وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه هرمزگان

دانشکده علوم پایه

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی

عنوان پایان نامه:

$BL-$جبرهای (نیم) توپولوژیکی

استاد راهنما:

دکتر مسعود هاوشکی

نگارش:

رقیه سالاری

خرداد ماه ۱۳۹۲


بسم الله الرحمن الرحیم

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی ثمری لحظه ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آن چنان که تو دوست می داری.

تو می دانی و همه می دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت زندگی من است، از شادی توست که من در دل می خندم،از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته ام می درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه هایم احساس می کنم. نمی توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله های ضعیف و افتاده، پنهان کرده ام دریاب، دریاب.

تومی دانی و همه می دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از بر انگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

چه جهل مقدسی، آن گاه که انسان بعد از سال ها رنج و تکاپو می فهمد که هنوز هیچ نمی فهمد

و چه جهل نامقدسی وقتی خداوند در متن آگاهی هایت نباشد...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی

سپاس گزاری ...

خدا هر کجا گنجی آرد پدید   ز نام خدا سازد آن را کلید

نهان و آشکارا، درون و برون   خرد را به درگاه او رهنمون [2]

سپاس خداوندگار حکیم را، که با لطف بي کران خود، آدمی را زیور عقل آراست و همت را بدرقه راهش نمود، تا بیاموزد و چراغ دانایی را بیافروزد.
تقدیر و سپاس همسری مهربان را که حامی من شدند تا در محضراساتیدی بزرگوار هم کلاس با دوستانی شوم که تا ابد خاطرشان در دلم باقی بماند.
استاد ارجمندم جناب آقای دکتر مسعود هاوشکی را که استاد راهنمای من در این پایان نامه بودند، صمیمانه تشکر و قدردانی می کنم، که قطعاً بدون حمایت های ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.
از دیگر اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر سبزواری، جناب آقای دکتر احمدی و جناب آقای دکتر مقدری که در محضرشان کسب علم و تجربه کردم تشکر فراوان دارم.
در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، همسر و فرزند مهربان و پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجودشان را وتشکر می کنم از خانواده عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان، که پشتیبان من بودند.

و در آخر، با تشکر از تمام کسانی که یادشان هست و نامشان نیست.

[2] از اقبال نامه نظامی

چکیده

در این پایان‌نامه BL−جبرهای نیم‌توپولوژیکی و توپولوژیکی را تعریف می‌کنیم و شرایطی را بدست می‌آوریم که یک BL−جبر توپولوژیکی به یک BL−جبر نیم‌توپولوژیکی تبدیل شود. همچنین یک مجموعه از فیلترها را در BL−جبر A در نظر می‌گیریم و از مفهوم رابطه همنهشتی نسبت به فیلترها، برای ساختن یک یکنواختی که یک توپولوژی را روی A القا می‌کند استفاده می‌کنیم. خواص این توپولوژی را با در نظر گرفتن فیلترهای مختلف مطالعه می‌کنیم.

کلمات کلیدی BL−جبر، جبر MV، فیلتر، BL−جبر توپولوژیکی، BL−جبر توپولوژیکی(چپ) راست، BL−جبر نیم‌توپولوژیکی، BL−جبر هاسدورف، ساختار یکنواختی.

فهرست مطالب

فهرست نمادها

$\wedge$	و
$\vee$	یا
$\odot$	ضرب
$\rightarrow$	استلزام
$\cup$	اجتماع
$\cap$	اشتراک
$\{\ \}$	مجموعه
υ	توپولوژی
$\Leftrightarrow$	اگر و تنها اگر
$\Longrightarrow$	نتیجه می‌دهد
$[\ ]$	کلاس هم‌ارزی
$\langle\ \rangle$	فیلتر تولید شده
$\equiv_F$	همنهشتی به پیمانه F
$\mathcal{F}(A)$	گردایه همه فیلترهای A
υ_x	مجموعه همه‌ی همسایگی‌های x

مقدمه

جبر و توپولوژی، دو مقوله اساسی از ریاضیات هستند، که نقش مکمل یکدیگر را دارند. توپولوژی، پیوستگی و همگرایی را مطالعه می‌کند و یک چارچوبی را برای مفهومی از حد ارائه می‌دهد. بخش عمده‌ای از توپولوژی، به مجموعه‌های نامحدود و بی‌نهایت اختصاص داده شده است.

