بسم الله الرحمن الرحيم

۱

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم- گروه فیزیک

پایان نامه ارائه شده جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد فیزیک

(گرایش ذرات بنیادی)

محاسبه تصحیح تابشی مرتبه اول انرژی کازیمیر با استفاده از انتگرال مسیر برای نظریه $\lambda\varphi^4$ ومیدان های الکترومغناطیسی

استاد راهنما:

دکتر سیامک سادات گوشه

استاد مشاور:

آقای مددعلی ولوئیان

دانشجو:

ابراهیم حسنی ساطحی

شهریورماه ۱۳۸۹

تاریخ ....
شماره ....
پیوست..................

دانشگاه شهید بهشتی

بسمه تعالی

«صورتجلسه دفاع پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
۲۹۹۰۱

بازگشت به مجوز دفاع شماره ۲۱۱۰ / ۲۰۰ / د مورخ ۲۴ / ۵ /۸۹ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه آقای ابراهیم حسنی ساطحی به شماره شناسنامه ۲۸۳ صادره از لردگان متولد ۱۳۶۳ دانشجوی دوره کارشناسی ارشد ناپیوسته رشته فیزیک – ذرات بنیادی و نظریه میدانها

با عنوان :

محاسبه تصحیح تابشی مرتبه اول انرژی کازمیر با استفاده از انتگرال مسیر برای نظریه $\lambda\varphi^4$ و میدان های الکترومغناطیس

به راهنمائی:

آقای دکترسیامک سادات گوشه

طبق دعوت قبلی در تاریخ ۲۱ /۶/ ۸۹ تشکیل گردید و براساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمره ۱۷٫۵ درجه بسیار خوب مورد تصویب قرار گرفت.

۱ -استاد راهنما : آقای دکترسیامک سادات گوشه سیامک سادات گوشه

۲- استاد مشاور : آقای مددعلی ولوئیان

۳- استاد داور : آقای دکترشهریار بایگان

۴-استاد داور و نماینده تحصیلات تکمیلی: آقای دکترحمیدرضا سپنجی

فهرست

چکیده

در این پایان نامه نتایج حاصل از برخی محاسبات تصحیح کوانتمی مرتبه اول انرژی کازیمیر در چند مساله‌ی خاص و با روش های متفاوت مورد بررسی قرار گرفته و مقایسه می‌شود. مسئله‌ی اول، محاسبه تصحیح کوانتمی مرتبه اول انرژی کازیمیر بین دو صفحه‌ی موازی با استفاده از انتگرال مسیر و توابع مولد برای میدان جرم دار مختلط در مدل $\lambda\varphi^4$ می باشد که در روش اول از جملات خنثی کننده‌ی آزاد و در روش دوم از جملات خنثی کننده‌ی وابسته به شرایط مرزی استفاده می شود. نکته‌ی مهم این است که تفاوتهای مهمی بین جوابهای این دو روش وجود دارد و روی آن تأکید خواهد شد. محاسبات انرژی کازمیر با استفاده از نظریه ی میدان مؤثر برای میدان های الکترومغناطیسی و مقایسه‌ی آن با نتایج بدست آمده در کار آقای برداگ و همکارانش آخرین مطلب ارائه شده در این پایان‌نامه است.

کلید واژه: انرژی کازیمیر، تصحیح تابشی، جمله خنثی کننده

مقدمه

درتقسیم بندی کلی نیروها به چهار دسته تقسیم می شود که عبارتند از: ۱)الکترومغناطیس[۱] ۲)قوی[۲] ۳) ضعیف[۳] ۴) گرانشی[۴]

[۴] -[۳]-[۲]-[۱]. که ذره ی واسطه الکترودینامیک، فوتون و ذرات واسطه‌ی نیروهای قوی، گلوانها می باشند و ذرات واسطه‌ی نیروی ضعیف $W^{\pm}$، Z و ذره ی واسطه ی نیروی گرانشي، گراویتون می باشد. اما در سال ۱۹۴۸، بعد از بر آورد بر همکنش واندروالس بین دو مولکول و بین یک مولکول و صفحه[۵] کازیمیر و استادش بوهر بر سر تفسیر این برهمکنش بر حسب انرژی صفر خلاّ پرداختند[۷]-[۶] که منجر به تأیید این نکته شد که نوسانات نقطه ی صفر میدان الکترومغناطیس موجب چنین نیرویی می شود [۷] که جزء هیچ کدام ازتقسیم بندی فوق نمی باشد. بعد از آن کازیمیر با استفاده از همین ایده توانست نیروی جاذبه ی بین دو صفحه را پیش بینی کند. در آن زمان کازیمیر و همکارانش روی ویژگیهای محلول های کلو ئیدی مطالعه می کردند. بنابر اظهارات یکی از همکاران کازیمیر، این نظریه در آن زمان برای توضیح نیروی واندروالس به کار می رفت و نمی توانست اندازه گیری تجربی روی کلوئیدها را بطور کامل توضیح دهد بنابراین کازیمیر با همکاری دریک پالدر[۵] جهت همخوانی این مسائل با آزمایش پیشنهاد متناهی بودن سرعت نور را مطرح کرد که باعث می شود اثر نوسانات بار از یک قسمت از دستگاه با تأخیر به قسمت دیگر برسد.

