دانشگاه گیلان

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه کارشناسی ارشد

موضوع:

تعمیمی از مدولهای نوتری و آرتینی

از:

حسن اختیاری شیرآباد

استاد راهنما:

دکتر حبیب اله انصاری طرقی

دی ۱۳۹۰

تقدیم به :

خانواده صبور و مهربانم

تقدیر و تشکر

پروردگار عالمیان را سپاس که مرا در اقیانوس بیکران ریاضیات غوطه ور ساخت و هر لحظه دریچه جدیدی از ناشناخته های این علم را به رویم گشود و یاریم کرد که پایان نامه ام را به اتمام برسانم. اینک بر خود واجب می دانم که از زحمات و کمکهای بی شائبه خانواده و اساتید محترم خود در طول تحصیل تشکر و قدردانی نمایم.

از کمکهای آقای دکتر حبیب اله انصاری استاد راهنمای ارجمندم که در این راه مرا از راهنماییهای خود بهره مند نمودند، تشکر می کنم. همچنین از آقایان دکتر شهاب الدین ابراهیمی و دکتر منصور هاشمی که داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند، صمیمانه تقدیر و تشکر می کنم.

فهرست و مطالب

چکیده

تعمیمی از مدولهای نوتری و آرتینی
حسن اختیاری شیرآباد

فرض کنید R یک حلقه تعویض پذیر و M یک $R-$ مدول و I ایده آل متناهی مولد از R باشد. در این پایان رساله زنجیرهای صعودی و نزولی خاصی از زیرمدولهای M، یعنی $(accr)$، $(^*accr)$، $(dccr)$ و $(^*dccr)$ را به تفصیل مورد بررسی قرار می دهیم. مطالب مورد مطالعه برگرفته از مقالات [۱۰] ، [۱۹] و [۲۰] است.

کلید واژه ها: مدولهایی روی حلقه های نوتری و آرتینی، شرط زنجیرهای صعودی و نزولی خاصی از زیرمدولها.

Abstrac

A generalization of Noetherian and Artinian modules

Hasan Ekhtiyary Shirabad

Let R be a commutative ring with an identity and let M be an $R-$ module. Further let N be a submodule of M and let I be a finitly generated ideal of R.

In the thesis we study the certain ascending (resp. descending) chain conditions on submodule of M , i.e. $(accr)$, $(accr^*)$, $(dccr)$ and $(dccr^*)$ and consider their various propperties from **[10]** , **[19]** and **[20].**

Keywords: Modules over commutative rings, certain Ascending and descending chain condition of submodules.

مفهوم شرط زنجیر صعودی (ACC) و شرط زنجیر نزولی (DCC) یک مدول روی حلقه های تعویض پذیر، یکی ازمفاهیم مورد توجه ریاضیدانان در سالهای اخیر می باشد. افرادی همچون Chin-Pi Lu ، Kirby ، Heinzer و Taherizadeh در مقالات مختلف سعی نموده اند که از زوایای مختلف به این مفهوم نگاه کنند و در سایه این تلاشها توانسته اند به بسیاری از سوالات مانند صدق کردن شرط زنجیر صعودی روی زیرمدولهای خاص و رابطه مدولهای آرتینی با چند جمله های هیلبرت، شرط (ACC) و رابطه آن با N– ring ها و ایده آلهای خاص پاسخ دهند. یکی از موضوعات مربوط به مدولهای نوتری و آرتینی، بررسی شرط زنجیرهای صعودی و نزولی روی ایده آلهای متناهی مولد و ایده آلهای اصلی است که در این رساله این مدولها را با نماد $(accr)$، $(accr^*)$، $(dccr)$ و $(dccr^*)$ نمایش می دهیم. در کتابها و مقالات مختلف به مفهوم $(accr)$، $(accr^*)$، $(dccr)$ و $(dccr^*)$ یک مدول و ایده آل دلخواه از یک حلقه تعویض پذیر اشاره شده است که از آن جمله می توان مراجع [۵ ، ۷ ، ۱۲ و ۱۷] را نام برد. در سا ل ۱۹۸۸ میلادی Chin-Pi Lu در [۱۰] مفهوم $(accr)$ و $(accr^*)$ یک مدول و ایده آل دلخواه را به دقت مورد بررسی قرار داده و به تفصیل درباره اهمیت نقش این مدولها بحث کرده است که ما در این پایان نامه به مطالعه آنها خواهیم پرداخت. لازم به ذکر است که با گذشت زمان نقش مفهوم شرط زنجیر صعودی و شرط زنجیر نزولی روی ایده آلهای متناهی مولد و ایده آلهای اصلی پر رنگ تر شده و دلیل این ادعا مقالاتی است که در سالهای ۱۹۹۲ و ۲۰۰۲ و ۲۰۰۸ میلادی (ر.ک.[۱۸ و ۱۹ و ۲۰]) منتشر شده و این مفهوم در آنها نقش اساسی داشته است.