جبر، تمام انواع عملگرها را مورد مطالعه قرار می‌دهد و پایه‌ای برای الگوریتم‌ها و محاسبات فراهم می‌کند.

از آنجایی که جبر و توپولوژی، طبیعتا با یکدیگر متفاوت هستند، اما در مقوله‌های بالاتر ریاضیات، از جمله سیستم‌های دینامیکی، آنالیز تابعی و ... توپولوژی و جبر، به طور طبیعی در تماس با یکدیگرند. از موضوعات مهم ریاضیات، نشان دادن ترکیبی از جبر و ساختارهای توپولوژیک است. فضاهای توپولوژیکی تابعی، فضاهای توپولوژیکی خطی و بطور کلی گروه‌های توپولوژیکی و مشبکه‌های توپولوژیکی موضوعاتی از این قبیل هستند.

هایک[۳] در سال ۱۹۹۸، $BL-$جبرها[۴] را، با هدف تحلیل و بررسی خواص منطق پایه مطرح نمود. از آن زمان، این جبرها نظر محققین بسیاری را به خود معطوف ساخته و مبنای تحقیقات وسیعی گشته است.

در فصل آغازین، به مفاهیم مقدماتی و تعاریف پیش‌نیاز فصل‌های آتی می‌پردازیم. نخست جبرها و تعدادی از انواع مشبکه‌ها را معرفی می‌کنیم . سپس $BL-$جبرها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. هم چنین، پس از ارائه تعریف فیلتر و سیستم استنتاجی در $BL-$جبرها، نشان خواهیم داد که این دو مفهوم با یکدیگر معادل‌اند. علاوه بر این، به بررسی برخی از انواع مختلف فیلترها، نظیر فیلتر اول، فیلتر ماکسیمال و نیز فیلتر بول خواهیم پرداخت. در خاتمه، فضاهای توپولوژیک و اصول جدا سازی

[3] Hajek
[4] Basic Logic Algebras

روی فضاهای توپولوژیک را ارائه کرده همچنین به تعاریف BL−جبر توپولوژیکی و نیم‌توپولوژیکی می‌پردازیم.

در فصل دوم برخی از قضیه های BL−جبرهای نیم‌توپولوژیکی و توپولوژیکی را بیان و اثبات خواهیم کرد. خواهیم دید که، یک BL−جبر توپولوژیکی، یک BL−جبر نیم‌توپولوژیکی است. اما عکس آن درست نیست. ما شرایطی را که یک BL −جبر نیم‌توپولوژیکی، به یک BL −جبر توپولوژیکی تبدیل شود را شناسایی خواهیم کرد. در ادامه فصل، به بررسی رابطه بین فضای T_i[5] و BL−جبرهای توپولوژیکی می‌پردازیم و شرایطی را بدست می‌آوریم که یک فضای T_1 با فضای هاسدورف در BL−جبرهای توپولوژیکی با یکدیگر معادل شود.

در فصل آخر، یک مجموعه از فیلترها را در BL−جبر A در نظر می‌گیریم و از مفهوم رابطه همنهشتی نسبت به فیلترها، برای ساختن یک یکنواختی که یک توپولوژی را روی A القا می‌کند استفاده می‌کنیم. و خواص این توپولوژی را با در نظر گرفتن فیلترهای مختلف مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

---

[5] $T_i = T_0 , T_1 , T_2 , T_3 , T_4$

فصل اول

مقدمات و پیش‌نیازها

چکیده فصل در این فصل، به مفاهیم مقدماتی و تعاریف پیش‌نیاز فصل‌های آتی می‌پردازیم. نخست جبرها و تعدادی از انواع مشبکه‌ها را معرفی می‌کنیم . سپس BL–جبرها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. هم‌چنین، پس از ارائه تعریف فیلتر و سیستم استنتاجی در BL–جبرها نشان خواهیم داد که این دو مفهوم با یکدیگر معادل‌اند. علاوه بر این، به بررسی برخی از انواع مختلف فیلترها، نظیر فیلتر اول، فیلتر ماکسیمال و نیز فیلتر بول خواهیم پرداخت. در خاتمه، فضاهای توپولوژیک و اصول جداسازی روی فضاهای توپولوژیک را ارائه کرده و به تعاریف BL–جبر توپولوژیکی و نیم‌توپولوژیکی می‌پردازیم.