کازیمیر سعی داشت نیروی واندروالس بین دو اتم قطبی شده را حساب کند نوسانات بار در یک اتم می تواند موجب ایجاد یک میدان الکتریکی شود که بار اتم دیگر را قطبی کند. بنابراین نیروی خالصی بین دو اتم قطبی شده بوجود می آید سپس کازیمیر نیروی بین یک مولکول و صفحه را بررسی کرد و از اینجا بود که کازیمیر به مسئله دو صفحه موازی هدایت شد. بزودی کازیمیر نیروی بین دو صفحه را بر اساس نوسانات خلأ توجیه کرد. در مکانیک کلا سیک نظریه خلأ ساده بود: اگر شما یک ظرف را از همه ذراتش خالی می کردید و دمای آن را به صفر مطلق می رساندید چیزی که باقی می ماند خلأ بود. اما با بوجود آمدن مکانیک کوانتمی دید ما نسبت به خلأ کاملا عوض شد. همه میدانها به خصوص میدان‌های الکترومغناطیس تغییر می کنند، به عبارت دیگر در هر لحظه مقدار حقیقی آن حول یک مقدار ثابت، یعنی مقدار متوسط تغییر می کند و حتی یک خلأ کامل در صفر مطلق دارای میدان های متغیری موسوم به نوسانات خلأ است که انرژی آنها متناسب با نصف انرژی فوتون می‌باشد. به هر حال نوسانات خلأ حاصل تصورات یک فیزیکدان نیست، بلکه این نوسانات نتایج قابل مشاهده‌ای دارد که بطور مستقیم در آزمایشگاه های میکروسکوپی قابل مشاهده هستند، برای مثال اتم ها برای مدت طولانی نمی توانند در حالت بر انگیخته بمانند و با انتشار یک فوتون به حالت پایه بر می گردند. در واقع این پدیده حاصل نوسانات خلأ می باشد. نیروی کازیمیر[۶] یکی از مشهور ترین اثر مکانیکی نوسانات خلأ می باشد که در این اثر فاصله بین دو آینه به عنوان یک حفره در نظر گرفته می شود. تمام میدان های الکترومغناطیسی دارای طیف مشخصه ای هستند که شامل فرکانس های متفاوتی می‌شوند.

---

[1] Electromagnetic forces
[2] Strong forces
[3] Weak forces
[4] Gravitational forces
[5] Dirk Polder
[6] Casimir force

تمام این فرکانس ها در داخل حفره از اهمیت یکسانی برخوردار می باشند اما داخل حفره یعنی جایی که میدان بین آینه ها بازتاب می کند وضعیت متفاوت است.

هر میدان حتی خلأ با خود انرژی حمل می کند تمام میدان های الکترومغناطیسی میتوانند در فضا منتشر شوند و بر سطوح فشار وارد کنند که به آن فشار تابشی میدان می گویند. این فشار تابشی با افزایش انرژی تابشی (فرکانس) افزایش می یابد. در فرکانس رزونانس حفره، فشار داخل حفره بیشتر از خارج از حفره است بنابراین آینه ها همدیگر را به عقب می رانند و بر عکس در حالت غیر رزونانس فشار تابشی داخل حفره کمتر از فشار خارج از حفره می باشد بنابراین آینه ها همدیگر را جذب می کنند. ثابت می شود در حالت تعادل مؤلفه جاذبه ی دو آینه بیشتر از مؤلفه ی دافعه ی دو آینه می باشد، یعنی در تعادل علامت نیرو منفی می باشد. مقداری که کازیمیر برای این نیرو به دست آورد که اکنون هم همان است به کمیت های هندسی دستگاه و ثابت های $\hbar$ و c بستگی دارد و یک نیروی جاذبه می باشد:

$$F_{cas} = -\frac{\hbar c \pi^2 A}{240 a^4}$$

این نیروی جاذبه در چند آزمایش تاریخی مشاهده شد [۹] - [۱۰] که وجود این نیرو و خواص آن را تأیید می کند.

در سالهای اخیرکوشش‌های قابل توجهی برای اندازه‌گیری دقیق نیروی کازیمیر بین صفحات موازی انجام گرفته است. همچنین در نانوتکنولوژی نیز این اندازه گیریها مورد استفاده قرار گرفته است[16]-[15]-[1].

اگر چه ما در زندگی روزمره خود بطور مستقیم با این قبیل فاصله های کوچک سرو کار نداریم اما این فاصله های کوچک در نانو ساختارها و سیستمهای میکروالکترومکانیکی و در سنسورهای فشار کیسهٔ هوای ماشین بکار می‌روند.

