بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه کردستان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

عنوان:

گراف‌های پوسته‌پذیر و گراف‌های دوبخشی دنباله‌ای کوهن-مکاولی

پژوهشگر:

فاطمه خوش‌رفتار

استاد راهنما:

دکترعلی سلیمان جهان

استاد مشاور:

دکتر سیامک یاسمی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش جبر

دی ماه ۱۳۹۰

تعهد نامه

اینجانب فاطمه خوش‌رفتار دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش جبر دانشگاه کردستان، دانشکده علوم گروه ریاضی تعهد می نمایم که محتوای این پایان نامه نتیجه تلاش و تحقیقات خود بوده و از جایی کپی برداری نشده و به پایان رسانیدن آن نتیجه تلاش و مطالعات مستمر اینجانب و راهنمایی و مشاوره اساتید بوده است.

با تقدیم احترام

فاطمه خوش‌رفتار

۱۳۹۰/۱۰/۲۸

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و

پرفروغ‌ترین ستاره‌ی قلبم

همسرم

تشکر و قدردانی

سپاس خدایی را که نور وجودش را در قلبم جاری نمود تا چراغ روشن مسیرم شود.

مراتب سپاس خود را تقدیم میکنم به استاد راهنمای اینجانب جناب آقای دکتر علی سلیمان جهان که در راه نگارش این پایان نامه مرا یاری نمودند. همچنین لازم میدانم که تشکر کنم از استاد مشاور اینجانب جناب آقای دکتر سیامک یاسمی به خاطر راهنمایی‌های ارزشمندی که در طی این مدت به بنده فرمودند.

در انتها نیز تشکر میکنم از دوستان عزیزم خانمها نسیم قادریان، عصمت خلوتی، مونا خلقی، فریبا فلاحی و شهین فتحی که دلسوزانه با من همراه بودند.

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

مطالعه‌ی گراف‌های پوسته‌پذیر و گراف‌های دوبخشی دنباله‌ای کوهن-مکاولی

پژوهشگر:
فاطمه خوش‌رفتار

استاد راهنما:
دکتر علی سلیمان جهان

استاد مشاور:
دکتر سیامک یاسمی

۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه، گراف‌های پوسته‌پذیر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و آنها را دسته‌بندی می‌کنیم. به هر گراف ساده‌ی غیر جهتدار G مجتمع سادکی $\triangle_G$ را نسبت می‌دهیم که وجه‌واره‌های آن، مجموعه‌های مستقل از G می‌باشند. می‌گوییم G پوسته‌پذیر است هر گاه $\triangle_G$ مجتمع سادکی پوسته‌پذیر باشد. در اینجا منظور از پوسته‌پذیری یک مجتمع سادکی، پوسته‌پذیری نامحض می‌باشد که منطبق بر تعریف بی‌ژورنر و واخس می‌باشد. نشان خواهیم داد که همه‌ی گراف‌های وتری، پوسته‌پذیر هستند. بعلاوه، همه‌ی گراف‌های دوبخشی پوسته‌پذیر را دسته‌بندی می‌کنیم، که دقیقا همان گراف‌های دوبخشی دنباله‌ای کوهن-مکاولی می‌باشند. همچنین یک روش بازگشتی برای تشخیص پوسته‌پذیری گراف‌های دوبخشی ارائه می‌دهیم و آن را به گراف‌های دنباله‌ای کوهن-مکاولی نیز تعمیم می‌دهیم. سرانجام، مفهوم پوسته‌پذیری را به خانواده‌ای خاص از ابرگراف‌ها، به نام پادزنجیرها توسیع می‌دهیم. از این طریق اثباتی جدید برای یکی از نتایج فریدی در مورد دنباله‌ای کوهن-مکاولی بودن جنگل‌های سادکی ارائه می‌دهیم.

واژگان کلیدی: مجتمع پوسته‌پذیر، دنباله‌ای کوهن-مکاولی، ایده‌آل یالی، گراف‌های وتری و دوبخشی، پادزنجیر کلا متوازن.

