دانشگاه یاسوج، دانشکده علوم

نظریه‌ی طیفی عملگرها و زیرفضاهای ابردوری

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد ریاضی محض (گرایش آنالیز)

فاطمه هاشمی

استاد راهنما

دکتر حمید رضایی

تیر ۱۳۹۰

دانشگاه یاسوج، دانشکده علوم

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد ریاضی محض (گرایش آنالیز) خانم فاطمه هاشمی

تحت عنوان

نظریه‌ی طیفی عملگرها و زیرفضاهای ابردوری

در تاریخ ۱۳۹۰/۴/٦ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ — استاد راهنما	دکتر حمید رضایی (استادیار)
۲ — استاد مشاور	دکتر محمدتقی حیدری (استادیار)
۳ — استاد داور خارجی	دکتر بهمن یوسفی (استاد)
۴ — استاد داور داخلی	دکتر حسن آزادی کناری (استادیار)

با تشکر از

فهرست مطالب

چکیده:

بردار x در فضای هیلبرت H برای عملگر کراندار $T; H \longmapsto H$ ابردوری نامیده می‌شود اگر مدار $\{T^n x : n \geqslant ۱\}$ در H چگال باشد. نتیجه‌ی اصلی این پایان‌نامه بیان می‌کند که اگر عملگر T در محک ابردوری صدق کند و طیف اساسی دیسک یکّه‌ی بسته را قطع کند، آنگاه زیرفضای بسته‌ی نامتناهی‌البعد از بردارهای ابردوری به‌جز صفر برای T وجود دارد. عکس این نتیجه برقرار است حتی اگر T یک عملگر ابردوری باشد به طوری که در محک ابردوری صدق بکند. به عنوان یک نتیجه، خصوصیات دیگر عملگر T با داشتن زیرفضای بسته‌ی نامتناهی‌البعد از بردارهای ابردوری به‌دست می آید. این نتایج بر اغلب عملگرهای ابردوری که در نوشته‌های علمی ظاهر شده‌اند اعمال می‌شود. در حالت خاص، این نتایج بر انتقال‌های وزنی به عقب، انتقال‌هی وزنی دوطرفه، جمع همانی با انتقال وزنی به عقب $(I + T)$، عملگرهای ضربی و عملگرهای ترکیبی اعمال می‌شود. همچنین نتیجه‌ی اصلی بر عملگرهای مشتق‌پذیر و عملگرهای انتقال $T : f(z) \longmapsto f(Z + ۱)$ که روی فضای هیلبرت مشخص شامل تابع‌های تام تعریف می‌شود اثر می‌کند.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل، سعی شده است تمام تعاریف و قضایای مقدماتی را که بعداً از آنها استفاده می‌شود بیان شود.

۱—۱ فضاهای برداری توپولوژیک

تعریف ۱.۱ (فضای برداری توپولوژیک): فرض کنیم τ یک توپولوژی روی فضای برداری X باشد به طوری که

الف) به ازای هر $x \in X$، مجموعه‌ی $\{x\}$ بسته باشد.

ب) اعمال فضای برداری نسبت به τ پیوسته باشد.

در این صورت، گوییم τ یک توپولوژی برداری بر X است و X یک فضای برداری توپولوژیک است.

تعریف ۲.۱ (مجموعه‌ی کراندار در فضای برداری توپولوژیک): اگر X یک فضای برداری توپولوژیک باشد، $E \subset X$ را کراندار گوییم، هرگاه به ازای هر همسایگی از صفر مانند V، عدد حقیقی مانند $\delta > 0$ چنان موجود باشد که به ازای هر $t > \delta$ داشته باشیم $E \subseteq tV$.

تعریف ۳.۱ (فضای نرم‌دار): فضای برداری X را نرم‌دار گوییم هرگاه به هر $x \in X$ عدد حقیقی و نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط باشد که

الف) به ازای هر $x, y \in X$، $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

ب) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، آنگاه $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

ج) $x \neq 0$، $\|x\| > 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

بر فضای نرم‌دار X یک متر بر حسب نرم $\|.\|$ به‌صورت $d(x,y) = \|x-y\|$ تعریف می‌کنیم. با توجه به خواص نرم، d یک متر بر X است. گوییم دنباله‌ی $\{x_n\}$ در X در نرم همگراست اگر

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0.$$

یعنی $\{x_n\}$ نسبت به فاصله‌ی القاشده به وسیله‌ی نرم همگرا به x باشد.

تعریف ۴.۱ (فضای جدایی‌پذیر[۱]): اگر X یک فضای نرم‌دار باشد، آنگاه X یک فضای جدایی‌پذیر است، اگر دارای یک زیرمجموعه‌ی چگال شمارا باشد.