یکی از موضوعاتی که درسالهای اخیر در اثر کازیمیر مورد توجه قرار گرفته است و به نوعی موضوع این پایان نامه نیز می باشد محاسبه‌ی تصحیحات تابشی انرژی کازیمیر برای میدانهای مختلف می باشد . تصحیحات تابشی انرژی کازیمیر اولین بار توسط برداگ[7] و همکارانش [21] -[20] - [19] برای میدان الکترومغناطیس بررسی شده است و نیز این تصحیحات کوانتمی با روش میدان مؤثر در [23] - [22] محاسبه شده است.

آنچه که ما در این پایان نامه به آن می پردازیم محاسبه تصحیحات تابشی تا مرتبه‌ی تک حلقه ای برای میدان حقیقی و مختلط در نظریه $\lambda\Phi^4$ می باشد. در این پایان نامه به مقایسه نتایج بدست آمده از محاسبه تصحیح مرتبه اول انرژی کازیمیر با استفاده از جملات خنثی کننده آزاد با نتایج حاصل از محاسبه تصحیح مرتبه اول انرژی کازیمیر با استفاده از جملات خنثی کننده وابسته به فضا می پردازیم. در ابتدا به بررسی کارهای آقایان بارون[8]، کاولکنتی[9] و فارینا[10] برای شرایط مرزی دریکله – دریکله و نیومن – نیومن و نیومن – دریکله و شبه دوره ای متقارن و پاد متقارن خواهیم پرداخت [۲۴و۲۵و۲۶و۲۷]. در

[7] Bordag
[8] Baron
[9] Cavalcanti
[10] Farina

این کارها از جملات خنثی کننده آزاد استفاده شده است. جملات خنثی کننده که در این مقالات استفاده شده مستقل از شرایط مرزی می باشد. نکته‌ی حائز اهمیت اینکه در دو بعد فضایی حد جرم کوچک انرژی کازیمیر با جواب دقیق میدان بدون جرم آن در توافق نیست! در ادامه به بررسی تصحیحات تابشی انرژی کازیمیر با در نظرگرفتن جملات خنثی کننده ای که به شرایط مرزی وابسته‌اند، خواهیم پرداخت. تفاوت عمده‌ی این دو روش در شرطی است برای که جملات خنثی کننده وجود دارند. در روش قبلی جملات خنثی کننده مستقل از شرایط مرزی بودند و مستقل از فاصله بین دو صفحه می باشد اما در این کار جملات خنثی کننده مستقل از شرایط مرزی نیستند و به فاصله بین صفحات بستگی دارد. نکته‌ی قابل توجه اینکه در روش دوم حد جرم کوچک انرژی کازمیر با جواب دقیق میدان بدون جرم آن در توافق می باشد [28]. در انتها نیز به بررسی تصحیحات تابشی انرژی کازیمیر با استفاده از میدان مؤثر[11] می پردازیم [22] -[20].

---

[11] Effective field

فصل اول

تئوری کلی محاسبه جملات خنثی کننده

ما در این فصل به بررسی تابع گرین، شرایط باز بهنجارش و بررسی کلی فرمول جمع ایبل-پلانا[۱۲] می پردازیم و سپس با استفاده از فرمول جمع ایبل- پلانا مثال مهمی را حل می کنیم که در محاسبات بعدی ما کاربرد زیادی خواهد داشت.

۱.۱ بررسی تابع گرین

در این فصل ما در فضای اقلیدسی کار می کنیم نماد گذاری که در اینجا به کار می بریم به صورت زیر می باشد:

$$D = d + 1$$
$$(x_\perp, x_d) = (x_0, x_1, \ldots x_{d-1}, x_d) \qquad (۱.۱)$$

ما می توانیم لاگرانژی را بصورت رابطه (۲.۱) بنویسیم:

$$£ = |\partial_\mu \varphi|^2 + m^2 |\varphi|^2 + \lambda |\varphi|^4 + £ct \qquad (۲.۱)$$

که $£_{ct}$ در اینجا لاگرانژی جملات خنثی کننده[۱۳] می باشد. در این فصل فرض می کنیم یکی از صفحات در $x_d = z = \frac{-a}{2}$ و صفحه دیگر در $x_d = z = \frac{a}{2}$ باشد.

همانطور که ذکر شد محاسباتی را که در اینجا انجام می دهیم در بخش های دیگر مورد استفاده قرار می گیرد. ما در اینجا جملات خنثی کننده ای را در نظر می گیریم که مستقل از شرایط مرزی باشد و در واقع سعی بر این است تا جملات خنثی کننده‌ی آزاد را بدست آوریم.