فهرست مطالب

پیشگفتار

فرض کنید G یک گراف ساده‌ی غیر جهتدار روی مجموعه‌ی رئوس $V_G = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ باشد. با در نظر گرفتن رأس x_i به عنوان متغیری از حلقه‌ی چندجمله‌ای $S = K[x_۱, \ldots, x_n]$ روی میدان K، به گراف G می‌توان یک ایده آل تک‌جمله‌ای بر حسب تک‌جمله‌ای‌های درجه‌ی دوم خالی از مربع به صورت

$$I(G) = (x_i x_j \quad : \quad \{x_i, x_j\} \in E_G)$$

نسبت داد که E_G مجموعه‌ی یال‌های گراف G می‌باشد. ایده‌آل $I(G)$ ایده آل یالی نامیده می‌شود.

با استفاده از تناظر یک به یک استنلی-ریزنر [۱] می‌توانیم به G یک مجتمع سادکی $\triangle_G$ طوری نسبت دهیم که

$$I_{\triangle_G} = I(G).$$

توجه کنید که وجه‌واره‌های $\triangle_G$ مجموعه‌های مستقل از G می‌باشند یعنی F یک وجه‌واره از $\triangle_G$ می‌باشد اگر و فقط اگر هیچ یالی وجود نداشته باشد که دو رأس دلخواه از F را به هم وصل کند. دوگان یک مجموعه‌ی مستقل یک پوشش رأسی است یعنی، یک زیرمجموعه‌ی C از V_G یک پوشش رأسی است اگر و فقط اگر $V_G \setminus C$ یک مجموعه‌ی مستقل از G باشد.

[۱] Stanley-Reisner

گراف G را کوهن-مکاولی [۲] (دنباله‌ای کوهن-مکاولی) می‌نامند اگر $\frac{S}{I(G)}$ کوهن-مکاولی(دنباله‌ای کوهن-مکاولی) باشد.

اخیرا تعدادی از نویسندگان مانند ویلاریال [۳] ،فرانسیسکو [۴] ،هرزگ [۵] ،هیبی [۶] ،ون‌تویل [۷] به بررسی خواص جبری، مانند کوهن-مکاولی(دنباله ای کوهن-مکاولی) بودن گراف‌ها با استفاده از خواص ترکیبیاتی آن‌ها پرداخته‌اند.

در این پایان‌نامه برخی از این کارهای انجام شده را بیان کرده و گراف‌های پوسته‌پذیر را نیز معرفی می‌کنیم.

گراف G را پوسته‌پذیر می‌نامیم اگر مجتمع سادکی $\triangle_G$ پوسته‌پذیر باشد. تعریف ارائه شده از پوسته‌پذیری یک مجتمع سادکی در اینجا، پوسته‌پذیری نامحض می‌باشد که منطبق بر تعریف بی‌ژورنر [۸] و واخس [۹] است.

در فصل دوم به بررسی گراف‌های پوسته‌پذیر و برخی از خواص آنها می‌پردازیم. در ادامه‌ی همین فصل روی پوسته‌پذیری گراف‌های دوبخشی متمرکز می‌شویم و نتیجه می‌گیریم که اگر G یک گراف دوبخشی باشد، G پوسته‌پذیر است اگر و فقط اگر رئوس متصل به هم x و y با $deg(x) = ۱$ وجود داشته باشند بطوریکه گراف‌های دوبخشی $G \setminus (\{y\} \cup N_G(y))$ و $G \setminus (\{x\} \cup N_G(x))$ پوسته‌پذیر باشند. همچنین پوسته‌پذیری گراف‌های وتری را بررسی‌می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که هر گراف وتری، پوسته‌پذیر است. چون پوسته‌پذیری یک مجتمع سادکی، دنباله‌ای کوهن-مکاولی بودن آن را نتیجه می‌دهد بنابراین یک اثبات جدید از نتیجه‌ی

---

[۲] Cohen-Macaulay
[۳] Villarreal
[۴] Francisco
[۵] Herzog
[۶] Hibi
[۷] Van Tuyl
[۸] Björner
[۹] Wachs

فرانسیسکو و ون‌تویل تحت این عنوان که هر گراف وتری، دنباله‌ای کوهن-مکاولی است ارائه می‌شود.

نتیجه‌ی مهمی که در فصل سوم از دسته‌بندی گراف‌های دوبخشی دنباله‌ای کوهن-مکاولی به دست می‌آید این است که اگر G یک گراف دوبخشی باشد پس G دنباله‌ای کوهن-مکاولی است اگر و فقط اگر G پوسته‌پذیر باشد.

