرال‌گیری به ترتیب اعدادثابت a, b هستند به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \qquad a \leq x,t \leq b \tag{۲}$$

که درآن هسته معادله انتگرال $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل مشخص هستند و λ هم یک پارامتر معلوم می‌باشد.

معادله (۲) را خطی می‌گویند زیرا تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال به طور خطی ظاهر شده است یعنی توان $u(x)$ یک است. بر حسب اینکه $\phi(x)$ کدامیک از مقادیر زیر را انتخاب کند معادلات انتگرال فردهلم خطی به دو دسته عمده تقسیم می‌شوند:

۱- زمانی که $\phi(x) = 0$ معادله (۲) به معادله زیر تبدیل می‌شود.

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt = 0 \tag{۳}$$

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع اول می‌نامند.

۲- زمانی که $\phi(x) = 1$ معادله (۲) به شکل زیر در خواهد آمد.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt. \tag{٤}$$

به این معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می‌گویند.

توجه: در حقیقت معادله (٤) را می‌توان از معادله (۲) با تقسیم طرفین بر $\phi(x)$ به شرط آن‌که $\phi(x) \neq 0$ به دست آورد.

۱-۲-۲ معادلات انتگرال خطی ولترا

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی ولترا، یعنی معادلاتی که درآنها حد بالا و پائین انتگرال‌گیری به جای این‌که یک عدد ثابتی باشد به صورت تابعی از x ظاهر می‌شود به فرم زیر می‌باشد.

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \tag{٥}$$

که در آن تابع مجهول یعنی $u(x)$ زیر علامت انتگرال به صورت خطی می‌باشد.

باید توجه کرد که (۵) را می‌توان به عنوان یک حالت خاص معادلات انتگرال فردهلم در نظر گرفت به طوری که هسته $k(x,t)$ برای $x \in [a,b]\ , t > x$ صفر فرض شود. معادلات انتگرال ولترا را می‌توان با توجه به مقدار $\phi(x)$ به دوگروه دسته‌بندی نمود.

۱.در حالی که $\phi(x) = 0$ معادله (۵) به صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt = 0 \tag{٦}$$

به این معادله انتگرال ولترا نوع اول می‌گویند.

۲. زمانی که $\phi(x) = 1$ آن‌گاه معادله (۵) به شکل زیر در خواهد آمد.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt, \tag{٧}$$

این را معادله انتگرال ولترا نوع دوم می‌نامند.

با توجه به معادلات(۲) تا (۷) می‌توانیم نتیجه‌گیری‌های زیر را ارائه نمائیم.

نتیجه ۱« ساختمان معادلات فردهلم و ولترا »

در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی نوع اول تابع مجهول $u(x)$ تنها به طور خطی زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود. اما درمعادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی نوع دوم تابع مجهول هم در زیر علامت انتگرال و هم درخارج از علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر می‌شود.

نتیجه۲ « حدود انتگرال گیری »

در معادلات انتگرال فردهلم انتگرال‌گیری روی یک فاصله متناهی با حدود ثابت انجام می‌شود. اما در معادلات انتگرال ولترا حداقل یکی از حدود فاصله انتگرال‌گیری متغیر است و معمولا همان حد بالای انتگرال‌گیری به عنوان متغیر انتخاب می‌شود.

نتیجه۳ « منشأ ظهور معادلات انتگرال »

باید به این نکته مهم توجه کرد که معادلات انتگرال در بسیاری از مسائل مهندسی، فیزیک، شیمی و بیولوژی ظاهر می‌شوند. البته معادلات انتگرال به عنوان نمایش جواب معادلات دیفرانسیل هم به کار می‌روند. به طوری که اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر به صورت یک مسئله مقدار مرزی باشد آن‌گاه معادله انتگرالی که ظاهر می‌شود از نوع فردهلم خواهد شد و اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر در قالب یک مسئله مقدار اولیه باشد آن‌گاه معادله حاصل یک معادله انتگرال ولترا خواهد بود.

برحسب این که معادله انتگرال از چه نوع مسئله‌ای ظاهر می‌شود تکنیک‌ها وایده‌های مختلفی برای تعیین جواب معادله انتگرال به کار می‌رود.

نتیجه ۴ « خاصیت خطی »

همان طور که پیش از این هم گفته شد تابع مجهول $u(x)$ در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم در زیر علامت انتگرال به صورت توان یک ظاهر می‌شود اما زمانی معادلات انتگرال غیر خطی فردهلم و ولترا خواهیم داشت که به جای $u(x)$ عبارتی نظیر $F(u(x))$ آورده شود.

در زیر مثال‌هایی از معادلات انتگرال غیرخطی آورده شده است.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t) u^2(t) dt, \quad (۸)$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t) e^{u(t)}\, dt, \quad (۹)$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x,t) \sin(u(t))\, dt, \quad (۱۰)$$

در این مثال‌ها در مقایسه با معادله (۱) به جای $u(t)$ به ترتیب $u^2(t)$ و $e^{u(t)}$ و $\sin\big(u(t)\big)$ آورده شده است.

نتیجه۵ « خاصیت همگن بودن »

اگر در معادله انتگرال فردهلم نوع دوم (٤) و معادله انتگرال ولترا نوع دوم (۷) شرط $f(x) = 0$ برقرار باشد. آن‌گاه معادله مورد نظر را یک معادله انتگرال همگن می‌گویند. در غیر این صورت معادله مورد نظر را یک معادله انتگرال غیر همگن می‌گویند.