در این پایان نامه شرایطی را مطرح می کنیم که تحت آن، شرط های $(accr)$، $(accr^*)$، $(dccr)$ و $(dccr^*)$ با مدولهای نوتری و آرتینی قابل مقایسه است. همچنین مطالبی در مورد رابطه این مدولها و حلقه های لسکریان و N–ring ها را بیان می کنیم. بعلاوه نشان می دهیم که شرط های $(accr)$، $(accr^*)$، $(dccr)$ و $(dccr^*)$ یک مدول دلخواه مانند M با هم معادل هستند. سرانجام ارتباط بین $(accr)$ و $(dccr)$ یک مدول و ایده آل متناهی مولد مورد بررسی قرار می گیرد.

ابتدا در فصل اول برخی از مطالب مورد نیاز برای موضوعات مطرح شده شده در پایان نامه به صورت تعاریف و قضایا آورده می شوند. از آنجا که قضایای بیان شده در این فصل در کتابها و مقالات مختلف اثبات شده اند ما از بیان اثبات آنها خودداری

کرده و برهان آنها را به منابع مربوطه ارجاع می دهیم. در فصل دوم مفهوم $(accr)$ و $(accr^*)$ یک مدول دلخواه را بیان نموده و بعضی از قضایای بنیادی این مدولها را مطرح می کنیم. در فصل سوم خواصی چند از مدولهایی که در شرط $(accr)$ صدق می کنند را معرفی کرده و رابطه آن با حلقه ها و مدولهای لسکریان را بررسی می کنیم. در فصل چهارم علاقمند به بررسی دوگان های $(accr)$ و $(accr^*)$ یعنی $(dccr)$ و $(dccr^*)$ هستیم. به ویژه نشان می دهیم که برای هر $R-$ مدول M، دو شرط $(dccr)$ و $(dccr^*)$ با هم معادل هستند. سرانجام در فصل پنجم، با توجه به تعاریف $(accr)$ و $(dccr)$ از فصل های قبل، ابتدا مدولهای خاص را تعریف نموده و رابطه آن با $(dccr)$ را بررسی می کنیم. همچنین تحت شرایطی رابطه بین $(accr)$ و $(dccr)$ را برای مدولهای متناهی مولد خاص بیان نموده و نشان می دهیم که اگر M مدول متناهی مولد خاص باشد، آنگاه M در هر دو شرط $(accr)$ و $(dccr)$ صدق خواهد کرد. بعلاوه نشان می دهیم که اگر $R-$مدولی مانند M در شرط $(dccr)$ صدق کند، آنگاه

$$Ass(M) \subseteq Supp(M) \subseteq \max(R).$$

در پایان متذکر می شویم که در سراسر پایان نامه حلقه ها تعویض پذیر یکدار هستند.

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه

تعاریف و مفاهیم اولیه

دراین فصل برخی از مطالب مورد نیاز برای موضوعات مطرح شده درپایان نامه به صورت تعاریف و قضایا آورده می شوند.در سراسر این پایان نامه R نمایش یک حلقه تعویض پذیر یکدار و M یک $R-$مدول غیرصفر یکانی می باشد.

نمادگذاری: فرض کنید A,B دو مجموعه دلخواه باشند. منظورما از $A \subseteq B$ ($A \subset B$) این است که A یک زیرمجموعه (زیر مجموعه اکید) از B است. همچنین برای یک مدول دلخواه M، منظورما از $N \leq M$ ($N < M$) این است که N یک زیرمدول (زیرمدول سره) از M است. ازنمادهای $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ به ترتیب برای نمایش مجموعه اعداد طبیعی، اعداد صحیح و اعداد گویا استفاده خواهیم نمود.

(۱-۱) تعریف: فرض کنید R حلقه ای تعویض پذیر باشد. زیر مجموعه I از حلقه R را ایده آل گویند هرگاه

۱) $I \neq \varnothing$.