بنابراین با توجه به نتایجی که از این دو فصل به دست می‌آید می‌توان در مورد پوسته‌پذیری و دنباله‌ای کوهن-مکاولی بودن هر گراف دوبخشی دلخواه اظهار نظر کرد.

در فصل چهارم، گراف های دوبخشی همبند را با دو بخش $V_۱ = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_g\}$ و $V_۲ = \{y_۱, y_۲, \ldots, y_g\}$ که $\{x_i, y_j\} \in E_G$ برای هر i و $g \geq ۲$ معرفی می‌کنیم.

با پیروی از کارافرو [۱۰] و فرارلو [۱۱] می‌توانیم به گراف G یک گراف جهتدار D نسبت دهیم. این دو نویسنده، دسته‌بندی دیگری از گراف‌های دوبخشی کوهن-مکاولی بر حسب ویژگی‌های D ارائه دادند.

در این فصل نشان می‌دهیم که چطور G با تاثیر از گراف D، دنباله‌ای کوهن-مکاولی می‌باشد. در پایان فصل، بررسی‌های خود را به ایده‌آل یالی از پادزنجیرها (یک نوع ابرگراف) توسیع می‌دهیم و مانند آنچه در گراف‌ها بیان کردیم، می‌گوییم که یک پادزنجیر $\mathcal{C}$ پوسته‌پذیر است اگر مجتمع سادکی نسبت داده شده به ایده آل یالی $I(\mathcal{C})$ پوسته‌پذیر باشد. در ادامه، ویژگی رأس آزاد را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که اگر پادزنجیر دلخواه $\mathcal{C}$ دارای ویژگی رأس آزاد باشد، آنگاه $\mathcal{C}$ پوسته‌پذیر است.

---

[۱۰] Carra Ferro

[۱۱] Ferrarello

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها

فرض می‌کنیم $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای با n متغیر روی میدان K باشد و

$$Z_+^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \in Z^n \quad : \quad a_i \geqslant 0\}.$$

$x^a = x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$ که $a = (a_1, \ldots, a_n) \in Z_+^n$، یک تک‌جمله‌ای نامیده می‌شود و مجموعه‌ی همه‌ی تک‌جمله‌ای‌ها در S با $\mathrm{Mon}(S)$ نمایش داده می‌شود.

اگر $f \in S$ یک چندجمله‌ای دلخواه باشد آنگاه f را می‌توان به صورت ترکیب خطی از تک‌جمله‌ای‌ها به صورت زیر نوشت.

$$f = \sum_{u \in Mon(S)} a_u\, u \quad ; \quad a_u \in K.$$

در اینصورت محمل چندجمله‌ای f را با $Supp(f)$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از

$$Supp(f) = \{u \in Mon(S) \quad : \quad a_u \neq 0\}.$$

همچنین محمل تک‌جمله‌ای u با $Supp(u)$ نمایش داده می‌شود و عبارت است از

$$Supp(u) = \{x_i \ : \ x_i|u \ \}.$$

تعریف ۱.۱.۱. (ایده‌آل تک‌جمله‌ای): ایده‌آل $I \subset S$ را یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای می‌نامیم هر گاه بوسیله‌ی تک‌جمله‌ای‌ها تولید شده باشد.

یادآوری ۲.۱.۱. طبق قضیه‌ی پایه‌ی هیلبرت، $S = K[x_1, \dots, x_n]$ حلقه‌ی نوتری است، لذا هر ایده‌آل در S، متناهی مولد می‌باشد. در نتیجه، هر ایده‌آل تک‌جمله‌ای در S متناهی مولد است.

یعنی اینکه برای ایده‌آل تک‌جمله‌ای I از حلقه‌ی S، تک‌جمله‌ای‌های $u_1, \dots, u_m$ وجود دارند بطوریکه،

$$I = \ < \ u_1, \dots, u_m \ > .$$

گزاره ۳.۱.۱. هر ایده‌آل تک‌جمله‌ای $I \subset S$ یک مجموعه‌ی مولد مینیمال یکتا از تک‌جمله‌ای‌ها دارد که آن را با $G(I)$ نمایش می‌دهند.

