دانشگاه کاشان

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (گرایش جبر)

عنوان

کران هایی برای اندیس مرکز در گروه توانا

استاد راهنما

دکتر احمد غلامی

توسط

اباذر حسنی

دی ماه ۱۳۸۹

چکیده

در این پایان نامه به بررسی بهترین اندیس مرکز برای گروه‌های توانا خواهیم پرداخت. بدین منظور ابتدا تعاریف گروه توانا، زیرگروه‌های گروه توانا، مرکز دقیق و ... را بیان کرده و نشان می‌دهیم توانا بودن یك گروه معادل بدیهی بودن مرکز دقیق آن است. ثابت خواهیم کرد مرکز دقیق گروه‌های S_{2^n} و Q_{2^n} بدیهی نبوده و در نتیجه توانا نیستند. در رابطه‌ی با ضربگر شور چند گروه مطالبی بیان کرده و نشان می‌دهیم ضربگر شور یك گروه نابدیهی توانا و پوچتوان بدیهی نیست. درادامه اشاره‌ای به زوج گروه‌های توانا کرده و شرایط توانا بودن آن‌ها را بیان می‌کنیم. در نهایت کران‌های بدست آمده برای اندیس مرکز در گروه توانا را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: گروه توانا – زوج گروه توانا – اندیس مرکز – ضربگر شور

مقدمه

مفهوم گروه نخستین بار در اوایل سده‌ی ۱۹ معرفی شد، ولی ریشه‌های آن را می‌توان در دوران بسیار گذشته جستجو کرد. در این دوران بود که نظریه‌ی گروه پیشرفت قابل توجهی کرد. متعاقب آن « بئر »[1] اولین شخصی بود که در سال ۱۹۳۸ گروه‌های خارج قسمتی مرکزی را بیان کرد. در واقع این گروه‌ها پایه‌گذار گروهی جدید به نام گروه توانا شدند. « بئر » بعدها گروه‌های توانای آبلی را نیز مورد بررسی قرار داد.

همچنین « بِیل »[2] در سال ۱۹۷۹ در مورد گروه‌های توانا مطالبی مهم و ارزشمند را عرضه کرد. در همین سال‌ها « شهریاری »[3] روی زیرگروه‌های نرمال گروه‌های توانا تحقیقاتی انجام داد. علاوه بر این ایشان نشان داد چه گروه‌هایی نمی‌توانند توانا باشند. p-گروه‌های توانا نخستین بار توسط « ماجیدین »[4] مطرح شد. وی روی مرتبه مولدهای این گروه‌ها پژوهش‌های فراوانی انجام داد.

همانند سایر گروه‌ها، مرکز گروه توانا اهمیت خاصی داشت. به همین دلیل کران اندیس مرکز گروه

[1] R. Baer
[2] F. R. Beyl
[3] Sh. Shahriari
[4] A. Majidin

توانا مورد توجه قرار گرفت. « شور » [5] و « وایگولد » [6] نشان دادند که اگر در یک گروه دلخواه اندیس مرکز متناهی باشد، آنگاه مرتبه زیرگروه مشتق متناهی است. گروه‌های فوق ویژه نامتناهی، یک مثال نقض برای عکس مطلب اخیر می باشند. بر همین اساس مرتبه زیرگروه مشتق در تعیین کران مورد نظر اهمیت خاصی به خود گرفت. « هال » [7] نشان داد که در صورت متناهی بودن مرتبه زیرگروه مشتق، اندیس مرکز دوم گروه متناهی‌است. این موضوع باعث شد تا تلاش برای پیدا کردن اندیس مرکز در گروه توانا، دو چندان شود.

اولین کران مناسب توسط « مکدونالد » [8] ارائه شد. در سال ۲۰۰۱ « ایساک» [9] کران مناسب‌تری را بدست آورد. تلاش‌های « پُدُسکی » [10] و « اسزِگدی »[11] در سال ۲۰۰۵ نتیجه داد تا بهترین کران ممکن ثابت شد. مطالبی را ارائه می‌کنیم تا اولاً به گروه توانا مسلط شویم و ثانیاً درک بهتری از چگونگی اثبات این کران‌ها پیدا کنیم.