با استفاده از نظریه اختلال و پیوست (الف)، تصحیح مرتبه اول انرژی کازیمیر بصورت زیر بدست می آید [28]-[15]-[30]:

$$\varepsilon^1 = \frac{E^1}{A} = \int_{-a/2}^{a/2} dz[2\lambda G_c^2(x,x) + \delta m^2 G_c(x,x) - (c_1\delta(z) + c_2\delta(z-a))G_c(x,x) + \delta\Lambda] \qquad (۳.۱)$$

که $£_{ct}$ به صورت رابطه (۴.۱) می باشد:

---

[12] Abel-Plana

[13] Counter terms

$$\pounds_{ct} = \delta m^2 |\varphi|^2 - (c_1\delta(z) + c_2\delta(z-a))|\varphi|^2 + \delta\Lambda \qquad (۴.۱)$$

که در اینجا $\delta\Lambda$ تغییرات ثابت کیهانشناسی[۱۴] می باشد که وابسته به برهمکنش $\lambda\varphi^4$ می باشد و δm^2 جمله خنثی کننده جرم[۱۵] بهنجار شده می باشد. c_1 و c_2 جملات خنثی کننده بهنجار شده سطحی[۱۶] هستند و ترم آخر هم جمله بهنجارش مضاعف می باشد که مربوط به میدان جرمی است. برای بدست آوردن معادله (3.1) باید ابتدا تابع گرین را بدست آوریم، بسته به این که با کدام شرایط مرزی کارکنیم تابع گرین متفاوت خواهد بود. لذا داریم:

$$\varphi(x) = \phi(x_\perp)\varphi_n(z) \qquad (۵.۱)$$

که $\phi(x_\perp)$ میدان آزاد می باشد و همچنین $x_\perp = (x_0, x_1 \ldots x_{d-1})$ بوده و $\varphi_n(z)$ تابع شرایط مرزی می باشد که تشکیل یک دستگاه متعامد را می دهند؛

$$\int_{-a/2}^{a/2} dz\varphi_n(z)\varphi^*_{n'}(z) = \delta_{n,n'} \qquad (۶.۱)$$

که $\delta_{n,n'}$ تابع دلتای کرونیکر می باشد. بنابراین ما می توانیم تابع گرین را بصورت زیر بدست بیاوریم[28]-[7]-[19]-[22]:

$$G_c(x,x') = \int \frac{d^d k_\perp}{(2\pi)^d} \exp(ik_\perp.(x_\perp - x'_\perp)) \sum_n \frac{\varphi_n(z)\varphi^*_n(z')}{k_\perp^2 + q_n^2 + m^2} \qquad (۷.۱)$$

که $k_\perp = (k_0, k_1, \ldots k_{d-1})$ می باشد و ω_n بصورت زیر تعریف می شود:

$$\omega_n = \sqrt{q_n^2 + m^2} \qquad (۸.۱)$$

بنابراین با انجام کمی محاسبات ریاضی که در [15],[2 9],[7] آمده است فرمول (7.1) بصورت زیر بدست می آید:

$$G_c(x,x) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(1-\frac{d}{2}) \sum_n \omega_n^{d-2} \varphi_n(z)\varphi^*_n(z) \qquad (۹.۱)$$

[14] Variation Cosmological constant
[15] Mass counter term
[16] Surface renormalization counter term

۲.۱ شرایط باز بهنجارش

برای بدست آوردن جملات خنثی کننده می توانیم تابع گرین را تا مرتبه اول λ بصورت زیر تعریف کنیم:

$$G(x,y)=G_c(x,y)-\int d^D\xi G_c(x,\xi)\Sigma_c(\xi)G_c(y,\xi) \qquad (۱۰.۱)$$

که $\Sigma_c(\xi)$ خود انرژی[۱۷] میدان، با در نظر گرفتن شرایط مرزی می باشد که بصورت زیر تعریف می شود:

$$\Sigma_c(\xi)=4\lambda G_c(\xi,\xi)+\delta m^2-[c_1\delta(\xi_d)+c_2\delta(\xi_d-a)] \qquad (۱۱.۱)$$

که جمله خنثی کننده δm^2 با اعمال کردن شرایط زیر بدست می آید:

$\Sigma_c(\xi)\rightarrow$ بین دو صفحه متناهی می باشد (۱۲.۱)

$$\lim_{a\rightarrow\infty}\Sigma_c(\xi)=0$$

که a فاصله بین دو صفحه می باشد.

ما می توانیم تابع گرین را بصورت یک جمله که مستقل از شرایط مرزی است و یک جمله دیگر که به شرایط مرزی بستگی دارد بصورت زیر بنویسیم:

$$G_c(\xi,\xi')=G_0(\xi,\xi')+\tilde{G}_c(\xi,\xi') \qquad (۱۳.۱)$$

$G_0(\xi,\xi')$ به شرایط مرزی بستگی ندارد اما $\tilde{G}_c(\xi,\xi')$ به شرایط مرزی بستگی دارد اگر فاصله بین صفحات زیاد باشد یعنی اگر $(a\rightarrow\infty)$ دراینصورت $\tilde{G}_c(\xi,\xi')\rightarrow 0$ در می آید.