اثبات. رجوع شود به [۱۵]، گزاره‌ی ۱.۱.۶.

تعریف ۴.۱.۱. برای ایده‌آل $I \subset S$ ایده‌آل

$$\sqrt{I} = \{f \in S \ | \ \exists k \ ; \ f^k \in I\}$$

را رادیکال I می‌نامیم. I را یک ایده‌آل رادیکال می‌نامیم هر گاه $I = \sqrt{I}$.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم $I, J \subset S$ دو ایده‌آل باشند. مجموعه‌ی

$$I : J = \{\, f \in S \ : \ fg \in I, \quad \forall g \in J\}$$

ایده‌آلی از S است که آن را ایده‌آل دو نقطه از I نسبت به J گوییم.

تعریف ۶.۱.۱ تک‌جمله‌ای $u = x^a \ \in Mon(S)$ را خالی از مربع می‌نامیم هر گاه مولفه‌های a صفر یا یک باشند.

تعریف ۷.۱.۱ ایده‌آل تک‌جمله‌ای $I \subset S$ را خالی از مربع گوییم هر گاه بوسیله‌ی تک‌جمله‌ای‌های خالی از مربع تولید شده باشد.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید I یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای خالی از مربع به صورت زیر باشد.

$$I \ =< \ u_1, \ldots, u_m >,$$

که u_iها تک‌جمله‌ای های خالی از مربع می‌باشند. دوگان الکساندر [1] I را با $I^\vee$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$I^\vee \ = P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_m,$$

بطوریکه P_iها ایده‌آل‌های اولی به صورت $P_i \ = (x_i \quad : \quad x_i \,|u_i \ )$ می‌باشند.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری باشد. ایده‌آل $Q \subset R$ را ایده‌آل اولیه گوییم هر گاه برای هر $a, b \in R$، اگر $ab \in Q$ و $b \notin Q$، آنگاه $a \in \sqrt{Q}$.

[1] Alexander dual

اگر Q یک ایده‌آل اولیه باشد آنگاه $P = \sqrt{Q}$ یک ایده‌آل اول می‌باشد. در اینصورت Q را یک ایده‌آل $P-$ اولیه گوییم.

تعریف ۱۰.۱.۱. در حلقه‌ی $S = K[x_1, \ldots, x_n]$، تک‌جمله‌ای $x_i^{a_i}$ را توان خالص x_i می‌نامند.

تعریف ۱۱.۱.۱. ایده‌آل تک‌جمله‌ای I از $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ را تحویل‌ناپذیر گویند هر گاه نتوان آن را بصورت اشتراک دو ایده‌آل تک‌جمله‌ای بزرگتر از خود نوشت. بعبارت دیگر، ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای J و K از S موجود نباشند بطوریکه $I \subsetneq K$ و $I \subsetneq J$ و $I = J \cap K$، در غیر اینصورت I را تحویل‌پذیر گوییم.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم $I \subset S$ ایده‌آل تک‌جمله‌ای باشد. نمایشی از ایده‌آل I، بصورت $I = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$ که در آن Q_iها ایده‌آل‌هایی از S باشند بطوریکه هیچ Q_i را نتوان حذف کرد، نمایشی کاهش‌ناپذیر از I گوییم.

قضیه ۱۳.۱.۱. فرض کنیم $I \subset S$ ایده‌آل تک‌جمله‌ای باشد در اینصورت $I = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$ که در آن هر Q_i ایده‌آلی است که با توان‌های خالص تولید می‌شود، یعنی، $Q_i = (x_{i1}^{a_{i1}}, \ldots, x_{ik}^{a_{ik}})$. بعلاوه، نمایش کاهش‌ناپذیر I به این فرم، یکتا می‌باشد.

اثبات: رجوع شود به [۱۵]، قضیه‌ی ۱.۳.۱.