در فصل اول مفاهیم مقدماتی را بیان و اثبات می‌کنیم تا نیازهای فصول آتی را به این مقدمات مرتفع سازیم. در فصل دوم به زیرگروه‌های یک گروه توانا می‌پردازیم و نشان می‌دهیم تحت چه شرایطی یک گروه نمی‌تواند توانا باشد. فصل سوم را اختصاص به مطالبی در رابطه با زوج گروه‌ها داده و نشان

[5] Schur
[6] J. Wiegold
[7] P. Hall
[8] I. D. Macdonald
[9] I. M. Issacs
[10] K. Podoski
[11] B.Szegedy

می‌دهیم توانا بودن یك زوج گروه معادل بدیهی بودن G-مرکز خارجی آن و همچنین بدیهی بودن مرکز دقیق آن است. در فصل چهارم دو حالت را برای زیرگروه مشتق در نظر گرفته و در هر حالت کران‌هایی برای اندیس مرکز یك گروه توانا را بیان و اثبات می‌کنیم.

فهرست مطالب

فصل ۱
مقدمات و پیش نیازها

هدف این فصل، بیان اجمالی مطالبی است که در فصول آینده به آن‌ها نیاز داریم. در رابطه با زیرگروه مشتق، مفاهیمی را بیان کرده و متعاقب آن لم سه زیرگروه، که به وفور استفاده می‌شود، را ثابت می‌کنیم. در ادامه سری گروه‌ها، گروه حلپذیر و گروه پوچتوان را تعریف کرده و بعضی از ویژگی‌های آن‌ها را بیان می‌کنیم. علاوه بر این زوج ایزوکلینیسم و دو گروه ایزوکلینیك را معرفی می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که خانواده‌ی ایزوکلینیك‌های یك گروه شامل گروهی است که مرکز آن مشمول در زیرگروه مشتق آن است. در پایان گروه‌های آزاد را تعریف کرده و نشان می‌دهیم هر گروه، تصویر همریخت یك گروه آزاد است. بر این اساس یك نمایش آزاد برای هر گروه معرفی می‌کنیم.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱. فرض کنیم G یک گروه، H زیرگروه آن و $a \in G$ دلخواه باشد. مجموعه $aH = \{ah \mid h \in H\}$ را یک همدسته چپ H در G می‌نامیم و a را نماینده این همدسته می‌گوییم. به همین ترتیب همدسته راست H در G به صورت $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۱. فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروه آن باشد. در این صورت تعداد عناصر مجموعه تمام همدسته های چپ (راست) H در G را اندیس H در G می‌گوییم و با نماد $|G : H|$ نشان

می‌دهیم.

تذکر ۳.۱. فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروه آن باشد. در این صورت بین H و همدسته های چپ (راست) H در G یک تناظر یک به یک برقرار است. به خصوص برای هر $a \in G$، $|H| = |aH| (= |Ha|)$.

تعریف ۴.۱. فرض کنیم G یك گروه باشد و $H \leq G$. زیر مجموعه C از G را سیستم نمایشگر همدسته‌ای H در G گوییم هر گاه C شامل دقیقاً یک عنصر از هر همدسته H در G باشد. عنصر انتخاب شده همدسته در C را نماینده همدسته می‌نامیم.

با توجه به تعریف ۴.۱ تعداد عناصر مجموعه C برابر اندیس H در G است. همچنین برای انتخاب یك عنصر از یك همدسته، $|H|$ امکان وجود دارد. بنابراین اگر گروه G متناهی باشد، آنگاه تعداد سیستم نمایشگر همدسته H در G برابر $|H|^{|G:H|}$ است.

تذکر ۵.۱. اگر G یک گروه باشد و $N \trianglelefteq G$ ، آنگاه زیرگروه‌های $\frac{G}{N}$ به صورت $\frac{H}{N}$ می‌باشند که در آن $N \trianglelefteq H \leq G$.

تعریف ۶.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد و $x, y \in G$. y را x گوییم هرگاه $g \in G$ موجود باشد به طوری که $y = g^{-1}xg$. مجموعه تمام مزدوج‌های x را کلاس مزدوجی x نامیده و با $Cl(x)$ نشان می‌دهیم. در حقیقت

$$Cl(x) = \{\ g^{-1}xg \ \mid \ g \in G\ \}$$

تعریف ۷.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد و $x, y \in G$. $x^{-1}y^{-1}xy$ را x, y نامیده و با $[x, y]$ نشان می‌دهیم. همچنین زیرگروه مشتق G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G' = [G, G] = \langle\ [x, y] \mid x, y \in G\ \rangle.$$

لم ۸.۱. فرض کنیم G یك گروه باشد و $x \in G$. در این صورت $|Cl(x)| \leq |G'|$.