۱-۱. جبرها

تعریف ۱-۱.۱[۴] برای مجموعه‌ی ناتهی A و عدد صحیح نامنفی n تعریف می‌کنیم $A^0 = \{\emptyset\}$ و برای $n > 0$ ، $A^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A^n , 1 \le \mathrm{i} \le n\}$ (حاصل ضرب دکارتی A ، n بار).

تعریف ۱-۲.۱[۴] یک عملگر n تایی روی مجموعه‌ی ناتهی A ، تابعی مانند f است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$f : A \times A \times \dots \times A \mapsto A$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

که n ، مرتبه‌ی f است.

اگر $n = 0$ باشد، f یک عملگر صفرتایی (عنصر ثابت) است.

اگر $n = 1$ باشد، f یک عملگر یکتایی است.

اگر $n = 2$ باشد، f یک عملگر دوتایی است.

تعریف ۱-۱.۳[۴] یک جبر $\mathcal{A}$ ، زوج مرتب $\mathcal{A} = (A, \{f_n\}_{n\geq 0})$ است، که A یک مجموعه‌ی ناتهی می‌باشد و مجموعه زمینه جبر نامیده می‌شود و f_{n} ها عملگرهای n تایی روی A هستند، که زبان جبر A نیز گفته می‌شود و آن‌ها را با F نمایش می‌دهیم.

مثال ۱-۱.۴ حلقه‌ی $(R\ ,.,*)$ یک جبر با دو عملگر دوتایی · و * است.

تعریف ۱-۱.۵[۴] مجموعه ناتهی A با عملگر دوتایی * و عملگر صفرتایی 1 را یک منوئید گوییم،

اگر برای هر $x, y, z \in A$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. $x * (y * z) = (x * y) * z$ (خاصیت شرکت‌پذیری)،

۲. $x * 1 = 1 * x = x$ (خاصیت عنصر همانی).

و آن را یک منوئید جابه‌جایی گوییم، هرگاه شرط زیر نیز برقرار باشد.

۳. $x * y = y * x$ (خاصیت جابه‌جایی).

مثال ۱-۱.۶ مجموعه اعداد طبیعی با ضرب معمولی اعداد و عنصر همانی ۱، یک منوئید جابه‌جایی است.

۱-۲. مشبکه‌ها

تعریف ۱-۲.۱[۴] مجموعه ناتهی L با دو عملگر دوتایی ∨ و ∧ را یک مشبکه[6] گوییم، هرگاه برای هر $x, y, z \in L$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. $x \vee y = y \vee x$ و $x \wedge y = y \wedge x$ (خاصیت جابه‌جایی)،

۲. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ و $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$ (خاصیت شرکت‌پذیری)،

۳. $x \vee x = x$ و $x \wedge x = x$ (خاصیت خودتوانی)،

[6] Lattice

۴. $x \wedge (x \vee y) = x$ و $x \vee (x \wedge y) = x$ (خاصیت جذبی).

مثال۱-۲.۲ فرض کنید L مجموعه اعداد طبیعی و ۷ کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد و ۸ بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد باشد. آن‌گاه $(L,\vee,\wedge)$ یک مشبکه است.

تعریف ۱-۳.۲[۴] رابطه‌ی $\leq$ روی مجموعه A را، یک رابطه ترتیب جزئی گوییم، هرگاه برای هر $x, y, z \in A$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. $x \leq x$ (خاصیت بازتابی)،
۲. اگر $x \leq y$ و $y \leq x$ باشد، آن‌گاه $x = y$ (خاصیت پاد تقارنی)،
۳. اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ باشد، آن‌گاه $x \leq z$ (خاصیت تعدی).

در این صورت، مجموعه A با رابطه ترتیب جزئی روی آن را، یک مجموعه جزئاً مرتب می‌گوییم.

مثال ۱-۴.۲ فرض کنید X مجموعه‌ی ناتهی باشد. آن‌گاه $P(X)$ (مجموعه‌ی توانی X) با رابطه شمول $\subseteq$، یک مجموعه جزئاً مرتب است.

تعریف ۱-۵.۲[۴] رابطه‌ی $\leq$ روی مجموعه A را، یک رابطه ترتیب کلی گوییم، هرگاه برای هر $x, y, z \in A$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. رابطه‌ی $\leq$ یک رابطه ترتیب جزئی روی A باشد،
۲. برای هر $x, y \in A$، $x \leq y$ یا $y \leq x$.

در این صورت مجموعه‌ی A با رابطه‌ی ترتیب کلی $\leq$ روی آن را، یک مجموعه‌ی کلا مرتب یا زنجیر می‌گوییم.

