وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی محض

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض گرایش هندسه

عنوان:

ساختارهای دو-هامیلتونی
و تکینگی‌های سیستم‌های انتگرال‌پذیر

استاد راهنما:
دکتر قربانعلی حقیقت‌دوست

استاد مشاور:
دکتر اسمعیل عابدی

پژوهشگر:
رمیسا کرمی

مهر ۱۳۹۰

تبریز، ایران

تقدیم به

پدر بزرگوار و مادر مهربانم

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

سپاس گزاری...

حمد بی‌پایان خداوند منان را که ما را لایق معلمانی دانسته که عظمت آنان بی‌منتها، هدایتشان بی‌نظیر و هم‌نوایی با آنان سعادت است.

بر خود لازم می‌دانم از زحمات بی‌دریغ اسطوره‌های مهربانی، پدر و مادر بزرگوارم صمیمانه تشکر کنم و بر دستان پر عطوفت این دو عزیز بوسه‌ی عشق نهم.

از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر قربانعلی حقیقت دوست که با راهنمایی و مساعدت عالمانه‌ی خود راه‌گشای این پژوهش گشتند و مرا قدم به قدم تا به انجام رسانیدن این پروژه هدایت کردند، صمیمانه سپاس گزاری می کنم.

همچنین از جناب آقای دکتر اسمعیل عابدی استاد مشاور عزیزم که با دلسوزی مرا در تدوین این پایان‌نامه یاری رساندند کمال تشکر را دارم.

از همراهی‌های بی‌دریغ استاد گرانقدر جناب آقای دکتر ناصر آقازاده با احترام سپاسگزارم.

از منصور مهربانم، همراه و حامی مصمم من در تمام دوران ارشد و تدوین پایان‌نامه که با گرمی لبخند صبورانه‌اش سختی‌های این راه را بر من آسان نمود بی‌نهایت ممنونم.

در پایان از دیگر اعضای خانواده‌ام که همواره در تمام مراحل تحصیل مشوق من بودند تشکر می‌نمایم.

رمیسا کرمی

چکیده

یک سیستم هامیلتونی روی یک خمینه‌ی پواسون M، در صورتی انتگرال‌پذیر نامیده می‌شود که شامل تعداد کافی انتگرال اول $f_1, ..., f_s$ باشد، به طوری که این انتگرال‌ها دوبه‌دو جابه‌جا شوند و تقریباً همه‌جا روی M مستقل تابعی باشند. در این پایان‌نامه ساختار مجموعه‌ی تکین K که در آن دیفرانسیل‌های $df_1, ..., df_s$ وابسته‌ی خطی می‌شوند را مطالعه می‌کنیم و نشان می‌دهیم در سیستم‌های دو-هامیلتونی، این ساختار، با ویژگی‌های دسته‌ی براکت‌های پواسون سازگار متناظر ارتباط تنگاتنگی دارد.

هدف اصلی ما شرح این ارتباط است بدین منظور که نشان دهیم رویکرد دو-هامیلتونی در مطالعه‌ی تکینگی‌های سیستم‌های انتگرال‌پذیر بسیار مؤثر است، به ویژه در حالت‌هایی با درجه آزادی بالا که استفاده از دیگر روش‌ها، منجر به مشکلات محاسباتی می‌شود. از آنجا که ساختار دو-هامیلتونی، یک تعبیر جبری طبیعی دارد، فناوری به کار رفته در این پایان‌نامه به ما اجازه می‌دهد که مسائل توپولوژیکی و تحلیلی مربوط به پویایی‌های سیستم را به زبان جبری محض فرمول‌بندی کنیم، که منجر به پاسخ‌های ساده می‌شود.