با توجه به فرمولهای (۱۲.۱) و (۱۳.۱) و شرطی که برای $\tilde{G}_c(\xi,\xi')$ وجود دارد ما می توانیم فرمول (۱۱.۱) را بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\Sigma_c(\xi)=4\lambda\tilde{G}_c(\xi,\xi)+\mu^2-[c_1\delta(\xi_d)+c_2\delta(\xi_d-a)] \qquad (۱۴.۱)$$

که μ^2 بصورت زیر می باشد:

$$\mu^2=4\lambda G_0(\xi,\xi)+\delta m^2 \qquad (۱۵.۱)$$

با توجه به فرمول (۱۱.۱)، (۱۴.۱) و $\lim_{a\rightarrow\infty}\tilde{G}_c(\xi,\xi')\rightarrow 0$ می توانیم جمله خنثی کننده جرمی را بصورت رابطه (۱۶.۱) بدست بیاوریم:

[۱۷] Self energy

$$\delta m^2 = -4\lambda G_0(\xi,\xi) \qquad (۱۶.۱)$$

$$\delta m^2 = -4\lambda \int \frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}} \frac{1}{k^2+m^2} = -\lambda \frac{4m^{d-1}}{(4\pi)^{d+1/2}} \Gamma(\frac{1-d}{2}) \qquad (۱۷.۱)$$

که این جمله خنثی کننده برای همه شرایط مرزی درست می باشد.

جملات خنثی کننده سطحی c_1 و c_2 را می توان با توجه به فرمول (۱۰.۱) بدست آورد بنابراین با توجه به این فرمول می توان نوشت:

$$\int d\xi G_c(x,\xi)\Sigma_c(\xi)G_c(\xi,y) \rightarrow \quad \text{مقدار متناهی} \qquad (۱۸.۱)$$

در بخش بعدی این فصل به بررسی مثالی می پردازیم که در محاسبات اصلی ما کاربرد فراوانی دارد.

۳.۱ آشنایی با فرمول جمع ایبل-پلانا[18]

یکی از فرمول‌هایی که در این پایان نامه زیاد استفاده شده است، فرمول جمع ایبل-پلانا می باشد. فرمول ایبل-پلانا برای تبدیل جمع به انتگرال و برعکس به کار می رود و در صورت داشتن چهار شرط زیر می توان فرمول جمع را به انتگرال تبدیل کرد[51]:

۱ - f برای $\mathrm{Re}(z)\rangle 0$ تحلیلی باشد،

۲ - سری $f(n)$ یا $\int_0^\infty f(x)dx$ همگرا باشد،

۳ - $\lim_{x\to\infty} e^{-2\pi y}\left|f(x+iy)=0\right|$،

۴ - $\int_0^\infty e^{-2\pi y}\left|f(x+iy)\right|dx$ این انتگرال موجود باشد و هنگامی که x بسمت بینهایت میرود به صفر میل کند،

در صورت وجود این چهار شرط می توان فرمول تبدیل جمع به انتگرال را بصورت زیر نوشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)=\frac{f(0)}{2}+\int_0^\infty f(x)dx+i\int_0^\infty \frac{f(it)-f(-it)}{e^{2\pi t}-1}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=-\frac{f(0)}{2}+\int_0^\infty f(x)dx+i\int_0^\infty \frac{f(it)-f(-it)}{e^{2\pi t}-1} \qquad (۱۹.۱)$$

برای بیشتر آشنا شدن با این فرمول یک عبارتی که کاربرد زیادی در این پایان نامه دارد را با استفاده از این فرمول محاسبه می کنیم. قبل از این محاسبه بهتر است ما جمله سوم فرمول ایبل-پلانا را برای توابعی که به فرم $f(t)=(t^n+a^m)^{p/2}$ می باشد محاسبه کنیم که در آن m یک عدد صحیح زوج می باشد و n=4k-2 بوده که k یک عدد طبیعی می باشد.

برای محاسبه جمله سوم فرمول جمع ایبل-پلانا فرض می کنیم:

$$t=|t|e^{i\theta} \qquad , \qquad a=|a|e^{i\alpha}$$

که α,θ میتوانند 0 یا π باشند.

با جایگذاری در جمله سوم و جدا کردن قسمت فاز، اندازه عبارت $f(it)-f(-it)$ را می‌توان بصورت رابطه (۲۰.۱) نوشت:

---
[18]Abel-Plana

$$f(it)-f(-it)=\left[(e^{i\pi/2}|t|e^{i\theta})^n+(|a|e^{i\alpha})^m\right]^{p/2}-\left[(e^{-i\pi/2}|t|e^{i\theta})^n+(|a|e^{i\alpha})^m\right]^{p/2}$$
$$=e^{inp\pi/2}e^{inp\theta\pi/2}\left[|t|^n+|a|^m e^{i(m\alpha-n\theta-n\pi/2)}\right]^{p/2}-e^{-inp\pi/2}e^{inp\theta\pi/2}\left[|t|^n+|a|^m e^{i(m\alpha-n\theta+n\pi/2)}\right]^{p/2} \quad (۲۰.۱)$$