مثال ۱-۶.۲ مجموعه اعداد حقیقی با رابطه معمولی $\leq$ ، یک مجموعه کلا مرتب است.

تعریف ۱-۷.۲[۴] فرض کنید A زیر مجموعه‌ای از مجموعه جزئاً مرتب $P(X)$ باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم

۱. عنصر $u \in P$ ، کران بالای A است، اگر و تنها اگر برای هر $a \in A$ ، $a \leq u$ باشد.

۲. عنصر $u_0 \in P$ ، کوچک‌ترین کران بالای A است، اگر و تنها اگر u_0 کران بالای A باشد و برای هر کران بالای A مانند u ، $u_0 \leq u$.

و کوچک‌ترین کران بالای A را به صورت $sup\ A = u_0$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱-۸.۲[۴] فرض کنید A زیر مجموعه‌ای از مجموعه جزئاً مرتب $P(X)$ باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم:

۱. عنصر $v \leq P$ ، کران پایین A است اگر و تنها اگر برای هر $a \in A$ ، $v \leq a$ باشد.
۲. عنصر $v_0 \in P$ ، بزرگ‌ترین کران پایین A است اگر و تنها اگر v_0 کران پایین A باشد و برای هر کران پایین A مانند $v \leq v_0$.

و بزرگ‌ترین کران پایین A را به صورت $inf\ A = v_0$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱-۹.۲ فرض کنید A زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی جزئاً مرتب $P(X)$ در مثال ۱-۴.۲ باشد، آن‌گاه $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$، کوچک‌ترین کران بالای A و $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$ بزرگ‌ترین کران پایین A است.

تعریف ۱-۱۰.۲[۴] مجموعه جزئاً مرتب L یک مشبکه است اگر و تنها اگر برای هر دو عنصر از L ، کوچک‌ترین کران بالای آن دو عنصر و بزرگ‌ترین کران پایین آن دو عنصر در L وجود داشته باشند.

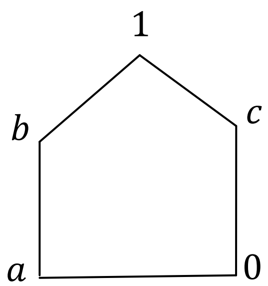
قضیه ۱-۱۱.۲[۴] تعریف ۱-۱.۲ و تعریف ۱-۱۰.۲ با یکدیگر معادل‌اند.

تعریف ۱-۱۲.۲[۴] مشبکه‌ی $(L,\vee,\wedge)$ را یک مشبکه‌ی توزیع‌پذیر گوییم، هرگاه برای هر $x,y,z \in L$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ ،
۲. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

قضیه ۱-۱۳.۲[۴] شرایط (۱) و (۲) در تعریف قبل با یکدیگر معادل‌اند.

مثال ۱-۱۴.۲ فرض کنید $L = \{0, a, b, c, 1\}$ یک مشبکه به شکل دیاگرام هاس[۷] زیر باشد، که عملگرهای $\vee$ و $\wedge$ روی آن به صورت زیر تعریف شده‌اند.



$\vee$	0	a	b	c	1
0	0	a	b	c	1
a	a	a	b	1	1
b	b	b	b	1	1
c	c	1	1	c	1
1	1	1	1	1	1

$\wedge$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	0	a
b	0	a	b	0	b
c	0	0	0	c	c
1	0	a	b	c	1

آن گاه L یک مشبکه توزیع پذیر نیست، زیرا $a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$. و از سویی دیگر $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = b \wedge 1 = b$. بنابراین $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \neq a \vee (b \wedge c)$.

تعریف ۱-۱۵.۲[۴] جبر $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ از نوع (۲،۲،۰،۰) را، یک مشبکه کران‌دار گوییم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. $(L, \vee, \wedge)$ یک مشبکه باشد.

۲. برای هر $x \in L$ ، $x \vee 1 = 1$ و $x \wedge 0 = 0$.

مثال ۱-۱۶.۲ فرض کنید L مشبکه‌ی مثال ۱-۱۴.۲ باشد. آن‌گاه L یک مشبکه کران‌دار است، زیرا صفر و یک به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عناصر در L می‌باشند.