اثبات. به ازای هر $g \in G$، $g^{-1}xg = x[x,g] \in xG'$. بنابراین $Cl(x) \subseteq xG'$. از طرفی همواره $|xG'| = |G'|$. در نتیجه $|Cl(x)| \leq |G'|$. □

قضیه ۹.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد، $x, y, z \in G$ و $n, m \in \mathbb{N}$. در این صورت:

۱) $x^y = x[x,y]$

۲) $[x,y] = [y,x]^{-1}$

۳) $[xy,z] = [x,z]^y.[y,z]$

۴) $[x,y]^z = [x,y].[x,y,z]$

۵) $[x,y^{-1}] = ([y,x]^{y^{-1}})^{-1}$ ، $[x^{-1},y] = ([y,x]^{x^{-1}})^{-1}$

۶) $[x,yz] = [x,z].[x,y]^z = [x,z].[x,y].[x,y,z]$ (اتحاد هال)

۷) $[xy,z] = [x,z]^y.[y,z] = [x,z].[x,y,z].[y,z]$ (اتحاد هال)

۸) $[y,x,z^y].[z,y,x^z].[x,z,y^x] = 1$ (اتحاد ویت [1])

۹) $[x,y^{-1},z]^y.[y,z^{-1},x]^z.[z,x^{-1},y]^x = 1$ (اتحاد هال - ویت)

اثبات. قضیه‌ی ۵.۱.۵ [۲۱] را ببینید.

□

لم ۱۰.۱. فرض کنیم G یک گروه و H, N زیرگروه‌های نرمال آن باشند. در این صورت:

۱) اگر L زیرگروه نرمال N و H باشد، آنگاه $\frac{[N,H]}{L} = \left[\frac{N}{L}, \frac{H}{L}\right]$.

۲) اگر $\frac{G}{N}$ دوری باشد، آنگاه $G' = [G,N]$.

۳) اگر $N \cap G' = \{1\}$، آنگاه $N \subseteq Z(G)$.

[1] Witt

۴) اگر $[G,H]=G'$، آنگاه $G'\leq H$.

۵) $[H,N]\trianglelefteq \langle H,N\rangle$.

۶) $[H,N]=[N,H]$.

۷) فرض کنیم $L\leq H$. در این صورت $[H,G]\subseteq L$ اگر و تنها اگر $\frac{H}{L}\subseteq Z(\frac{G}{L})$.

اثبات. [۲۱] را ببینید. $\square$

لم ۱۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروه آن باشد. در این صورت $[H,G]=1$ اگر و تنها اگر $H\subseteq Z(G)$.

اثبات. فرض کنیم $[H,G]=1$ و $x\in H$ دلخواه باشد. در این صورت به ازای هر $g\in G$، $x^{-1}g^{-1}xg=1$. یعنی $xg=gx$. بنابراین $x\in Z(G)$ و در نتیجه $H\subseteq Z(G)$.

بالعکس. فرض کنیم $[h,g]\in[H,G]$ دلخواه باشد. بنا به فرض $h\in Z(G)$ لذا $hg=gh$. یعنی $[h,g]=h^{-1}g^{-1}hg=1$. بنابراین $[H,G]=1$. $\square$

تذکر ۱۲.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد، $x,y\in G$ و $m\in\mathbb{N}$. در این صورت اگر $[x,y]$ در مرکز $\langle\, x,y\,\rangle$ قرار گیرد، آنگاه $[x,y]^m=[x^m,y]$.

لم ۱۳.۱. (لم سه زیرگروه) فرض کنیم G یك گروه و H و K و L زیرگروه‌های G باشند. اگر دو تا از زیرگروه‌های مشتق $[H,K,L]$ و $[K,L,H]$ و $[L,H,K]$ مشمول در یک زیرگروه نرمال G باشند، آنگاه سومی نیز چنین است.