که در آن

$$e^{i(m\alpha-n\theta-n\pi/2)}=e^{i(m\alpha-n\theta+n\pi/2)}=-1$$

حاصل عبارت فوق در دو حالت قابل بررسی است. لذا داریم:

۱ - اگر $|t|\rangle|a|^{m/n}$:

$$f(it)-f(-it)=e^{inp\pi/4}e^{inp\theta\pi/2}\left[|t|^n-|a|^m\right]^{p/2}-e^{-inp\pi/4}e^{inp\theta\pi/2}\left[|t|^n-|a|^m\right]^{p/2}$$
$$=2iSin(\frac{n\pi p}{4})e^{inp\theta\pi/2}\left[|t|^n-|a|^m\right]^{p/2} \quad (۲۱.۱)$$

۲- اگر $|t|\langle|a|^{m/n}$:

در این حالت برای اینکه عبارت داخل کروشه (۲۰.۱) مثبت باشد عبارت فاز را از آن فاکتورگیری می کنیم:

$$f(it)-f(-it)=e^{inp\pi/4}e^{inp\theta\pi/2}e^{i(m\alpha-n\theta+n\pi/2)}\left[|t|^n e^{-i(m\alpha-n\theta+n\pi/2)}+|a|^m\right]^{p/2}$$
$$-e^{-inp\pi/4}e^{inp\theta\pi/2}e^{i(m\alpha-n\theta-n\pi/2)}\left[|t|^n e^{-i(m\alpha-n\theta-n\pi/2)}+|a|^m\right]^{p/2} \quad (۲۲.۱)$$
$$=2iSin(\frac{n\pi p}{2})e^{inp\theta\pi/2}\left[-|t|^n+|a|^m\right]^{p/2}=0$$

با توجه به عبارات فوق جمله سوم را می توان بصورت زیر نوشت:

$$i\int_0^\infty\frac{f(it)-f(-it)}{e^{2\pi t}-1}dt=-2Sin(\frac{pn\pi}{4})\int_a^\infty\frac{(t^n-a^m)^{p/2}}{e^{2\pi t}-1} \quad (۲۳.۱)$$

حال مثالی را حل می کنیم که در واقع قسمتی از محاسبات ما در فصل بعدی به حساب می‌آید:

$$\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2}+m^2\right)^{-s/2}=\sum_{n=0}^\infty f(n) \quad (۲۴.۱)$$

با توجه به فرمول جمع ایبل –پلانا جملات اول تا سوم را می توان بصورت زیر نوشت. ابتدا برای جمله اول داریم:

$$f(0)=m^{-s} \tag{۲۵.۱}$$

برای محاسبه جمله دوم به روش زیر انتگرال مورد نظر را حل می کنیم :

$$\int_0^\infty f(x)dx=\int_0^\infty\left(\frac{x^2\pi^2}{a^2}+m^2\right)^{-s/2}dx \tag{۲۶.۱}$$

با اعمال تغییر متغیر $k=\dfrac{x\pi}{a}$ می توان فرم انتگرال را بصورت زیر ساده تر کرد:

$$\frac{a}{\pi}\int_0^\infty\left(k^2+m^2\right)^{-s/2}dk$$

برای حل این انتگرال روش های زیادی وجود دارد که یکی از روش های ساده استفاده از تغییر متغیر $k=mTan(\theta)$ می باشد، که با جایگذاری این تغییر متغیر فرم انتگرال به فرم ساده تری تبدیل می شود که بصورت زیر می باشد:

$$\int_0^\infty f(x)dx=\frac{a}{\pi}\int_0^{\pi/2} m^{1-s}Sec^{2-s}(\theta)d\theta=\frac{am^{1-s}}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\frac{s-1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \tag{۲۷.۱}$$

برای بدست آوردن جمله سوم فرمول جمع ایبل-پلانا با استفاده از فرمول (۲۳.۱) به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\begin{aligned} i\int_0^\infty\frac{f(it)-f(-it)}{e^{2\pi t}-1}dt&=\int_0^\infty\frac{\left(m^2+(\frac{it\pi}{a})^2\right)^{-s/2}-\left(m^2+(\frac{-it\pi}{a})^2\right)^{-s/2}}{e^{2\pi t}-1}dt\\ &=-2Sin(\frac{-2s\pi}{4})\int_{am/\pi}^\infty\frac{\left(\frac{t^2\pi^2}{a^2}-m^2\right)^{-s/2}}{e^{2\pi t}-1}dt \end{aligned} \tag{۲۸.۱}$$