۲) اگر $a,b \in I$، آنگاه $a+b \in I$.

۳) اگر $a \in I$ و $r \in R$، آنگاه $ra \in I$.

(۱-۲) تعریف: فرض کنید R حلقه ای تعویض پذیر باشد و $x \in R$. در این صورت مجموعه

$$xR = \{xr \mid r \in R\}$$

ایده آل اصلی تولید شده توسط x نامیده می شود. نمادهای دیگر xR عبارت اند از (x) و Rx.

فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. اگر زیرمجموعه متناهی $\{x_1,x_2,...,x_n\}$از M موجود باشد به طوری که $M = Rx_1 + Rx_2 + ... + Rx_n$، دراین صورت گوییم M متناهی مولد است.

(۱-۳) تعریف: ایده آل P از حلقه R را اول گویند هرگاه

۱) $P \neq R$.

۲) اگر $x\,,y \in R$ به قسمی باشند که $xy \in P$، آنگاه $x \in P$ یا $y \in P$.

(۱–٤) تعریف: ایده آل m از حلقه R را ماکسیمال گویند هرگاه

۱) $m \neq R$.

۲) ایده آلی از R مانند I موجود نباشد به قسمی که $m \subset I \subset R$.

(۱–۵) تعریف: برای هر $R-$مدول M و $N \leq M$ تعریف می کنیم

$$Ann(M) = \left((0):_R M\right) = \{r \in R \mid rM = 0_M\}.$$

$$\left(N :_R M\right) = \{r \in R \mid rM \subseteq N\} = Ann\left(M/N\right).$$

(۱–٦) تعریف: فرض کنید R حلقه ای تعویض پذیر باشد و $P \in Spec\left(R\right)$. فرض کنید $S := R \setminus P$. حلقه کسرهای $S^{-1}R$ را با R_P نمایش می دهیم. این حلقه یک حلقه شبه موضعی با ایده آل ماکسیمال

$$\{\lambda \in R_P \mid \lambda = a/s, \ \ a \in P, s \in S\}.$$

است. این حلقه را حلقه حاصل از موضعی سازی R در P می نامند.

(۱–۷) لم (ر.ک.۱۵): فرض کنید N یک زیرمدول از $R-$ مدول M و B ایده آل متناهی مولد از M باشد. در این صورت برای هر ایده آل ماکسیمال m از R داریم $\left(N :_M B\right)_m = \left(N_m :_{M_m} B_m\right)$.

(۱–۸) تعریف: زیرمدول P از $R-$مدول M را اول گویند هرگاه

۱) $P \neq M$.

۲) برای هر $r \in R$ و $m \in M$ که $rm \in P$ داشته باشیم $m \in P$ یا $r \in \left(P : M\right)$.

(۱–۹) قضیه و تعریف (ر.ک.۸): اگر P یک زیرمدول اول M باشد، آنگاه $p = \left(P : M\right)$ یک ایده آل اول R است که در این صورت زیرمدول P را یک زیرمدول $p-$اول می نامیم.

(۱–۱۰) تعریف: مجموعه همه زیرمدولهای اول M را طیف M گویند و آن را با نماد $Spec(M)$ نمایش می دهند. به ویژه، $Spec(R)$ را گردایه شامل همه ایده آلهای اول R می نامند.

(۱–۱۱) تعریف: ایده آل P از حلقه R را اولیه گویند هرگاه

۱) $P \neq R$.

۲) اگر $x, y \in R$ چنان باشند که $xy \in P$، آنگاه $x \in P$ یا یک عدد صحیح مثبت مانند n موجود باشد که $y^n \in P$.

(۱–۱۲) تذکر: روشن است که هرایده آل اول حلقه تعویض پذیر R یک ایده آل اولیه است.

(۱–۱۳) تعریف: فرض کنید M مدولی روی حلقه R باشد. دراین صورت گوییم $r \in R$ مقسوم علیه صفر روی M است، هرگاه $m \in M$ وجود داشته باشد به طوری که $m \neq 0$ و $rm = 0$. عضوی از Rرا که مقسوم علیه صفرروی M نباشد نا مقسوم علیه صفر روی M گوییم. مجموعه همه مقسوم علیه های صفر روی M را با نماد $Zdv\left(M\right)$ نمایش می دهیم.

(۱–۱٤) تعریف: زیرمدول N از M را اولیه گویند هرگاه

۱) $N \neq M$.