اثبات. فرض کنیم $N\trianglelefteq G$، $[H,K,L]\subseteq N$ و $[K,L,H]\subseteq N$. اگر $h\in H$، $k\in K$ و $l\in L$ دلخواه باشند، آنگاه بنا به قضیه‌ی ۹.۱ داریم:

$$[l,h^{-1},k]^h=([k,l^{-1},h]^l)^{-1}([h,k^{-1},l]^k)^{-1}\in N$$

بنابراین $[L,H,K] \subseteq N$ و حکم بدست می‌آید. $\square$

تعریف ۱۴.۱. فرض کنیم G یک گروه و H زیرمجموعه ناتهی آن باشد. مرکزساز و نرمال‌ساز H در G را به ترتیب با $C_G(H)$ و $N_G(H)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$C_G(H) = \{g \in G \mid \forall h \in H : gh = hg\}$$

$$N_G(H) = \{g \in G \mid g^{-1}Hg = H\}$$

لم ۱۵.۱. فرض کنیم G یک گروه و N و H زیرگروه‌های G باشند. در این صورت $[H,N] = 1$ اگر و تنها اگر $H \subseteq C_G(N)$.

اثبات. مشابه لم ۱۱.۱ ثابت می‌شود. $\square$

لم ۱۶.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد و $C = C_G(G')$. در این صورت $C' \leq Z(G)$ و $Z_2(G) \leq C$.

اثبات. فرض کنیم $a,b \in C$ و $x \in G$ دلخواه باشند. قرار می‌دهیم $a_1 = [a,x]$ و $b_1 = [b,x]$. از آجایی که C مرکز ساز یك زیرگروه نرمال G است، به وضوح $C \trianglelefteq G$. بنابراین $a_1, b_1 \in C$ و در نتیجه $a_1, b_1 \in C \cap G'$.

از طرفی $[a_1,a] = [a_1,b] = [a_1,b_1] = 1$ و $[b_1,a] = [b_1,b] = 1$. پس

$$(ab)^x = a^x b^x = aa_1bb_1 = a_1b_1ab \;\;,\;\; (ba)^x = b^x a^x = bb_1aa_1 = a_1b_1ba.$$

اینك داریم:

$$[a,b]^x = x^{-1}a^{-1}b^{-1}abx = (x^{-1}a^{-1}b^{-1}x)(x^{-1}abx) = (ba)^{-x}(ab)^x = [a,b].$$

در نتیجه $C' \subseteq Z(G)$.

با توجه به تعریف داریم $\frac{Z_2(G)}{Z(G)} = Z(\frac{G}{Z(G)})$. بنابراین $\left[\frac{Z_2(G)}{Z(G)}, \frac{G}{Z(G)}\right] = 1$ و در نتیجه $[Z_2(G), G] = Z(G)$. لذا $[Z_2(G), G, G] = 1$ و در نهایت $Z_2(G) \leq C$. $\square$

تعریف ۱۷.۱. فرض کنیم G گروهی متناهی و H زیرگروه آن باشد. H را زیرگروه هال گوییم هرگاه $(|H|, |G:H|) = ۱$.

لم ۱۸.۱. فرض کنیم G یك گروه و H زیرگروه آن باشد. اگر $[H, G'] = ۱$، آنگاه $[H', G] = ۱$.

اثبات. فرض کنیم $x \in G$ و $u, v \in H$ دلخواه باشند. نشان می‌دهیم $[u, v]x = x[u, v]$. قرار می‌دهیم $x^{-۱}ux = uw$. به وضوح $w \in G'$. از طرفی $[w, v] = [v, w]^{-۱} \in [H, G']$. اکنون بنابه قضیه‌ی ۹.۱ خواهیم داشت:

$$[x^{-۱}ux, v] = [uw, v] = [u, v]^w[w, v] = [u, v].$$

به طریق مشابه $[u, x^{-۱}vx] = [u, v]$. بنابراین :

$$\begin{aligned} [u, v]^x &= x^{-۱}u^{-۱}v^{-۱}uvx \\ &= (x^{-۱}ux)^{-۱}(x^{-۱}vx)^{-۱}(x^{-۱}ux)(x^{-۱}vx) \\ &= [x^{-۱}ux, x^{-۱}vx] = [u, x^{-۱}vx] \\ &= [u, v]. \end{aligned}$$

یعنی $[u, v]x = x[u, v]$. در نتیجه $H' \subseteq Z(G)$. اینك با توجه به لم ۱۱.۱، $[H', G] = ۱$ و حکم ثابت می‌شود. $\square$

تعریف ۱۹.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. G را گروه کامل گوییم هرگاه $G = G'$.