نتیجه۶ « رفتار تکین معادله انتگرال »

یک معادله انتگرال را منفرد (تکین) می‌نامند اگر انتگرال‌گیری ناسره (مجازی) باشد. این معمولاً زمانی رخ می‌دهد که فاصله انتگرال‌گیری نامتناهی باشد یا این‌که هسته معادله در یک یا تعداد بیشتری نقطه از حوزه مورد نظر یعنی $a \leq t \leq b$ بی‌کران باشد.

دو دسته دیگر از معادلات مهم که به هر دو دسته از معادلات انتگرال ولترا و فردهلم مربوط می‌شوند، معادلات انتگرال- دیفرانسیل فردهلم و ولترا می باشند که اکنون به معرفی آنها می‌پردازیم.

۱-۲-۳ معادلات انتگرال – دیفرانسیل

ولترا در اوایل۱۹۰۰درحال مطالعه موضوع رشد جمعیت بود که با معادلات انتگرال- دیفرانسیل مواجه شد. در این گونه معادلات تابع مجهول$u(x)$ وحداقل یکی از مشتق‌هایش نظیر$u'(x)$ ، $u''(x)$ و ... در خارج و همچنین زیر علامت انتگرال قرار دارند.

تعدادی از پدیده‌ها در فیزیک و بیولوژی در قالب این نوع معادلات انتگرل- دیفرانسیل ظاهر می‌شوند. البته این گونه معادلات در هنگام تبدیل یک معادله دیفرانسیل به یک معادله انتگرال هم نمایان می‌گردند. نمونه‌هایی از معادلات انتگرال- دیفرانسیل آورده شده است.

$$u''(x) = -x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad u(0) = 0 \text{ و } u'(0) = 1 \qquad (۱۱)$$

$$u'(x) = -\sin x - 1 - \int_0^x u(t)dt, \qquad u(0) = 1 \tag{۱۲}$$

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xtu(t)dt, \qquad u(0) = 1 \tag{۱۳}$$

معادلات (۱۱) و (۱۲) را معادلات انتگرال– دیفرانسیل ولترا و معادله (۱۳) را معادله انتگرال– دیفرانسیل فردهلم می‌نامند. این تقسیم‌بندی بر اساس حدود انتگرال‌گیری انجام شده است. معادلات بالا معادلات انتگرال- دیفرانسیل خطی نام دارند، این بدان دلیل است که تابع مجهول یعنی $u(x)$ و مشتق‌های آن به طور خطی حضور پیدا کرده‌اند.

در غیر این صورت معادله انتگرال- دیفرانسیل غیر خطی نامیده می‌شود. معادلات انتگرال- دیفرانسیل غیرخطی در بسیاری از مسائل علوم و مهندسی به کار برده می‌شوند.

مثال۱: نوع معادله زیر را مشخص کنید.

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x^3 + \int_0^x tu(t)dt, \quad u(0) = 0 \tag{١٤}$$

به سادگی دیده می‌شود که معادله (١٤) عملگرهای انتگرال و دیفرانسیل را دارد و باید توجه کرد که حد بالای انتگرال یک متغیر است پس معادله (١٤)یک معادله انتگرال- دیفرانسیل ولترا می‌باشد. به علاوه معادله خطی است زیرا $u(x)$ و $u'(x)$ به طور خطی در معادله ظاهر شده‌اند.

۱-۲-۴ معادلات انتگرال منفرد

معادله انتگرال از نوع اول

$$f(x) = \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt, \tag{۱۵}$$

یا از نوع دوم

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)dt, \qquad (١٦)$$

را که در آنها حد پائین، حد بالا یا هر دو حدود انتگرالگیری نامتناهی باشند معادله انتگرال منفرد می- نامند. به علاوه اگر هسته معادالات انتگرال (١٥) و (١٦) در یک نقطه یا در نقاط بیشتری از دامنه انتگرال‌گیری نامتنـاهی باشد باز هم این‌گونه معادلات را معادلات انتگـرال منفرد می‌نامند. در زیر چنـد مثال از معـادلات انتگرال منفرد آورده شده است که علت منفرد نامیده شدن آنها نامتناهی بودن حوزه انتگرال‌گیری مربوطه می‌باشد.

$$u(x) = 2x + 6\int_0^{\infty} \sin(x-t)u(t)dt, \qquad (١٧)$$

$$u(x) = x + (\tfrac{1}{3})\int_{-\infty}^{0} cos(x-t)u(t)dt, \qquad (١٨)$$

$$u(t) = 1 + x^2 + (\tfrac{1}{6})\int_{-\infty}^{+\infty} (x+t)u(t)dt, \qquad (١٩)$$

در زیر چند مثال از معادلات انتگرال منفرد ارائه شده است. در این مثال‌ها هسته$k(x,t)$ در اثنائی که $x \longrightarrow t$ نامتناهی می‌شود لذا معادلات انتگرال مربوطه را منفرد می‌نامند.

$$x^2 = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt, \qquad (٢٠)$$

$$x = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha}} \ u(t)dt, \quad 0 < \alpha < 1, \qquad (٢١)$$

$$u(x) = 1 - 2\sqrt{x} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} u(t)dt, \qquad (٢٢)$$

به این نکته مهم باید توجه کرد که معادلات انتگرال شبیه (٢٠) و (٢١) را به ترتیب مسئله آبل و معادله انتگرال تعمیم یافته آبل می‌نامند. این معادلات انتگرال منفرد ابتدا توسط یک ریاضی‌دان نروژی نیلز آبل در سال ١٨٢٣مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. معادلات انتگرال منفرد مشابه معادله (٢٢) را معادله