۲) برای هر $x \in R$ و $m \in M$ که $xm \in N$، آنگاه $m \in N$ یا $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $x^n M \subseteq N$.

به عبارت دیگر گوییم N یک زیر مدول اولیه M است هر گاه

۱) $M/N \neq 0$.

۲) به ازای هر $x \in Zdv\left(M/N\right) = \{r \in R \mid rm \in N$ که وجود داشته باشد $m \in M \setminus N\}$ یک عدد صحیح مثبت n وجود داشته باشد که $x^n\left(M/N\right) = 0$.

(۱–۱٥) تعریف: ایده آل I از حلقه R را پوچتوان گویند هر گاه $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $I^n = 0$.

(۱–۱٦) تعریف: فرض کنید I ایده آلی ازحلقه تعویض پذیر R باشد. گوییم I تحویل ناپذیر است، اگر I سره باشد و برابر اشتراک دو ایده آل بزرگتر ازخودش نباشد.

لذا I تحویل ناپذیر است، اگر و فقط اگر $I \subset R$ و اگر $I = I_1 \cap I_2$، آنگاه $I = I_1$ یا $I = I_2$.

(۱–۱۷) تعریف: فرض کنید I یک ایده آل دلخواه از حلقه R باشد. رادیکال I درحلقه R را با $rad\left(I\right)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$rad\left(I\right)=\{r\in R \mid r^{n}\in I \text{ وجود داشته باشد که } n\in\mathbb{N}\}.$$

به ویژه، $\sqrt{0}$ را با نماد $Nil(R)$ نشان داده و آن را رادیکال پوچ حلقه R می نامیم. در واقع

$$Nil\left(R\right)=\{r\in R \mid r^{n}=0 \text{ ،}n \text{ به ازای هر عدد طبیعی}\}.$$

(۱–۱۸) تعریف: فرض کنید I ایده آل سره ای ازحلقه تعویض پذیر R باشد. تجزیه اولیه I عبارت است ازاشتراک تعداد متناهی ایده آلهای اولیه R که برابر I باشد. به عبارت دیگر، $I=Q_1\cap Q_2\cap\ldots\cap Q_n$ که درآن به ازای هر $i=1,2,\ldots,n$، $\sqrt{Q_i}=P_i$. در این صورت به ازای هر i، گوییم Q_i ایده آل P_i-اولیه است.

(۱–۱۹) قضیه (ر.ک.١٦): فرض کنید R حلقه ای تعویض پذیر و I ایده آل سره ای از آن باشد. در این صورت

$$\sqrt{I}=\bigcap_{\substack{P\in Spec(R)\\ I\subseteq P}} P.$$

که در آن $Spec(R)$ مجموعه تمام ایده آلهای اول حلقه R است. به ویژه

$$Nil(R)=\bigcap_{P\in Spec(R)} P.$$

(۱–۲۰) تعریف: فرض کنید R یک حلقه باشد. رادیکال جیکبسن R را با $J(R)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$J\left(R\right)=\bigcap_{m\in\max(R)} m.$$

(۱–۲۱) تعریف: فرض کنید $\left(V,\subseteq\right)$ مجموعه ای جزئاً مرتب و ناتهی باشد. دراین صورت گوییم $\left(V,\subseteq\right)$ در شرط زنجیره صعودی صدق می کند اگر و فقط اگر در شرط ماکسیمال صدق کند. به عبارت دیگر، وقتی می گوییم $\left(V,\subseteq\right)$ در شرط زنجیره صعودی صدق می کند، منظور این است که هرگاه $\left(v_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده ای ازعضوهای V باشد که $\ldots\subseteq v_1\subseteq v_2\subseteq\ldots\subseteq v_i\subseteq v_{i+1}\subseteq\ldots$، آنگاه $k\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $i\in\mathbb{N}$ داریم $v_k=v_{k+i}$.

(۱–۲۲) تعریف: فرض کنید M مدولی روی حلقه تعویض پذیر R باشد. دراین صورت گوییم M، $R-$مدولی نوتری (آرتینی) است، هرگاه هر زنجیر صعودی (هر زنجیر نزولی) از زیرمدولهای M مانند $M_1\subseteq M_2\subseteq\ldots$

$(M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots)$ سرانجام ایستا باشد. یعنی عددی طبیعی مانند n موجود باشد به طوری که به ازای هر $i \geq n$ داشته باشیم $M_i = M_n$.