با استفاده کردن از فرمول $\dfrac{1}{e^{2\pi t}-1}=\sum_{j=1}^\infty e^{-2\pi jt}$ می توان رابطه (۲۸.۱) را بصورت زیر ساده کرد:

$$\begin{aligned} i\int_0^\infty\frac{f(it)-f(-it)}{e^{2\pi t}-1}dt&=2Sin(\frac{s\pi}{2})\sum_{j=1}^\infty\int_{am/\pi}^\infty e^{-2\pi jt}\left(\tfrac{t^2\pi^2}{a^2}-m^2\right)^{-s/2}dt\\ &=2Sin(\frac{s\pi}{2})\left(\sum_{j=1}^\infty a^{(s+1)/2}j^{(-1+s)/2}m^{(1-s)/2}\pi^{-3/2}k_{\frac{s-1}{2}}(2maj)\Gamma(1-\tfrac{s}{2})\right) \end{aligned} \tag{۲۹.۱}$$

با توجه به روابط بالا می توان رابطه کلی فرمول جمع ایبل-پلانا را بصورت زیر جمع بندی کرد:

(۳۰.۱)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2}+m^2\right)^{-s/2}=\frac{m^{-s}}{2}+\frac{am^{1-s}}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\frac{s-1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}+2Sin(\frac{s\pi}{2})\left(\sum_{j=1}^{\infty}m^{1-s}\frac{a^{(s+1)/2}}{\pi^{-3/2}}\frac{k_{\frac{s-1}{2}}(2maj)}{(jm)^{(1-s)/2}}\Gamma(1-\tfrac{s}{2})\right)$$

$$=\frac{m^{-s}}{2}+\frac{am^{1-s}}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left(\Gamma(\frac{s-1}{2})+\frac{4}{\pi}\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})\sum_{j=1}^{\infty}\frac{k_{\frac{s-1}{2}}(2maj)}{(jm)^{(1-s)/2}}\right)$$

با استفاده از را بطه های $\Gamma(1+z)=z\Gamma(z)$ و $z\Gamma(z)\Gamma(-z)=-\frac{\pi}{Sin(\pi z)}$ می توان نوشت:

$$\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})=\frac{\pi}{Sin(\pi s/2)} \tag{۳۱.۱}$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2}+m^2\right)^{-s/2}=\frac{m^{-s}}{2}+\frac{am^{1-s}}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left(\Gamma(\frac{s-1}{2})+4\sum_{j=1}^{\infty}\frac{k_{\frac{s-1}{2}}(2maj)}{(jm)^{(1-s)/2}}\right) \tag{۳۲.۱}$$

از رابطه (۳۲.۱) در محاسبات فصل ۲، استفاده زیادی خواهد شد. در فصل بعدی ما به محاسبه تصحیح مرتبه اول انرژی کازیمیر برای میدان های اسکالر، با استفاده از جملات خنثی کننده ای که به شرایط مرزی بستگی ندارند می پردازیم.

فصل ۲

محاسبه تصحیح کوانتمی مرتبه اول انرژی کازیمیر

با استفاده از جملات خنثی کننده ی مستقل از شرایط مرزی

همانطور که ذکر شد هدف ما در این پایان نامه مقایسه نتایج بدست آمده از محاسبه تصحیح مرتبه اول انرژی کازیمیر با استفاده از جملات خنثی کننده آزاد با نتایج حاصل از محاسبه تصحیح مرتبه اول انرژی کازیمیر با استفاده از جملات خنثی کننده وابسته به فضا می باشد. در این فصل ما ابتدا به محاسبه تصحیح مرتبه اول انرژی کازیمیر برای میدان های اسکالر، با استفاده از جملات خنثی کننده‌ای که به شرایط مرزی بستگی ندارند(جملات خنثی کننده‌ی آزاد)، برای چند شرط مرزی زیر می پردازیم:

۱) شرایط مرزی شبه دوره ای[۱۹]

۲) شرایط مرزی دریکله-دریکله[۲۰]

۳)شرایط مرزی نیومن-نیومن[۲۱]

در فصل بعد همین مساله را با جملات خنثی کننده‌ی وابسته به شرایط مرزی مورد بررسی قرار خواهیم داد و در نهایت نیز مقایسه‌ی این دو روش و جوابهای آنها مورد توجه قرار خواهد گرفت.

۱.۲ شرایط مرزی شبه دوره ای

در این بخش ما میدانی را در نظر می گیریم که از شرایط مرزی شبه دوره ای پیروی می کند یعنی:

$$\varphi(x_{\perp}, x_d = z = \frac{-a}{2}) = e^{i\theta}\varphi(x_{\perp}, x_d = z = \frac{a}{2}) \qquad (۱.۲)$$

که در اینجا θ پارامتری است که می تواند بصورت پیوسته از 0 تا π تغییر کند توجه کنید که $\theta=0$ برای شرایط مرزی شبه ایستای متقارن می باشد و $\theta = \pi$ برای شرایط مرزی شبه ایستای پاد متقارن می باشد. با توجه به فرمول های (۱.۲) و(۵.۱) می توان $\varphi_n(z)$ را بصورت زیر نوشت:

---

[19] Quasi-periodic boundary condition
[20] Dirichlet-Dirichlet boundary condition
[21] Neumman-Neumman boundary condition