کلمات کلیدی

سیستم‌های هامیلتونی انتگرال‌پذیر، ساختارهای پواسون سازگار، لایه‌بندی‌های لاگرانژی، انشعاب‌ها، جبرهای لی نیم‌ساده

فهرست مطالب

فصل ۱
مقدمات و پیش نیازها

۱.۱ گروه لی و جبر لی

گروه های لی در حد فاصل بین دو شاخه‌ی بزرگ ریاضی، یعنی جبر و توپولوژی قرار دارند. ویژگی جبری آن‌ها از اصول موضوعه گرفته می‌شود و خواص هندسی آن‌ها از پارامتریزه کردن این گروه‌ها به وسیله‌ی نقاطی از خمینه‌ی دیفرانسیل‌پذیر تحصیل می‌شود.

تبدیلات پیوسته توسط ماریوس سوفوس لی به عنوان یک ابزار برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی معرفی شدند. این کار لی به تعریف و مطالعه‌ی گروه‌های لی منجر شد. او دریافت که ساختار گروه مربوط به معادلات دیفرانسیل معمولی مشخص می‌کند که آن معادله قابل حل شدن است یا نه. علاوه بر آن راه و روشی برای حل یا ساده‌تر کردن معادله ارائه می‌دهد. لی در ادامه به بررسی گروه‌هایی از معادلات دیفرانسیل پرداخت که پایا باشند، و پس از آن ادامه‌ی مطالعات مربوطه، منجر به شاخه‌ی گروه‌های لی شد. گروه‌های لی آن‌قدر جالب هستند که خود به تنهایی ابزاری برای حل معادلات دیفرانسیل و مسائل هندسی می‌باشند.

تعریف ۱.۱. یک خمینه‌ی هموارG، **گروه لی**[۱] نامیده می‌شود هرگاه ساختار گروهی‌ای روی آن تعریف شود که اعمال گروهی، یعنی:

$$f(a,b) = a.b \qquad , \qquad s(a) = a^{-1}$$

روی آن، نگاشت‌هایی هموار از G به خودش باشند.

مثال ۲.۱. *خمینه‌ی هموار*

$$E(n) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) |A \in SO(n),\ b \in \mathbb{R}^n \right\} = \{(A,b)\,|A \in SO(n),\ b \in \mathbb{R}^n\,\}$$

با عمل ضرب $(A_1,b_1).(A_2,b_2) = (A_1A_2, A_1b_2{+}b_1)$ *تشکیل یک گروه جبری می‌دهند. همان طور که می‌بینیم عمل ضرب و عمل معکوس* $(A,b)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}b)$ *در* $E(n)$ *هموار می‌باشند. گروه لی* $E(n)$ *را گروه تبدیلات فضای* $\mathbb{R}^n$ *می‌نامیم.*

تعریف ۳.۱. فرض کنید G یک گروه لی باشد. به ازای هر $g \in G$ نگاشت‌های

$$R_g, L_g : G \longrightarrow G$$

به ترتیب با ضابطه‌های $R_g\,(h) = hg,\ \ L_g\,(h) = gh$ **انتقال‌های چپ و راست** نامیده می‌شوند.

تعریف ۴.۱. میدان برداری X روی گروه لی G، **پایای چپ**[۲] نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $g, g' \in G$ داشته باشیم: $(L_g)_* X_{g'} = X_{gg'}$

ملاحظه ۵.۱. *هر میدان برداری را می‌توان به یک میدان برداری پایای چپ تعمیم داد.*

---
[۱] Lie group
[۲] left invariant

ملاحظه ۱.۶. *رابطه‌ی فوق را به طور خلاصه می‌توان به صورت* $(L_g)_* X = X$ *نوشت.*

تعریف ۱.۷. فرض کنید g یک فضای برداری حقیقی باشد، اگر ضرب دوخطی : $[.,.]$ $g \times g \to g$ موجود باشد به طوری که به ازای هر ξ, η, ζ از g در روابط زیر صدق کند:

۱. $[\xi, \eta]$ یک عمل دوخطی است. یعنی:

$$\begin{aligned} [\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2, \beta_1\eta_1 + \beta_2\eta_2] &= \alpha_1\beta_1 [\xi_1, \eta_1] + \alpha_1\beta_2 [\xi_1, \eta_2] \\ &+ \alpha_2\beta_1 [\xi_2, \eta_1] + \alpha_2\beta_2 [\xi_2, \eta_2] \end{aligned}$$