تعریف ۵.۱ (فضای باناخ[۲]): فضای نرم‌دار X که نسبت به متر القا شده به وسیله‌ی نرمش یک فضای تام است، یک فضای باناخ نام دارد. یعنی X یک فضای باناخ است اگر به ازای هر دنباله‌ی کشی $\{x_n\}$ از X، عنصری مانند $x \in X$ موجود باشد به طوری که $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$. لذا فضاهای باناخ نمونه‌های خاصی از فضاهای متری تام هستند.

تعریف ۶.۱ (فضای ضرب داخلی): فضای برداری مختلط H را یک فضای ضرب داخلی می‌نامیم، اگر به هر زوج مرتب از بردارهای x و y در H یک عدد مختلط مانند $\langle x, y\rangle$ به نام

[۱] Separable
[۲] Banach

حاصل‌ضرب داخلی یا حاصل‌ضرب اسکالر x و y چنان مربوط شده باشد که شرایط زیر برقرار باشد.

الف) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ (علامت بار نشانگر مزدوج عدد مختلط است.)

ب) اگر $x,y,z \in H$، آنگاه $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$.

ج) اگر $x,y \in H$ و α اسکالر باشد، آنگاه $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$.

د) به‌ازای هر $x \in H$، $\langle x,x\rangle \geqslant ۰$.

ه) $\langle x,x\rangle = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$.

بنابراین به‌ازای y، $\langle x,y\rangle$ یک تابع خطّی از x است و به ازای x ثابت، یک تابع خطّی مزدوج از y است. گاهی این توابع دومتغیّره را یک و نیم‌خطّی می‌نامیم.

بنا بر (ه) می‌توان $\|x\|$ یعنی نرم بردار $x \in H$ را ریشه دوم نامنفی $\langle x,x\rangle$ تعریف کرد. لذا

$$\|x\|^{۲} = \langle x,x\rangle.$$

تعریف ۷.۱ (فضای هیلبرت[۳]): اگر یک فضا با ضرب داخلی تام باشد، آن را فضای هیلبرت می‌گوییم.

تذکر **۸.۱** : هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ است.

تعریف ۹.۱ (مجموعه‌ی G_δ): یک مجموعه را G_δ گوییم هرگاه اشتراک شمارش‌پذیری از مجموعه‌های باز باشد.

تعریف ۱۰.۱ (مجموعه‌ی اندازه‌پذیر): زیرمجموعه‌ی $E \subseteq X$ را اندازه‌پذیر گوییم هرگاه به ازای هر $A \subseteq X$ داشته باشیم

$$\mu(A) = \mu(A\cap E) + \mu(A \cap E^c).$$

[۳] Hilbert

تعریف ۱۱.۱ (اندازه‌ی مثبت): یک اندازه‌ی مثبت تابعی است مانند μ که بر یک σ−جبر مانند Ω تعریف شده است. بردش در $[0,\infty]$ است و جمعی‌شمارش‌پذیر می‌باشد. این یعنی هرگاه $\{A_i\}$ گردایه‌ای شمارش‌پذیر و از هم جدا از اعضای Ω باشد، آنگاه

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

تعریف ۱۲.۱ (تابع اندازه‌پذیر): تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را اندازه‌پذیر گوییم اگر به ازای هر زیرمجموعه‌ی باز $O \subset \mathbb{R}$، $f^{-1}(O)$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۱۳.۱ (فضای $L^p(\mu)$): فرض کنیم (X,Ω,μ) یک فضای اندازه باشد و $0 < p < \infty$. در این صورت، گردایه‌ی همه‌ی توابع اندازه‌پذیر مانند f را به طوری که $|f|^p$ انتگرال‌پذیرباشد، با $L^p(\mu)$ یا $L^p(X)$ یا حتّی با $L^p(X,\Omega,\mu)$ نشان می‌دهیم. $L^p(\mu)$ فضای برداری است و به ازای هر $f \in L^p(\mu)$ قرار می‌دهیم:

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

عدد $\|f\|_p$ را L_p−نرم f می‌نامیم.

گردایه‌ی همه‌ی توابع اندازه‌پذیر به‌طور اساسی کراندار را با $L^\infty(\mu)$ نشان می‌دهیم.

اگر $0 < p < \infty$ آنگاه ℓ^p از دنباله‌هایی مانند $x = (x_1, x_2, \cdots)$ تشکیل شده است به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ در این وضع، داریم $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

به همین ترتیب ℓ^∞ فضای برداری همه‌ی دنباله‌های کراندار، مجهّز به نرم سوپریمم (sup) است.

تعریف ۱۴.۱ (نامساوی کشی شوارتز[۴]): اگر $\langle .,. \rangle$ یک ضرب داخلی روی فضای برداری X باشد، آنگاه نامساوی زیر به نامساوی کشی شوارتز معروف است.

$$|\langle x,y \rangle|^2 \leqslant \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle.$$

[۴] Cauchy-schwarz

تعریف ۱۵.۱ (نامساوی بسل[۵]**):** اگر $\{e_n; n \in V\}$ یک مجموعه‌ی متعامد یکّه در فضای هیلبرت H باشد، آنگاه نامساوی زیر به نامساوی بسل معروف است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, e_n\rangle|^2 \leqslant \|h\|^2.$$

قضیه ۱۶.۱ : اگر E یک مجموعه‌ی متعامد در فضای هیلبرت H باشد، آنگاه گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

الف) E یک پایه برای H است.