[7] Hasse Diagram

۱-۳. BL–جبرها

تعریف۱-۳-۱[۵] جبر $(A,\vee,\wedge,\odot,\to,0,1)$ از نوع (۲و۲و۲و۲و۰و۰) را یک BL–جبر گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. $(A,\vee,\wedge,0,1)$ یک مشبکه کران‌دار باشد،

۲. $(A,\odot,1)$ یک منوئید جابه‌جایی باشد،

۳. $\to$ و $\odot$ یک جفت مجزا باشند، به عبارت دیگر، برای هر $x,y,z\in A$،

$z\le x\to y$ اگر و تنها اگر $z\odot x\le y$ ،

۴. برای هر $x,y\in A$ ، $x\wedge y=x\odot(x\to y)$ ،

۵. برای هر $x,y\in A$ ، $(x\to y)\vee(y\to x)=1$.

مثال ۱-۳-۲ بازه ی حقیقی واحد $I=[0,1]$ را در نظر بگیرید.

۱. در ساختار گودل[8]، عملگرهای $\to$, $\odot$ روی I را، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x\to y=\begin{cases}1 & x\le y\\ y & \text{در غیر این صورت}\end{cases} \qquad \text{و} \qquad x\odot y=\min\{x,y\} ،$$

آن‌گاه $\mathcal{I}=(I,\min,\max,\odot,\to,0,1)$ یک BL–جبر است.

۲. در ساختار ضربی[9]، عملگر $\odot$ روی I ضرب معمولی اعداد حقیقی است و عملگر $\to$ روی I به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$x\to y=\begin{cases}1 & x\le y\\ \frac{y}{x} & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

[8] Godel Structure
[9] Product Structure

آن‌گاه $\mathcal{I} = (I, min, max, \odot, \rightarrow, 0,1)$ یک $BL-$جبر است.

۳. در ساختار لوکاسویچ ، عملگرهای $\rightarrow$, $\odot$ روی I به صورت زیر می‌باشند:

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1 & x \leq y \\ 1 - x + y & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{و} \quad x \odot y = max\{0, x + y - 1\}.$$

آن‌گاه $\mathcal{I} = (I, min, max, \odot, \rightarrow, 0,1)$ یک $BL-$جبر می باشد.

تعریف ۱-۳.۳[۵] اگر A یک $BL-$جبر باشد، آن‌گاه متمم $x \in A$ را که با x' نمایش داده می‌شود، به صورت $x' = x \rightarrow 0$ تعریف می‌کنیم و نیز $(x')'$ را، به صورت $(x')' = x''$ نمایش می‌دهیم و برای هر $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم $x^n = x \odot x \odot \dots \odot x$.

همچنین نگاشت مثبت $C : A \longmapsto A$ را با ضابطه $C(x) = x'$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱-۴.۳[۵] فرض کنید A یک $BL-$جبر باشد. مرتبه عنصر $x \in A$ که با $ord(x)$ نمایش داده می شود، عبارت است از کوچک‌ترین عدد $n \in \mathbb{N}$ به گونه‌ای که $x^n = 0$. اگر چنین عدد طبیعی موجود نباشد، گوییم x یک عنصر از مرتبه نامتناهی است و آن را به صورت $ord(x) = \infty$ نمایش می‌دهیم.

لم ۱-۵.۳[۱] اگر A یک $BL-$جبر باشد، آن‌گاه برای هر $x, y, z \in A$ روابط زیر برقرار است:

۱. $x \odot y \leq x, y$ و $x \odot 0 = 0$ ،
۲. اگر $x \leq y$ ، آن‌گاه $x \odot z \leq y \odot z$ ،
۳. اگر $x \leq y$ ، آن‌گاه $x \rightarrow y = 1$ ،
۴. $x \rightarrow 1 = 1$ و $x \rightarrow x = 1$ و $1 \rightarrow x = x$ و $1 \odot x = x$ ،
۵. $y \leq x \rightarrow y$ ،
۶. $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \odot y) \rightarrow z = y \rightarrow (x \rightarrow z)$ ،

۷. $0 = 1'$ و $1 = 0'$،
۸. $1 = x'$ اگر و فقط اگر $x = 0$،
۹. $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ و $(x \vee y)' = x' \wedge y'$،
۱۰. $(x \wedge y)'' = x'' \wedge y''$ و $(x \vee y)'' = x'' \vee y''$،
۱۱. $(x \odot y)'' = x'' \odot y''$ و $(x \rightarrow y)'' = x'' \rightarrow y''$،
۱۲. $x \rightarrow y' = y \rightarrow x' = (x \odot y)' = x'' \rightarrow y'$،
۱۳. $x \vee y = \big((x \rightarrow y) \rightarrow y\big) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow x)$،
۱۴. $x''' = x'$،
۱۵. $\big((x \rightarrow y) \rightarrow y\big) \rightarrow y = x \rightarrow y$.