۲. $[\xi, \eta]$ پادمتقارن است:

$$[\xi, \eta] = - [\eta, \xi]$$

۳. اتحاد ژاکوبی برقرار است:

$$[\xi, [\eta, \zeta]] + [\zeta, [\xi, \eta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] = 0$$

آنگاه فضای g با ضرب دوخطی متناظر تشکیل یک **جبر لی**[۳] می‌دهد.[۳۴]

ملاحظه ۱.۸. *مجموعه‌ی میدان‌های برداری پایای چپ روی گروه لی* G *یک فضای خطی (متناهی‌بعد) هم‌بعد با* G *تشکیل می‌دهد. این فضا جبر لی گروه لی* G *نامیده می‌شود.*

ملاحظه ۱.۹. *جبر لی یک گروه لی از چهار روش معادل محاسبه می‌شود:*

[۳] Lie algebra

۱. با استفاده از زیرگروه‌های یک پارامتری

۲. با استفاده از میدان‌های برداری چپ پایا

۳. عمل‌های چپ پایا از گروه $\mathbb{R}$

۴. بردارهای مماس بر عنصر یکه‌ی گروه

مثال ۱۰.۱. نشان می‌دهیم که $SO(n) = \{A_{n\times n}|AA^T = I,\ detA = 1\}$ یک گروه لی است و سپس جبر لی آن را حساب می‌کنیم. مجموعه‌ی ماتریس‌های متعامد $n\times n$ را با $O(n)$ نشان می‌دهیم. $O(n)$ یک گروه لی است.

تابع $f : O(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(A) = det(A)$ را در نظر بگیرید. f یک هومومورفیسم گروه‌های جبری است ونیز داریم: $SO(n) = f^{-1}(1)$. پس $SO(n)$ یک زیرگروه بسته از $O(n)$ و درنتیجه یک گروه لی است. حال فرض کنید $\alpha(t) \subseteq SO(n)$ یک خم هموار باشد که $\alpha(0) = I$ و $\frac{d\alpha(t)}{dt}|_{t=0} = B$ که B یک ماتریس $n\times n$ است. در این صورت داریم: $\alpha(t).\alpha(t)^{-1} = I$. با مشتق‌گیری از این رابطه خواهیم داشت:

$$\frac{d\alpha(t)}{dt}.\alpha(t)^{-1} + \alpha(t).\frac{d\alpha(t)^{-1}}{dt} = 0$$

و در $t = 0$ داریم: $B + B^{-1} = 0$.

بنابراین جبر لی گروه $SO(n)$ برابر با مجموعه‌ی ماتریس‌های $n\times n$ پادمتقارن می‌باشد.

تعریف ۱۱.۱. فرض کنید M یک خمینه‌ی هموار، $\chi(M)$ مجموعه‌ی همه‌ی میدان‌های برداری هموار روی M و $f \in C^\infty(M)$ باشد. کروشه‌ی لی روی $\chi(M)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[X, Y]_p = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$$

که $X, Y \in \chi(M)$.

گزاره ۱.۱۲. *کروشه‌ی لی روی $\chi(M)$ دارای ویژگی‌های زیر است:*

۱. $[.,.]$ دوخطی است، یعنی برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\begin{aligned}[a_1X_1 + b_1Y_1, a_2X_2 + b_2Y_2] &= a_1a_2\,[X_1, X_2] + a_1b_2\,[X_1, Y_2] \\ &+ b_1a_2\,[Y_1, X_2] + b_1b_2\,[Y_1, Y_2]\end{aligned}$$

۲. $[.,.]$ پادمتقارن است. یعنی $[X, Y] = -[Y, X]$. بنابراین $[X, X] = 0$؛

۳. اتحاد ژاکوبی برای هر X, Y, Z برقرار است:

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$$

۴. $[.,.]$ روی توابع هموار خطی نیست:

$$[fX, gY] = fg\,[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

برهان. [۳۶] $\square$

تعریف ۱.۱۳. فرض کنید G یک گروه لی و M یک خمینه‌ی هموار باشد. نگاشت هموار $\theta : G \times M \longrightarrow M$ را که در شرایط:

۱. $\theta(e, x) = x$

۲. $\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1g_2, x)$

صدق کند، یک **عمل**[۴] گروه لی G روی خمینه‌ی M می‌نامند.