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{iq_n z} \tag{۲.۲}$$

که $q_n = \dfrac{2n\pi + \theta}{a}$ و $n = 0, \pm1, \pm2......$ می باشد. در این شرایط مرزی لازم نیست که جملات خنثی کننده سطحی را وارد کنیم چون در بازبهنجارش مسئله نمی توانند مفید باشند . لذا معادله (۳.۱) را می توان بصورت رابطه (۳.۲) نوشت :[31]-[30]

$$\varepsilon^1{}_\theta = \int_{-a/2}^{a/2} dx_d [2\lambda G^2{}_\theta(x,x) + \delta m^2 G_\theta(x,x) + \delta\Lambda] \tag{۳.۲}$$

که $G_\theta(x,x)$ از شرایط مرزی تبعیت می کند.

بنابراین ما می توانیم با توجه به فرمول های (۲.۲)، (۸.۱) و (۹.۱) تابع گرین را بصورت زیر بنویسیم:

$$G_\theta(x,x) = \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{a(4\pi)^{d/2}} \sum_n \omega_n{}^{d-2} \tag{۴.۲}$$

$$\omega_n = \sqrt{(\frac{2n\pi+\theta}{a})^2 + m^2} \tag{۵.۲}$$

حال با در دست داشتن تابع گرین می‌توان محاسبات تصحیح مرتبه‌ی اول انرژی را برای هریک از شرایط مرزی ذکر شده در بالا آغاز نمود.

۲.۲ محاسبه تصحیح مرتبه اول انرژی کازیمیر با شرایط مرزی شبه دوره ای

با وارد کردن معادله (۴.۲) در (۳.۲) و انجام محاسبات ریاضی می توان نوشت:

$$\varepsilon^1{}_\theta = \left\{ 2\lambda a \left(\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{a(4\pi)^{d/2}} \sum_n \omega_n{}^{d-2} \right)^2 + a\delta m^2 \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{a(4\pi)^{d/2}} \sum_n \omega_n{}^{d-2} + a\delta\Lambda \right\}$$

$$= \frac{2\lambda}{a} \left\{ \left(\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{a(4\pi)^{d/2}} \sum_n \omega_n{}^{d-2} \right)^2 + a\delta m^2 \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{a(4\pi)^{d/2}} \sum_n \omega_n{}^{d-2} + a\delta\Lambda + (\frac{a\delta m^2}{4\lambda})^2 - (\frac{a\delta m^2}{4\lambda})^2 \right\}$$

$$\varepsilon^{1}{}_{\theta}=\frac{2\lambda}{a}\left[\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\sum_{n}\omega_{n}{}^{d-2}+\frac{a\delta m^{2}}{4\lambda}\right]^{2}+a(\delta\Lambda-\frac{a(\delta m^{2})^{2}}{8\lambda}) \tag{۶.۲}$$

برای ساده کردن معادله (۶.۲) به روش زیر عمل می کنیم:

$$\omega_{n}{}^{d-2}=\left((\frac{2n\pi+\theta}{a})^{2}+m^{2}\right)^{\frac{d-2}{2}}=(\frac{2\pi}{a})^{d-2}\sum_{n}\left((n+\frac{\theta}{2\pi})^{2}+(\frac{am}{2\pi})^{2}\right)^{\frac{d-2}{2}} \tag{۷.۲}$$

بنابراین می توان رابطه (۷.۲) را بصورت زیر نوشت:

$$\omega_{n}{}^{d-2}=(\frac{2\pi}{a})^{d-2}D(\frac{2-d}{2},\frac{am}{2\pi},\frac{\theta}{2\pi}) \tag{۸.۲}$$

از طرفی D را می توان بصورت زیر نوشت:

$$D(s,\nu,\frac{\theta}{2\pi})=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left[\nu^{2}+(n+\frac{\theta}{2\pi})^{2}\right]^{-s} \tag{۹.۲}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\nu^{1-2s}}{\Gamma(s)}\left[\Gamma(s-\frac{1}{2})+4\sum_{n=1}\cos n\theta\frac{k_{\frac{1}{2}-s}(2n\pi\nu)}{(n\pi\nu)^{\frac{1}{2}-s}}\right]$$

بنابراین معادله ی (۷.۲) را می توان بصورت (۱۰.۲) ساده کرد:

$$\omega_{n}{}^{d-2}=(\frac{2\pi}{a})^{d-2}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1-\frac{d}{2})}(\frac{am}{2\pi})^{d-1}\left[\Gamma(\frac{1-d}{2})+4\sum_{n=1}\cos n\theta\frac{k_{\frac{d-1}{2}}(nma)}{(\frac{nam}{2})^{\frac{d-1}{2}}}\right] \tag{۱۰.۲}$$

با جایگذاری رابطه (۱۰.۲) در (۶.۲) می توانیم رابطه ی (۱۱.۲) را بدست بیا وریم.

(۱۱.۲)