توجه ۱-۶.۳[۳] فرض کنید A یک BL−جبر باشد و $B \subseteq A$ برای هر $a \in A$ تعریف می‌کنیم:

$$B \odot a = \{x \odot a : x \in B\}\text{،}$$

$$a \odot B = \{a \odot x : x \in B\}\text{،}$$

$$B \rightarrow a = \{x \rightarrow a : x \in B\}\text{،}$$

$$a \rightarrow B = \{a \rightarrow x : x \in B\}.$$

تعریف ۱-۷.۳[۵] فرض کنید A یک BL−جبر باشد. در این صورت A را یک جبر MV[۱۰] گوییم، هرگاه برای هر $x \in A$، $x'' = x$.

مثال ۱-۸.۳ فرض کنید $B = \{0, a, b, 1\}$ یک BL−جبر باشد، که عملگرهای $\rightarrow$ و $\odot$ روی B به صورت زیر تعریف شده‌اند.

[10] MV-algebra

$\odot$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	b	a
b	0	b	0	b
1	0	a	b	1

$\rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	0	1	b	1
b	b	1	1	1
1	0	a	b	1

آن‌گاه B یک جبر MV است، زیرا $0'' = 0$ و $a'' = a$ و $b'' = b$ و $1'' = 1$.

تعریف ۱-۹.۳[۵] عضو x از یک $BL-$جبر A یک مقسوم علیه صفر نامیده می‌شود، اگر یک عضو $0 \neq y \in A$ وجود داشته باشد به طوری‌که $x * y = 0$.

تعریف ۱-۱۰.۳[۵] یک رابطه همنشتی روی یک $BL-$جبر A یک رابطه هم ارزی R روی A است اگر xRy و uRv ؛ آن‌گاه داشته باشیم:

۱. $(x * u)R(y * v)$،
۲. $(x \rightarrow u)R(y \rightarrow v)$،
۳. $(x \wedge u)R(y \wedge v)$،
۴. $(x \vee u)R(y \vee v)$.

۱-۴. فیلترها

تعریف ۱-۱.۴[۵] فرض کنید A یک $BL-$جبر باشد، در این صورت، به زیر مجموعه‌ی ناتهی F از A یک فیلتر[11] گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in A$ در شرایط زیر صدق کند:

[11] Filter

۱. برای هر $x, y \in F$ ، $x \odot y \in F$ ،
۲. اگر $x \in F$ و $x \leq y$ ، آن‌گاه $y \in F$.

مثال ۱-۲.۴ فرض کنید A یک BL−جبر باشد. آن‌گاه A و $\{1\}$ فیلترهای بدیهی هستند.

مثال ۱-۳.۴ فرض کنید $B = \{0, a, b, 1\}$ یک BL−جبر باشد، که عملگرهای $\rightarrow$ و $\odot$ روی B به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$\odot$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	b	a
b	0	b	0	b
1	0	a	b	1

$\rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	0	1	b	1
b	b	1	1	1
1	0	a	b	1

آن‌گاه $F = \{a, 1\}$ یک فیلتر از B است.

تعریف ۱-۴.۴[۵] فرض کنید A یک BL−جبر باشد. در این صورت به زیر مجموعه‌ی ناتهی D از A، یک سیستم استنتاجی[۱۲] گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in A$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. $1 \in D$،
۲. اگر $x \in D$ و $x \rightarrow y \in D$، آن‌گاه $y \in D$.

گزاره ۱-۵.۴[۱] فرض کنید A یک BL−جبر و F یک زیر مجموعه از A باشد، آن‌گاه:

۱. F یک فیلتر است اگر و فقط اگر F یک سیستم استنتاجی باشد.
۲. اگر F یک فیلتر روی A باشد، آن‌گاه برای هر $x, y \in F$ ، $x \vee y$ و $x \rightarrow y$ در F هستند.

برهان (۲) فرض کنید F یک فیلتر روی A و $x, y \in F$ ، با توجه به تعریف ۱-۱.۴(۱) $x \odot y \in F$ و از آنجایی که $x \odot y \leq x \wedge y$ و F یک فیلتر است. پس بنا به تعریف ۱-۱.۴(۲) $x \wedge y \in F$.

[12] Deductive system