[۴] Action

ملاحظه ۱۴.۱. *$\theta(g,x)$ را معمولاً با نماد gx نشان می‌دهند، یعنی:*

$$\theta(g,x) = gx.$$

مثال ۱۵.۱. *$E(n) = SO(n) \oplus \mathbb{R}^n$ گروه لی تبدیلات فضای $\mathbb{R}^n$ را در نظر می‌گیریم. نگاشت*

$$\theta : E(n) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\theta\left((A,v), X\right) = AX + v$$

یک عمل گروه لی $E(n)$ روی منیفلد $\mathbb{R}^n$ خواهد بود. زیرا:

۱.

$$eX = (I,0)X = IX + 0 = X$$

۲.

$$(A_1,v)((A_2,w)X) = (A_1,v)(A_2X + w)$$

$$= A_1A_2X + A_1w + v = ((A_1,v)(A_2,w))X$$

تعریف ۱۶.۱. هرگاه $\theta : G \times M \longrightarrow M$ یک عمل گروه لی G روی منیفلد هموار M باشد، برای هر $x \in M$، **مدار**[۵] x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$O(x) = \{gx \mid g \in G\}$$

و اگر $O(x) = M$ باشد، عمل θ را **متعدی**[۶] می‌نامند.

[۵] Orbit
[۶] Transitive

ملاحظه ۱.۱۷. *رابطه‌ی هم‌ارزی*

$$x \sim y \iff y \in O(x)$$

خمینه‌ی M را به مدارهای دوبه‌دو مجزا افراز می‌کند.

تعریف ۱.۱۸. فرض کنید G یک گروه لی، V یک فضای برداری و $GL(V)$ مجموعه تمام تبدیلات خطی معکوس‌پذیر باشد. در این صورت هر همومورفیسم $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ را یک **نمایش**[۷] گروه لی G روی فضای برداری V گویند.

ملاحظه ۱.۱۹. *نمایش $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ را می‌توان یک عمل گروه لی G روی فضای V در نظر گرفت. زیرا:*

۱.

$$eX = \rho(e)X = id(X) = X$$

۲.

$$g_1(g_2X) = \rho(g_1)(\rho(g_2)X) = \rho(g_1g_2)X = (g_1g_2)X$$

تعریف ۱.۲۰. اگر G گروه لی و $\mathfrak{g}$ جبر لی متناظر با آن باشد، به ازای هر $g \in G$، نگاشت A_g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_g : G \longrightarrow G$$

$$A_g(x) = L_g o R_{g^{-1}}(x) = gxg^{-1}$$

[۷] Representation

تعریف ۲۱.۱. نگاشت

$$Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$$

$$Ad_g(X) = d(A_g)_e(X)$$

یک نمایش گروه لی G روی جبر لی $\mathfrak{g}$ می‌باشد. زیرا:

(الف)

$$Ad_e X = d(A_e)X = X$$

(ب)

$$Ad_{g_1g_2}(X) = d(A_{g_1g_2})_e(X) = d(A_{g_1})_e d(A_{g_2})_e(X) = Ad_{g_1}Ad_{g_2}(X)$$

نگاشت Ad را **نمایش الحاقی**[۸] گروه لی روی جبر لی $\mathfrak{g}$ می‌نامند.