مثال ۲۰.۱. می‌دانیم به ازای هر $n > ۴$، گروه متناوب A_n ساده و ناآبلی است. بنابراین A_n گروهی کامل است.

تعریف ۲۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و S یک مجموعه ناتهی باشد. گوییم G بر S عمل می‌کند هرگاه تابعی مانند $. : G \times S \longrightarrow S$ موجود باشد به طوری که

۱) به ازای هر $s \in S$ ، $e.s = s$ (که e عنصر همانی G است).

۲) به ازای هر $s \in S$ و $x, y \in G$ ، $(xy).s = x.(y.s)$.

مثال ۲۲.۱. فرض کنیم G یك گروه و H زیرگروه نرمال آن باشد. گوییم G روی H به وسیله‌ی تزویج عمل می‌کند، هرگاه به ازای هر $h \in H$ و $g \in G$ تابع $. : G \times S \longrightarrow S$ را با ضابطه‌ی $g.h = g^{-1}hg$ تعریف کنیم.

۲.۱ p-گروههای فوق ویژه

تعریف ۲۳.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. e را نمای G گوییم هرگاه کوچکترین عدد طبیعی باشد که به ازای هر $g \in G$، $g^e = 1$. در حقیقت e کوچکترین مضرب مشترک مرتبه عناصر G است.

تعریف ۲۴.۱. فرض کنیم π مجموعه‌ای از اعداد اول و π' مجموعه‌ای از اعداد اول خارج از π باشد. در این صورت یک π- عدد[۲] ، عددی صحیح و مثبت است که مقسوم علیه‌های اول آن درπ باشد. عنصر g را π ـ عنصر [۳] گوییم هرگاه مرتبه‌ی آن یك π–عدد باشد. یک گروه را π ـ گروه می‌نامیم هرگاه هر عنصر آن یک π- عنصر باشد.

لم ۲۵.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد و $x \in G$. اگر $\pi(\langle x \rangle) = \{p_1, p_2, \cdots, p_r\}$، آنگاه x را می‌توان به صورت منحصر بفرد $x = x_1x_2\cdots x_r$ نوشت به طوری که هر x_i یک p_i–عنصر است و به ازای هر $1 \leq i, j \leq r$، $x_ix_j = x_jx_i$.

اثبات. به [۲۱] مراجعه کنید. □

تعریف ۲۶.۱. فرض کنیم G یک گروه و $x \in G$ به صورت منحصربفرد $x = x_1x_2$ باشد که x_1

[۲] $\pi - number$
[۳] $\pi - element$

یک p-عنصر و x_2 یک p'-عنصر است. در این صورت x_1 را p-قسمت x [4] و x_2 را p'-قسمت x می‌نامیم.

تعریف ۲۷.۱. گروه G را p-گروه آبلی مقدماتی گوییم هرگاه آبلی و هر عنصر آن از مرتبه p باشد.

تعریف ۲۸.۱. فرض کنیم G یك p-گروه باشد. G را گروه فوق ویژه گوییم هرگاه $Z(G) = G'$ و $|G'| = p$.

تذکر ۲۹.۱. هر گروه نا آبلی از مرتبه p^3، p-گروه فوق ویژه است. بنابراین ۲-گروه‌های D_8 و Q_8 و همچنین p-گروه $E = \langle\ x, y \mid x^{p^2} = y^p = 1\ ,\ \ [x, y] = x^p\ \rangle$، فوق ویژه‌اند.

تعریف ۳۰.۱. فرض کنیم G یك گروه و $G_1, \cdots, G_n$ زیر گروه‌های نرمال G باشند. G را حاصل ضرب مرکزی $G_1, \cdots, G_n$ گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

۱) $G = G_1 G_2 \cdots G_n$.

۲) برای هر $i \neq j$، $[G_i, G_j] = 1$.

۳) برای هر i، $G_i \cap \prod_{i \neq j} G_j = Z(G)$.