(۱–۲۳) قضیه (ر.ک.۱۶): فرض کنید R یک حلقه نوتری و I ایده آلی از R باشد. فرض کنید M یک $R-$مدول متناهی مولد و $L = \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n M$. در این صورت $L = IL$.

(۱–۲۴) قضیه اشتراک کرول: فرض کنید R یک حلقه نوتری و I ایده آلی از R باشد به طوری که $I \subseteq J(R)$. فرض کنید M یک $R-$مدول با تولید متناهی باشد. دراین صورت

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n M = (0).$$

(۱–۲۵) لم ناکایاما: فرض کنید M یک $R-$مدول متناهی مولد روی حلقه تعویض پذیر R و I ایده آلی از R باشد که $I \subseteq J(R)$. دراین صورت $IM = M$ $(MI = M)$ نتیجه می دهد که $M = 0$.

(۱–۲۶) تعریف: ایده آل اولیه I از حلقه R را " قویاً اولیه " گویند هرگاه I شامل توانی از رادیکالش باشد. یعنی $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $\left(\sqrt{I}\right)^n \subseteq I$.

اکنون به تعاریف مهم این فصل می رسیم که برای ما اهمیت زیادی دارد و آن این است که:

(۱–۲۷) تعریف: حلقه T را " لسکریان" گویند هرگاه هر ایده آل T برابر اشتراک تعداد متناهی ایده آلهای اولیه باشد. همچنین حلقه T را " قویاً لسکریان " گویند هرگاه هرایده آل T برابر اشتراک تعداد متناهی ایده آلهای قویاً اولیه باشد.

(۱–۲۸) تعریف: $R-$مدول M را " لسکریان مدول " گویند هرگاه هر زیرمدول M برابر اشتراک تعداد متناهی زیرمدولهای اولیه باشد. همچنین $R-$مدول M را" قویاً لسکریان " گویند هرگاه هر زیرمدول M برابر اشتراک تعداد متناهی زیرمدولهای قویاً اولیه باشد.

(۱–۲۹) قضیه (ر.ک.۷): فرض کنید M یک لسکریان $R-$مدول و r رادیکال جیکبسن R باشد. دراین صورت

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} r^n M = (0).$$

(۱–۳۰) تعریف: $R-$مدول M را یک $ZD-$مدول گویند هرگاه برای هرزیرمدول N از M، مجموعه

$\{$برای هر $m \in M \setminus N$، $rm \in N$ $|$ $Zdv_R\left(M/N\right)=\{r \in R$ اجتماع تعداد متناهی ایده آلهای اول باشد.

(۱–۳۱) قضیه (ر.ک.۷): فرض کنید M یک لسکریان مدول باشد. دراین صورت M یک $ZD-$مدول است .

(۱–۳۲) مثال: فرض کنید $\mathbb{Z}$ حلقه اعداد صحیح و (p) ایده آل اولی از $\mathbb{Z}$ باشد که توسط عنصراول p تولید می شود. $\mathbb{Z}-$مدول $M=\oplus_p \mathbb{Z}/(p)$ را در نظر بگیرید. دراین صورت M یک $ZD-$مدول نیست. زیرا برای زیرمدول (0) از M، مجموعه $P\left(M\right)=\bigcup \{(p) \mid p$ اول $\}$ متناهی نیست. لذا تعریف (۱–۳۰) نشان می دهد که M یک ZD $-$مدول نیست. لذا بنا بر قضیه **(۱–۳۱)**، M لسکریان مدول نیست.

(۱–۳۳) تعریف: هرحلقه تعویض پذیر R را که دقیقاً یک ایده آل ماکسیمال چون $\underline{m}$ دارد شبه موضعی گوییم.

(۱–۳٤) تعریف: هرحلقه تعویض پذیر R را که تنها تعدادی متناهی ایده آل ماکسیمال داشته باشد شبه نیم$-$ موضعی گوییم.

(۱–۳۵) قضیه (ر.ک.۱٦): فرض کنید (R,m) یک حلقه شبه موضعی و m ایده آل ماکسیمال آن باشد. دراین صورت دقیقاً یکی از احکام زیر درست است.

۱) برای هر n، $m^n \neq m^{n+1}$.

۲) برای هر n و هر حلقه شبه موضعی R، $m^n=0$.