نمایش‌های الحاقی گروه لی، یک نمایش به جبر لی القا می‌کنند:

$$ad = d(Ad)_e : \mathfrak{g} \longrightarrow Hom(\mathfrak{g}),$$

$$ad_X(Y) = [X, Y].$$

حال فرض کنید

$$\mathfrak{g}^* = \{f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R} | \text{خطی است } f\}$$

نمایش هم‌الحاقی[۹] گروه لی G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ad^* : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g}^*)$$

[۸] Adjoint representation
[۹] Coadjoint representation

$$Ad_a^*:\mathfrak{g}^*\longrightarrow\mathfrak{g}^*$$
$$Ad_a^*(f)(X)=f(Ad_{a^{-1}}X)$$

دیفرانسیل این نمایش، نمایش هم‌الحاقی نامیده می‌شود:

$$ad^*:\mathfrak{g}\longrightarrow Hom(\mathfrak{g}^*)$$
$$(ad_X^*f)(Y)=f(ad_X(Y))=f([X,Y]),\quad X,Y\in\mathfrak{g},\quad f\in\mathfrak{g}^*.$$

ما بیشتر با مدارهای هم‌الحاقی Ad^* سروکار داریم. توجه کنید که مدارهای Ad و Ad^* در حالت کلی متفاوتند.[۳۵]

مثال ۲۲.۱. *فرض کنید G گروه تبدیلات آفین از خط حقیقی باشد. به عبارت دیگر:*

$$G=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}|a\neq 0,\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

در این صورت داریم:

$$\mathfrak{g}=T_eG=\left\{\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\},\qquad Ad_a\xi=a\xi a^{-1},\ a\in G,\ \xi\in\mathfrak{g}$$

اگر $\xi=\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ a=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ آن‌گاه:

$$Ad_a\xi=\begin{pmatrix}\xi_1 & a_1\xi_2-\xi_1a_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

بنابراین فرم ضمنی نمایش الحاقی Ad به این صورت است:

$$\begin{cases}\eta_1=\xi_1\\ \eta_2=\xi_2a_1-\xi_1a_2\end{cases}$$

و مدارها خطوط موازی محور عمودی در صفحه می‌باشند. اکنون می‌توانیم مدارهای نمایش هم‌الحاقی را به دست آوریم.
پایه‌ی $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ از G را در نظر بگیرید. f_1 و f_2 را پایه‌ی $\mathfrak{g}^*$ در نظر بگیرید به طوری که $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. اگر x_1 و x_2 یک مختصات در این پایه باشند، با یک محاسبه‌ی ساده خواهیم داشت:

$$Ad^*_{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}(x_1, x_2) = (x_1 - x_2a_2, x_2a_1)$$

درنتیجه مدار Ad^* مجموعه‌ای از نقاط مجزا در صفحه می‌باشد.

۲.۱ هندسه‌ی سیمپلکتیک

تعریف ۲۳.۱. فرض کنید M یک خمینه‌ی هموار باشد. یک **۲-فرم** روی M نگاشتی دوخطی مانند:

$$\varphi : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

است، که $p \in M$، T_pM فضای مماس بر M در نقطه‌ی p و $\mathbb{R}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

تعریف ۲۴.۱. فرض کنید V یک فضای برداری (حقیقی یا مختلط) با بعد متناهی و $e_1, ..., e_n$ پایه‌ای برای آن باشد. فرم دوخطی ناتباهیده و پادمتقارن

$$\omega(a, b) = \sum \omega_{ij}a^ib^j$$

که در آن $a = (a_i),\ b = (b_j),\ a, b \in V$ را یک **ساختار سیمپلکتیک**[۱۰] و (V, ω) را یک **فضای سیمپلکتیک** می نامیم.

ملاحظه ۲۵.۱. *اگر پایه‌ی $e_1, ...e_m$ را در V در نظر بگیریم، آن‌گاه ω به صورت منحصر به فرد بر حسب ماتریس $\Omega = (\omega_{ij})$ بیان می‌شود که مؤلفه‌های آن به صورت $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$ می‌باشند.این ماتریس ناتباهیده و پادمتقارن است، از این مطلب بلادرنگ نتیجه می‌شود که بعد فضای سیمپلکتیک V زوج است.*

$$det\Omega = det\Omega^T = det(-\Omega) = (-1)^m det\Omega$$

که $m = dimV$.

گزاره ۲۶.۱. *در فضای سیمپلکتیک V با بعد $2n$ ، یک پایه‌ی $e_1, ...e_n, f_1, ...f_n$ وجود دارد که ماتریس Ω در آن به فرم زیر است:*

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

که $E = E_n$ ماتریس همانی $(n \times n)$ است.