قضیه ۳۱.۱. هر p-گروه فوق ویژه برابر حاصل ضرب مرکزی n زیرگروه ناآبلی از مرتبه p^3 است. به خصوص مرتبه یك گروه فوق ویژه p^{2n+1} است. همچنین حاصل ضرب مرکزی متناهی از گروه‌های ناآبلی از مرتبه p^3 یک p-گروه فوق ویژه است.

اثبات. قضیه‌ی ۵.۳.۸ در [۲۱] را ملاحظه کنید. □

[4] p-part

۳.۱ سری گروه‌ها و گروه‌های حلپذیر و پوچتوان

تعریف ۳۲.۱. فرض کنیم G یک گروه و $\{G_i\}$ خانواده‌ای از زیرگروه‌های G باشد. زنجیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_n \leq G_{n+1} \leq \cdots$$

الف) سری فوق را سری نرمال گوییم هرگاه به ازای هر i، $G_i \trianglelefteq G$.

ب) سری فوق را سری زیر نرمال گوییم هرگاه به ازای هر i، $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$.

ج) سری فوق را سری آبلی گوییم هرگاه سری زیرنرمال بوده و به ازای هر i، $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ آبلی باشد.

د) سری فوق را سری مرکزی گوییم هرگاه سری نرمال بوده و به ازای هر i، $\frac{G_{i+1}}{G_i} \subseteq Z(\frac{G}{G_i})$.

تعریف ۳۳.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. به ازای هر i، $G^{(i+1)}$ را زیرگروه G در نظر می‌گیریم که $G^{(0)} = G$ و $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$. در این صورت دنباله‌ی زیر را سری مشتق می‌نامیم:

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \cdots \geq G^{(n)} \geq G^{(n+1)} \geq \cdots$$

تعریف ۳۴.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. دنباله‌ی $\{\gamma_i(G)\}$ از زیرگروه‌های G را به استقراء به صورت $\gamma_1(G) = G$ و $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$ تعریف می‌کنیم. در این صورت دنباله‌ی زیر از زیرگروه‌های G را سری مرکزی پایینی G می‌نامیم:

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \cdots \geq \gamma_n(G) \geq \gamma_{n+1}(G) \geq \cdots$$

تذکر ۳۵.۱. با توجه به لم ۱۱.۱ به ازای هر n، خواهیم داشت $\frac{\gamma_n(G)}{\gamma_{n+1}(G)} \subseteq Z(\frac{G}{\gamma_{n+1}(G)})$.

تعریف ۳۶.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. به ازای هر i زیرگروه $Z_{i+1}(G)$ از G را در نظر می‌گیریم که $Z_0(G) = \{1\}$ و $\frac{Z_{i+1}(G)}{Zi(G)} = Z(\frac{G}{Z_i(G)})$. در این صورت دنباله‌ی زیر را سری مرکزی بالایی

G می‌نامیم:

$$\{1\} = Z_0(G) \leq Z(G) \leq Z_2(G) \leq \cdots \leq Z_n(G) \leq Z_{n+1}(G) \leq \cdots$$

لزومی ندارد سری‌های مشتق و مرکزی پایینی به $\{1\}$ ختم شوند. همچنین سری مرکزی بالایی نیز لازم نیست که به G برسد. اما اگر G متناهی باشد، آنگاه سری مرکزی بالایی به زیرگروهی از G ختم می‌شود که به آن ابر مرکز G می‌گوییم.

تعریف ۳۷.۱. فرض کنیم G یك گروه باشد. G را حلپذیر گوییم هرگاه دارای یک سری آبلی باشد.

مثال ۳۸.۱. برای گروه آبلی G، می‌توان سری آبلی $\{1\} \leq G$ را در نظر گرفت. لذا هر گروه آبلی حلپذیر است. اما هر گروه حلپذیر، آبلی نیست. به عنوان مثال گروه متقارن S_3 ناآبلی و حلپذیر است.

قضیه ۳۹.۱. کلاس گروه‌های حلپذیر نسبت به زیرگروه، تصویر، توسیع و حاصل ضرب مستقیم اعضایش بسته است.

اثبات. ۵.۱.۱ و ۵.۱.۲ از [۲۱] را ببینید. □

تعریف ۴۰.۱. فرض کنیم G یك گروه باشد. G را پوچتوان گوییم هرگاه دارای یک سری مرکزی باشد. طول کوتاهترین سری مرکزی G را کلاس پوچتوانی G می‌نامیم.