مثال ۱۴.۱.۱. فرض کنید

$$I = (x_1^2 x_2,\ x_1^2 x_3^2,\ x_2^2,\ x_2 x_3^2).$$

آنگاه

$$I=(x_1^2,\ x_1^2x_3^2,\ x_2^2,\ x_2x_3^2)\cap(x_2,\ x_1^2x_3^2,\ x_2^2,\ x_2x_3^2)=(x_1^2,\ x_2^2,\ x_2x_3^2)\cap(x_2,\ x_1^2x_3^2)$$

$$=(x_1^2,\ x_2^2,\ x_2)\cap(x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2)\cap(x_2,\ x_1^2)\cap(x_2,\ x_3^2)$$

$$=(x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2)\cap(x_1^2,\ x_2)\cap(x_2,\ x_3^2).$$

نتیجه ۱.۱.۱۵. ایده‌آل تک‌جمله‌ای $I\subset S$ تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر بوسیله‌ی توان‌های خالص تولید شود. بعبارت دیگر، ایده‌آل I تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر $I=(x_{i1}^{a_{i1}},\dots,x_{ik}^{a_{ik}})$.

اثبات: رجوع شود به [۱۵]، نتیجه‌ی ۱.۳.۲.

نتیجه ۱.۱.۱۶. هر ایده‌آل تک‌جمله‌ای، نمایش منحصر به فردی بصورت اشتراک‌هایی از ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای تحویل‌ناپذیر دارد. لذا اگر I یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای خالی از مربع باشد، ایده‌آل‌های ظاهر شده در این اشتراک همگی بفرم $(x_{i1},\dots,x_{ik})$ هستند که این ایده‌آل‌ها همگی ایده‌آل‌های اول می‌باشند.

بدیهی است که این نتیجه، ترکیبی از قضیه ۱.۱.۱۳ و نتیجه ۱.۱.۱۵ می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱۷. در حلقه‌ی دلخواه R فرض کنیم I یک ایده‌آل باشد. $I=\bigcap_{i=1}^{r}Q_i$ را که در آن Q_iها همگی ایده‌آل‌های اولیه می‌باشند را یک تجزیه‌ی اولیه گوییم.

تعریف ۱.۱.۱۸. فرض کنیم $I\subset S$ ایده‌آل تک‌جمله‌ای باشد و $I=\bigcap_{i=1}^{r}Q_i$ که در آن Q_iها ایده‌آل‌های P_i- اولیه هستند، یک تجزیه‌ی اولیه برای I باشد. این تجزیه را یک تجزیه‌ی اولیه‌ی کاهش‌ناپذیر برای I گویند هر گاه نتوان هیچ Q_i را حذف کرد و برای هر $i\neq j$، $P_i\neq P_j$.

قرار می‌دهیم $Ass(I) = \{P_1, \ldots, P_r\}$.

گزاره ۱.۱.۱۹. ایده‌آل تحویل‌ناپذیر $I = (x_{i1}^{a_{i1}}, \ldots, x_{ik}^{a_{ik}})$ یک ایده‌آل $(x_{i1}, \ldots, x_{ik})-$ اولیه است.

اثبات: رجوع شود به [۱۵]، گزاره‌ی ۱.۳.۷.

تذکر ۱.۱.۲۰. فرض کنیم ایده‌آل تک‌جمله‌ای $I \subset S$ دارای تجزیه‌ای به ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای تحویل‌ناپذیر باشد. در اینصورت واضح است که این تجزیه، یک تجزیه‌ی اولیه است ولی ممکن است یک تجزیه‌ی اولیه‌ی کاهش‌ناپذیر از I نباشد.

مثال ۱.۱.۲۱. فرض کنید

$$I = (x_1^3,\ x_2^3,\ x_1^2,\ x_3^2,\ x_1x_2x_3^2,\ x_2^2x_3^2).$$

آنگاه نمایش کاهش‌ناپذیر I بصورت اشتراکی از ایده‌آل‌های تحویل‌ناپذیر بصورت زیر است.

$$I = (x_1^3,\ x_2^3,\ x_3^2) \cap (x_1^2,\ x_2) \cap (x_1,\ x_2^2)$$

که در آن $(x_1,\ x_2^2)$ و $(x_1^2,\ x_2)$ هر دو ایده‌آل‌های $(x_1,\ x_2)-$ اولیه هستند.

بنابراین، این تجزیه، یک تجزیه‌ی اولیه‌ی کاهش‌ناپذیر از I نیست.