چنین پایه‌ای، پایه‌ی سیمپلکتیک یا کانونی نامیده می‌شود.

تعریف ۲۷.۱. زیرفضای L در V **ایزوتروپیک**[۱۱] نامیده می‌شود، هرگاه فرم ω روی L متحد با صفر شود، یعنی $\omega(a, b) = 0$ به ازای هر $a, b \in L$. زیرفضای ایزوتروپیک ماکسیمال، زیرفضای **لاگرانژین**[۱۲] نامیده می‌شود.

[۱۰] Symplectic structure
[۱۱] Isotropic
[۱۲] Lagrangian

تعریف ۲۸.۱. فرض کنیم V و V' دو فضای سیمپلکتیک باشند که دارای بعد یکسانند. اگر ایزمورفیسم خطی $h : V \longrightarrow V'$ وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر دو بردار a و b از فضای V داشته باشیم $\omega(a, b) = \omega'(ha, hb)$، آن‌گاه دو فضای V و V' را **ایزومورف** می‌نامیم.

تعریف ۲۹.۱. اگر تبدیل خطی $g : V \to V$ ساختار سیمپلکتیک ω را حفظ کند، یعنی به ازای هر دو بردار a, b داشته باشیم:

$$\omega(a, b) = \omega(ga, gb)$$

در این صورت g یک **تبدیل سیمپلکتیک** نامیده می‌شود.

تعریف ۳۰.۱. گروه تشکیل شده توسط تمامی تبدیلات سیمپلکتیک $g : V \to V$ را **گروه سیمپلکتیک**[۱۳] می‌نامیم و آن را با $Sp(2n, \mathbb{R})$ (در صورت مختلط بودن با $Sp(2n, \mathbb{C})$) نمایش می‌دهیم که در آن $2n = dimV$.

تعریف ۳۱.۱. **ساختار سیمپلکتیک** روی خمینه‌ی هموار M ، یک ۲-فرم دیفرانسیلی ω است که در دو شرط زیر صدق می‌کند:

(الف) ω بسته است. یعنی $d\omega = 0$، که در آن d عملگر دیفرانسیل است.

(ب) ω در هر نقطه‌ی خمینه، ناتباهیده است، یعنی در مختصات موضعی $det\Omega(x) \neq 0$، که $\Omega(x) = (\omega_{ij}(x))$ ماتریس فرم است.

خمینه‌ای که ساختار سیمپلکتیک روی آن تعریف شده است را **خمینه‌ی سیمپلکتیک**[۱۴] می‌نامیم.

[۱۳] Symplectic group

[۱۴] Symplectic manifold

قضیه ۱.۳۲. *خمینه‌ی سیمپلکتیک زوج بعدی است.*

برهان. [۳۲] □

تعریف ۱.۳۳. زیرخمینه‌ی T از خمینه‌ی سیمپلکتیک M^{2n} را لاگرانژین گوییم، هرگاه n-بعدی بوده و فرم سیمپلکتیک روی آن متحد با صفر باشد.

تعریف ۱.۳۴. فرض کنید H تابعی هموار روی خمینه‌ی سیمپلکتیک M باشد. **بردارگرادیان پادمتقارن** $sgrad\ H$ برای این تابع را با استفاده از رابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

$$\omega(v, sgrad\ H) = v(H)$$

که v یک بردار مماس دلخواه است.

در مختصات موضعی مؤلفه‌های $sgrad\ H$ به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$(sgrad\ H)^i = \sum \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}$$

که ω^{ij} ها مؤلفه‌های ماتریس معکوس Ω می‌باشند.

قضیه ۱.۳۵. ***قضیه‌ی داربوکس***[۱۵] *فرض کنید* (M^{2n}, ω) *یک خمینه‌ی سیمپلکتیک باشد. دراین‌صورت برای هر* $x_0 \in M$ *، همسایگی‌ای با مختصات کانونی*

$$p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$$

از x_0 *موجود است که در آن* $\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$.

[۱۵] Darboux theorem