(۱–۳٦) قضیه: فرض کنید (R,M) یک حلقه شبه موضعی باشد که در آن ایده آل ماکسیمال M متناهی مولد است. در این صورت احکام زیرمعادلند:

۱) R یک حلقه نوتری است.

۲) برای هر $R-$مدول متناهی مولد N داریم $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^nN=(0)$.

۳) هر ایده آل متناهی مولد R دارای یک تجزیه اولیه است.

٤) برای ایده آلهای متناهی مولد B و A از R، عدد صحیح مثبت n وجود دارد به طوری که به ازای هر $h \geq n$ داریم

$$\left(A+B^{h}\right) \cap\left(A:_{R} B^{h}\right)=A .$$

٥) برای هر ایده آل متناهی مولد A از R داریم $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(M^{n}+A\right)=A$.

٦) اگر A یک ایده آل متناهی مولد از R باشد به طوری که $A+MB=B$، آنگاه $A=B$.

برهان:

۲⇐۱ فرض کنید $L=\bigcap_{n=1}^{\infty} M^{n}N$. چون R یک حلقه نوتری و N یک $R-$مدول متناهی مولد است، پس بنا برقضیه (۱–۲۳)، $L=LM$. در نتیجه برای هر $y \in M$ داریم $(1+y)L=0$. اما $1+y \neq 0$. پس $L=0$. این نشان می دهد که $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^{n}N=(0)$.

۳⇐۱ می دانیم که در یک حلقه نوتری R، هر ایده آل R برابر اشتراک تعدادی متناهی ایده آل تحویل ناپذیراست. همچنین درحلقه نوتری R، هر ایده آل تحویل ناپذیر اولیه است. لذا نتیجه می گیریم که در یک حلقه نوتری، هر ایده آل از جمله ایده آل متناهی مولد دارای یک تجزیه اولیه است.

٤⇐۳ فرض کنید B و A ایده آلهای متناهی مولد باشند. فرض کنید $A=Q_{1} \cap Q_{2} \cap \ldots \cap Q_{m}$ که در آن به ازای هر $i=1,2,..,m$، Q_{i}، $P_{i}-$اولیه است. فرض کنید برای هر $i>k$ داشته باشیم $B \subseteq P_{i}$. دراین صورت به ازای هر $i \leq k$ داریم $\left(Q_{i}:_{R} B^{n}\right) B^{n} \subseteq Q_{i}$ و $B^{n} \not\subset Q_{i}$. زیرا برای هر n، $\left(Q_{i}:_{R} B^{n}\right)=Q_{i}$. چون ایده آل B متناهی مولد است، پس برای هر $i>k$، عدد صحیح مثبت n_{i} وجود دارد به طوری که $B^{n_{i}} \subseteq Q_{i}$. قرارمی دهیم $n=\max\left\{n_{i}\right\}$. در این صورت برای هر $h \geq n$ خواهیم داشت

$$\left(A:_{R} B^{h}\right)=Q_{1} \cap Q_{2} \cap \ldots \cap Q_{k} \quad \text{و} \quad \left(A+B^{h}\right) \subseteq Q_{k+1} \cap Q_{k+2} \cap \ldots \cap Q_{m} .$$

این نیز نشان می دهد که $A \subseteq\left(A:_{R} B^{h}\right) \cap\left(A+B^{h}\right) \subseteq Q_{1} \cap Q_{2} \cap \ldots \cap Q_{m}=A$. بنابراین خواهیم داشت

$$\left(A+B^{h}\right) \cap\left(A:_{R} B^{h}\right)=A .$$

۵ ⇐ ٤ فرض کنید Aایده آل متناهی مولد از R باشد. در این صورت بدیهی است که $A \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(M^{n}+A\right)$. فرض کنید $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(M^{n}+A\right)$. در این صورت با استفاده از رابطه (٤) برای عدد به اندازه کافی بزرگ k داریم

$$A+(x)M=\left(A+(x)M+M^{k}\right)\bigcap\left(\left(A+(x)M\right):M^{k}\right).$$

اما $x \in A+M^{k}$. لذا $A+(x)M=A+(x)$. چون ایده آل M متناهی مولد است، پس شرایط لم ناکایاما برقرار است. بنابراین $M=0$. از این رو $x \in A$. لذا $A \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(M^{n}+A\right)$ ودرنتیجه $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(M^{n}+A\right)=A$.