تذکر ۴۱.۱. از آنجایی که گروه‌های خارج قسمتی سری مرکزی، آبلی می‌باشند، لذا هر گروه پوچتوان حلپذیر است. ولی گروه‌های حلپذیر لزوماً پوچتوان نیستند. به عنوان مثال گروه متقارن S_3 گروهی حلپذیر است که پوچتوان نیست.

قضیه ۴۲.۱. کلاس گروه‌های پوچتوان نسبت به زیرگروه، تصویر و حاصل ضرب مستقیم متناهی اعضایش بسته است.

اثبات. ۵.۱.۴ از [۲۱] را ملاحظه کنید. □

تذکر ۴۳.۱. کلاس گروه‌های پوچتوان نسبت به توسیع بسته نیست. به عنوان مثال فرض کنیم $G = S_3$ و $P \in Syl_3(G)$. در این صورت $|P| = 3$ و $|\frac{G}{P}| = 2$. بنابراین P و $\frac{G}{P}$ هر دو آبلی و لذا پوچتوان‌اند، در حالی که $G = S_3$ پوچتوان نیست.

قضیه ۴۴.۱. فرض کنیم $\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$ یك سری مرکزی برای گروه پوچتوان G باشد. در این صورت

الف) به ازای هر $i \leq n$، $\gamma_i(G) \leq G_{n-i+1}$ که در آن $\gamma_{n+1}(G) = 1$.

ب) به ازای هر $i \leq n$، $G_i \leq Z_i(G)$ که در آن $Z_n(G) = G$.

ج) کلاس پوچتوانی G برابر طول سری مرکزی بالایی و طول سری مرکزی پایینی است.

اثبات. الف) از استقراء روی i استفاده می‌کنیم. به ازای $i = 1$ حکم برقرار است. فرض کنیم برای i حکم برقرار باشد. چون $\frac{G_{n-i+1}}{G_{n-i}} \subseteq \frac{G}{G_{n-i}}$، لذا $[G_{n-i+1}, G] \leq G_{n-i}$. بنابراین با توجه به فرض استقراء، برای $i+1$ داریم

$$\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G] \leq [G_{n-i+1}, G] \leq G_{n-i}.$$

ب) استقراء روی i را برای اثبات بکار می‌گیریم. چون سری مذکور یك سری مرکزی است، لذا به ازای هر i، $\frac{G_{i+1}}{G_i} \subseteq Z(\frac{G}{G_i})$. بنابراین $\left[\frac{G_{i+1}}{G_i}, \frac{G}{G_i}\right] = 1$. در این صورت $[G_{i+1}, G] = G_i$. اکنون بنابه فرض استقراء $[G_{i+1}, G] \leq Z_i(G)$. لذا $\frac{[G_{i+1}, G]}{Z_i(G)} = 1 = \left[\frac{G_{i+1}}{Z_i(G)}, \frac{G}{Z_i(G)}\right]$. در نتیجه $\frac{G_{i+1}}{Z_i(G)} \leq Z(\frac{G}{Z_i(G)}) = \frac{Z_{i+1}(G)}{Z_i(G)}$. بنابراین $G_{i+1} \leq Z_{i+1}(G)$ و حکم برقرار است.

ج) با توجه به (الف) و (ب) حکم بدست می‌آید. □

تذکر ۴۵.۱. گروه G پوچتوان از کلاس حداکثر c است اگر و تنها اگر $\gamma_{c+1}(G) = 1$. همچنین اگر

G از کلاس دقیقاً c باشد، آنگاه $\gamma_c(G) \subset Z(G)$ و $\frac{G}{Z(G)}$ پوچتوان از کلاس دقیقاً $c - ۱$ است.

قضیه ۴۶.۱. هر p-گروه متناهی پوچتوان است.