توجه می‌کنیم که چون $(x_1,\ x_2^2) \cap (x_1^2,\ x_2) = (x_1^2,\ x_1x_2,\ x_2^2)$ در اینصورت $I = (x_1^3,\ x_2^3,\ x_3^2) \cap (x_1^2,\ x_1x_2,\ x_2^2)$ یک تجزیه‌ی اولیه‌ی کاهش‌ناپذیر از I می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۲۲. فرض کنید I ایده‌آلی سره از حلقه‌ی R باشد. ایده‌آل اول P را یک ایده‌آل مینیمال I می‌گوییم هر گاه $I \subseteq P$ و هیچ ایده‌آل اول دیگری از R که اکید مشمول P است شامل I نباشد.

مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول مینیمال I را با نماد $Min(I)$ نشان می‌دهیم.

تبصره ۲۳.۱.۱. در حلقه‌ی نوتری R برای ایده‌آل $I \subset R$،

$$Min(I) \subset Ass(I).$$

اثبات. قبل از اینکه حکم را ثابت کنیم نشان می‌دهیم اگر P ایده‌آل اولی از حلقه‌ی R باشد که $I \subset P$، آنگاه $P' \in Ass(I)$ موجود است بطوریکه $P' \subset P$.

فرض کنیم $I = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$ یک تجزیه‌ی اولیه‌ی کاهش‌ناپذیر برای I باشد که برای هر $1 \leq i \leq n$، $\sqrt{Q_i} = P_i$. بنابراین $I \subset \sqrt{I} \subseteq P$. در نتیجه، $\bigcap_{i=1}^{r} P_i \subseteq P$.

بنابراین $1 \leq i \leq n$ موجود است بطوریکه $P_i \subseteq P$ و $P_i = P' \in Ass(I)$.

حال فرض کنیم P ایده‌آل اول مینیمال I باشد. در اینصورت $I \subseteq P$، لذا طبق آنچه در قبل نشان دادیم، $P' \in Ass(I)$ موجود است بطوریکه $I \subseteq P' \subset P$ و چون P اول مینیمال I است نتیجه می‌شود که $P' = P$ و لذا حکم برقرار است. $\square$

فرض کنیم S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی R باشد. یعنی

$$1 \in S, \quad \forall x, y \in S \Longrightarrow \quad xy \in S.$$

در اینصورت، رابطه‌ی $\sim$ را روی $R \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\forall \quad (a,s), \quad (b,t); \qquad (a,s) \sim (b,t) \iff \exists s' \in S: \quad s'(at - bs) = 0$$

که به وضوح، $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $R \times S$ است.

برای هر $(x,s) \in R \times S$ دسته‌ی هم‌ارزی (x,s) را با $\frac{x}{s}$ نمایش می‌دهیم. یعنی

$$S^{-1}R = \{\frac{x}{s} \quad : \quad x \in R, \quad 0 \neq s \in S\}.$$

با تعریف اعمال + و . در زیر، $S^{-1}R$ تبدیل به یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار خواهد شد که به آن حلقه‌ی خارج‌قسمتی R نسبت به S گفته می‌شود و صفر این حلقه $\frac{0}{s} = \frac{0}{1} = 0_{S^{-1}R}$ و یک آن $\frac{s}{s} = \frac{1}{1} = 1_{S^{-1}R}$ می‌باشد.

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \frac{xt+ys}{st} \qquad \forall\, x,y \in R, \ s,t \in S,$$

$$\frac{x}{s} \cdot \frac{y}{t} = \frac{xy}{st} \qquad \forall\, x,y \in R, \ s,t \in S.$$

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنیم P ایده‌آل اولی از حلقه‌ی R باشد و $S = R \setminus P$. در اینصورت، $S^{-1}R$ را با R_P نمایش می‌دهیم و آن را موضعی سازی R در P می‌نامیم.

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی دلخواه و $P_0 \subset P_1 \subset \ldots P_{n-1} \subset P_n$ یک زنجیر اکید از ایده‌آل‌های اول R باشد. طول این زنجیر برابر n است.

بعد حلقه‌ی R (بعد کرول) را با $dim\ R$ نشان می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$dim\ R = sup\ \{n \geq 0 \ \ |$ یک زنجیر اکید به طول n از ایده‌آل‌های اول R موجود باشد$\}$

در غیر اینصورت، $dim\ R = -\infty$

قرارداد: اگر $R = 0$، آنگاه $dim\ R = -1$.