۵ ⇐ ۲ قرار دهید $N=R/A$. دراین صورت خواهیم داشت

$$(0)=\bigcap_{n=1}^{\infty} M^{n}N=\bigcap_{n=1}^{\infty} M^{n}\left(\frac{R}{A}\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\frac{\left(M^{n}R+A\right)}{A}=\frac{\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(M^{n}R+A\right)}{A}.$$

این نشان می دهد که برای هر ایده آل متناهی مولد A از حلقه R داریم $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(M^{n}+A\right)=A$.

۱ ⇐ **۵** و ۱ ⇐ **٦** دارای اثبات های یکسان هستند. فرض کنید (فرض خلف) R نوتری نباشد. قراردهید $\sum=\{I$: I ایده آلی از R است که متناهی مولد نیست$\}$. بدیهی است که $\sum$ناتهی است. $\sum$ را با رابطه ترتیب جزئی $\subseteq$ در نظر بگیرید. فرض کنید $\{I_i\}_{i\in\Lambda}$ زنجیر ناتهی دلخواهی در $\sum$باشد. قرارمی دهیم $J=\bigcup_{i\in\Lambda} I_i$. در این صورت بدیهی است که J ایده آلی از Rاست. نشان می دهیم $J \in \sum$. فرض کنید J متناهی مولد باشد. $a_1,a_2,\ldots,a_k$ را مولدهای J در نظر بگیرید. چون به ازای هر j که $1\le j\le t$، $a_j \in J$، پس ایده آلی مانند I_{ij} موجود است به طوری که $a_j \in I_{ij}$. چون $\{I_i\}$ زنجیر است، پس عددی طبیعی مانند s که $1\le s\le t$، موجود است به طوری که به ازای هر j که $1\le j\le t$ داریم $I_{ij}\subseteq I_{is}$. ازاین رو $a_1,a_2,\ldots,a_t \in I_{is}$. درنتیجه $J=Ra_1+Ra_2+\ldots+Ra_t\subseteq I_{is}\subseteq J$. یعنی $I_{is}=J$ متناهی مولد است. این تناقض نشان می دهد که J متناهی مولد نیست. پس $J\in\sum$. بدیهی است که J کران بالایی برای زنجیر داده شده است. پس ثابت کرده ایم که هر زنجیر ناتهی در $\sum$ کران بالایی در آن دارد.اکنون از لم زرن نتیجه می گیریم که $\sum$ نسبت به رابطه مشمولیت عضوی ماکسیمال چون Pدارد. پس P به عنوان عضوی از $\sum$ ایده آلی

از R است که متناهی مولد نیست. فرض کنید $a,b \in R \setminus P$ و $ab \in P$. بدیهی است که P یک ایده آل اول است. حال چون $P \subset P + Ra$، از ماکسیمال بودن P در $\sum$ نتیجه می شود که $P + Ra$ متناهی مولد است و مثلاً توسط $p_1 + r_1 a, p_2 + r_2 a, \ldots, p_n + r_n a$ که در آن $p_1, p_2, \ldots, p_n \in P$ و $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ است تولید می شود. اکنون ادعا می کنیم که $P = (p_1, \ldots, p_n) + Pa$. بدیهی است که $(p_1, \ldots, p_n) + Pa \subseteq P$. فرض کنید $p \in P \subseteq P + Ra$. دراین صورت $c_1, c_2, \ldots, c_n \in R$ وجود دارد به طوری که

$$p = c_1(p_1 + r_1 a) + \ldots + c_n(p_n + r_n a) = c_1 p_1 + \ldots + c_n p_n + (c_1 r_1 + \ldots + c_n r_n)a .$$

بنابراین $(c_1 r_1 + \ldots + c_n r_n)a = p - (c_1 p_1 + \ldots + c_n p_n)$. طرف راست تساوی اخیرعضوی از Pاست. پس $(c_1 r_1 + \ldots + c_n r_n)a \in P$ ودر نتیجه $P = c_1 p_1 + \ldots + c_n p_n + (c_1 r_1 + \ldots + c_n r_n)a \in (p_1, \ldots, p_n) + Pa$. این نیز نشان می دهد که $P \subseteq (p_1, \ldots, p_n) + Pa$.از این رو به ازای هر $n \geq 1$ داریم

$$P = (p_1, \ldots, p_n) + Pa = (p_1, \ldots, p_n) + P^n a^n .$$

اکنون اگر رابطه (۵) یا (٦) را بکار بندیم خواهیم داشت $P = (p_1, \ldots, p_n)$. بنابراین P متناهی مولد است و این یک تناقض است. پس فرض خلف باطل و در نتیجه R یک حلقه نوتری است. ■