اثبات. استقراء روی مرتبه‌ی G را بکار می‌بریم. فرض کنیم حکم برای p-گروه‌های با مرتبه‌ی کمتر از $|G|$ برقرار باشد. روشن است که $Z(G) \neq ۱$. بنابراین با توجه به فرض استقراء، $\frac{G}{Z(G)}$ پوچتوان و لذا دارای یك سری مرکزی است. اینك همریختی طبیعی $\pi : G \longrightarrow \frac{G}{Z(G)}$ را در نظر می‌گیریم. به وضوح تصویر وارون هر یك از عناصر سری مرکزی مذکور، یك سری مرکزی در G تشکیل می‌دهند. بنابراین G پوچتوان است. □

قضیه ۴۷.۱. فرض کنیم G یك گروه و i, j اعداد طبیعی باشند. در این صورت

الف) $[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \leq \gamma_{i+j}(G)$.

ب) اگر $i \leq j$، آنگاه $[\gamma_i(G), Z_j(G)] \leq Z_{j-i}(G)$.

ج) $Z_i(\frac{G}{Z_j(G)}) = \frac{Z_{i+j}(G)}{Z_j(G)}$.

اثبات. قضیه‌ی ۵.۱.۱۱ از [۲۱] را ببینید. □

قضیه ۴۸.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت به ازای هر i، $G^{(i)} \leq \gamma_{۲^i}(G)$. همچنین اگر G پوچتوان از کلاس c باشد، آنگاه طول مشتق آن حداکثر $[log_۲ c] + ۱$ است.

اثبات. ابتدا به وسیله‌ی استقراء روی i، نشان می‌دهیم که به ازای هر i, j، $\gamma_i(\gamma_j(G)) \leq \gamma_{ij}(G)$. بنابه تعریف به ازای $i = ۱$، $\gamma(\gamma_j(G)) = \gamma_j(G)$. فرض کنیم حکم برای i برقرار باشد. حال برای $i + ۱$ با توجه به قضیه‌ی ۴۷.۱(الف) داریم:

$$\gamma_{i+۱}(\gamma_j(G)) = [\gamma_i(\gamma_j(G)), \gamma_j(G)] \leq [\gamma_{ij}(G), \gamma_j(G)] \leq \gamma_{(i+۱)j}(G).$$

بنابراین $\gamma_i(\gamma_j(G)) \leq \gamma_{ij}(G)$. از طرفی می‌دانیم $G^{(i)} = \gamma_2(\cdots(\gamma_2(G))\cdots)$ ، که γ_2، i بار تکرار می‌شود. در نتیجه $G^{(i)} \leq \gamma_{2^i}(G)$.

فرض کنیم G پوچتوان از کلاس $c > 0$ و d طول مشتق باشد. در این صورت اگر $c + 1 \leq 2^i$، آنگاه $G^i \leq \gamma_{2^i}(G) \leq \gamma_{c+1}(G) = 1$ که $[log_2 c] + 1$، کوچک‌ترین مقدار i می‌باشد. بنابراین $d \leq [log_2 c] + 1$. □

لم ۴۹.۱. فرض کنیم G گروهی پوچتوان و H زیر مجموعه سره آن باشد. در این صورت $H \subset N_G(H)$.

اثبات. فرض کنیم G پوچتوان از کلاس c باشد. در این صورت $Z_c(G) = G$. n را بزرگ‌ترین عدد طبیعی در نظر می‌گیریم که $Z_n(G) \leq H$. به این ترتیب $Z_n + 1(G)$ مشمول در H نیست. فرض کنیم $g \in Z_{n+1}(G) - H$. نشان می‌دهیم $g \in N_G(H)$.

می‌دانیم $Z(\frac{G}{Z_n(G)}) = \frac{Z_n + 1(G)}{Z_n(G)}$. در این صورت به ازای هر $x \in G$،

$$gZ_n(G)xZ_n(G) = xZ_n(G)gZ_n(G).$$

لذا $gxZ_n(G) = xgZ_n(G)$. در نتیجه $g^{-1}x^{-1}gx \in Z_n(G)$. قرار می‌دهیم $g^{-1}x^{-1}gx = t$. در این صورت $g^{-1}xg = x^{-1}t$. حال x را دلخواه از H انتخاب می‌کنیم. بنابراین $g^{-1}xg = x^{-1}t \in H$. که این یعنی $g^{-1}Hg = H$. در نتیجه $g \in N_G(H)$. □

نتیجه ۵۰.۱. هر زیرگروه ماکسیمال از یک گروه پوچتوان، نرمال است.

قضیه ۵۱.۱. گروه متناهی G پوچتوان است اگر و تنها اگر به صورت حاصل ضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلویش باشد.