(۱–۳۷) تعریف: فرض کنید R یک حوزه صحیح دلخواه و x عضوی از $R-$مدول M باشد. در این صورت گوییم x یک عضو تابدار است هرگاه یک عضو ناصفر r از R وجود داشته باشد که $rx = 0$. زیرمجموعه $T(M)$ از M برابر با مجموعه همه عناصر تابدار Mاست. درواقع

$$T(M) = \{m \in M \mid rm = 0 \text{ وجود داشته باشد که } 0 \neq r \in R\} .$$

این مجموعه یک زیرمدول Mاست وآن را زیرمدول تابدار M می نامیم. $R-$مدول M را تابدار گویند هرگاه $T(M) = M$. همچنین مدول M را فارغ از تاب گوییم هرگاه $T(M) = 0$، به عبارت دیگر، هرگاه $rx = 0$، آنگاه $r = 0$ یا $x = 0$.

(۱–۳۸) تعریف: فرض کنید M مدولی روی حلقه تعویض پذیر نوتری R باشد و $P \in Spec(R)$. دراین صورت گوییم P ایده آل اول وابسته به M است، هرگاه $m \in M$ وجود داشته باشد که $(0:_R m) = Ann_R(m) = P$. مجموعه تمام ایده آلهای وابسته به M را با $Ass(M)$ نمایش می دهیم.

(۱–۳۹) تعریف: فرض کنید M مدولی روی حلقه تعویض پذیر R باشد. مجموعه

$$\{p \in Spec(R) \mid M_p \neq 0\}.$$

را محمل M گوییم. این مجموعه را با نماد $Supp(M)$ نشان می دهیم.

(۱–٤۰) لم (ر.ک.١٦): اگر M یک $R-$مدول باشد، آنگاه

$$Supp(M) = \{P \in Spec(R) \mid (0:_R m) \subseteq P \text{ که وجود داشته باشد } 0 \neq m \in M\}.$$

(۱–٤۱) تعریف: رادیکال اول $P(R)$ از حلقه R اشتراک تمام ایده آلهای اول R است. رادیکال اولیه از $R-$مدول M را با نماد $P(M)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$P(M) = \bigcap_{\substack{P \in Spec(R) \\ P \supseteq Ann(M)}} P .$$

(۱–٤۲) لم (ر.ک.٥): فرض کنید M یک $R-$مدول ناصفر از حلقه تعویض پذیر R باشد. اگر $r \in P(M)$، آنگاه زیرمدول ناصفر N از M وجود دارد به طوری که $(r)N = 0$.

(۱–٤۳) تعریف: $R-$مدول S را $P-$پایدار گویند هرگاه $S \neq (0)$ و برای هر زیرمدول ناصفر N از S داشته باشیم $P(N) = P(S)$.

(۱–٤٤) تعریف: زیرمدول E از $R-$مدول M را اساسی گویند هرگاه به ازای هر زیرمدول ناصفر N از M داشته باشیم $E \cap N \neq (0)$.

(۱–٤٥) تعریف: زیرمدول N از $R-$مدول M را $P-$زیرمدول گویند هرگاه $N \neq M$ و M/N، P – پایدار باشد. یعنی ایده آل ناصفری چون p از R موجود باشد به طوری که برای هر زیرمدول ناصفر M' از M/N داشته باشیم $P(M') = \{p\}$.

(۱–۴۶) تعریف: فرض کنید K یک میدان باشد. یک حلقه ارزیاب گسسته روی میدان K عبارت است از یک تابع v از K^* بتوی $\mathbb{Z}$ ($K^* = K - \{0\}$) به طوری که

۱) برای هر $x, y \in K$ ، $v(xy) = v(x) + v(y)$. یعنی v یک همریختی است .

۲) برای هر $x, y \in K$ ، $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$.

برای مشاهده جزئیات بیشتر در مورد حلقه های ارزیاب گسسته می توان به کتاب مقدمه ای بر جبر تعویض پذیر آتیه و مک دونالد مراجعه کرد.

(۱–۴۷) تعریف: فرض کنید R یک حلقه تعویض پذیر باشد. در این صورت R را یک حلقه تقلیل یافته گوییم هرگاه رادیکال پوچش صفر باشد. یعنی $\sqrt{0_R} = 0_R$.