ب) اگر $h \in H$، آنگاه $h = \sum_{e\in E} \langle h, e\rangle e$.

ج) اگر $h, g \in H$، آنگاه $\langle h, g\rangle = \sum\{\langle h, e\rangle\overline{\langle g, e\rangle}; e \in E\}$.

د) اگر $h \in H$، آنگاه

$$\|h\|^2 = \sum\{|\langle h, e\rangle|^2; e \in E\}.$$

تساوی اخیر را اتّحاد پارسوال[۶] گویند.

تعریف ۱۷.۱ (سری فوریه[۷]**):** به ازای هر $f \in L^1(\mathbb{T})$ ($\mathbb{T}$ دایره‌ی یکّه در صفحه‌ی مختلط است.) ضریب فوریه‌ی f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt,$$

که $n \in \mathbb{Z}$. بدین ترتیب به هر $f \in L^1(\mathbb{T})$ تابع $\hat{f}$ بر $\mathbb{Z}$ را مربوط می‌سازیم. سری فوریه عبارتست از:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{int}$$

و مجموع‌های جزئی‌اش عبارتند از: $S_N(t) = \sum_{-N}^{+N} \hat{f}(n)e^{int}$، که $N = 0, 1, 2, \cdots$.

چون $L^2(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T})$، فرمول ضریب فوریه را می‌توان بر هر $f \in L^2(\mathbb{T})$ اعمال کرد.

---
[۵] Besel inequality
[۶] Parseval's identity
[۷] Fourier series

تعریف ۱.۱۸ : فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک با توپولوژی τ باشد، آنگاه
الف) X را یک $F-$فضامی‌نامیم هرگاه متریکی پایا مانند d سازگار با τ وجود داشته باشد.
ب) X را یک فضای موضعاً محدّب می‌نامیم هرگاه یک پایه‌ی موضعی که عناصرش محدّب باشند برای X موجود باشد.
ج) X را یک فضای فرشه می‌نامیم هرگاه X یک فضای موضعاً محدّب باشد.
د) X را یک فضای موضعاً فشرده می‌نامیم هرگاه $0 \in X$ یک همسایگی با بستار فشرده داشته باشد.

تعریف ۱.۱۹ (عملگر متقارن): عملگر T متقارن است هرگاه برای هر $x, y \in D(T)$ داشته باشیم:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

تعریف ۱.۲۰ (عملگر کراندار): عملگر $T : H \longmapsto H$ کراندار است هرگاه وجود داشته باشد $M \in \mathbb{C}$ به طوری که

$$\|Tx\| \leqslant M\|x\|.$$

تعریف ۱.۲۱ (عملگر مثبت): فرض کنید $T : H \longmapsto H$ یک عملگر خطّی کراندار باشد. اگر برای هر $x \in H$ داشته باشیم $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$، آنگاه می گوییم T یک عملگر مثبت است و می نویسیم $T \geqslant 0$.

تعریف ۱.۲۲ (هم‌ارز یکانی): اگر A و B عملگرهای کراندار روی فضاهای هیلبرت H و K باشند، آنگاه A و B به‌طور یکانی هم‌ارز هستند اگر یکریختی $U : H \longmapsto K$ موجود باشد به طوری که $UAU^{-1} = B$ و با نماد $A \cong B$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۲۳.۱ (پوچساز یک عملگر): اگر $T : X \longmapsto X$ یک نگاشت خطّی باشد، آنگاه هسته (پوچساز) T به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$N_T := \{x \in X : T(x) = \circ\}.$$

تعریف ۲۴.۱ (مقدار ویژه و بردار ویژه‌ی یک عملگر): اگر $T : X \longmapsto X$ یک نگاشت خطّی باشد، آنگاه $\lambda \in \mathbb{C}$ را یک مقدار ویژه‌ی T گوییم هرگاه بردار غیر صفر $x \in X$ موجود باشد به طوری که

$$Tx = \lambda x.$$

در این حالت، x را یک بردار ویژه می‌گوییم و مجموعه‌ی همه‌ی بردارهای ویژه‌ی T را فضای ویژه‌ی وابسته به λ می‌نامند که یک زیرفضا از X است. این زیرفضا، همان فضای پوچ نگاشت $(T - \lambda I)$ است.

تعریف ۲۵.۱ (فضای دوگان): فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. مجموعه‌ی متشکّل از تابعکهای خطّی پیوسته روی X را با X^* نشان می‌دهیم و آن را دوگان X می‌نامیم. توجه کنید که X^* با نرم

$$\|\Lambda\| = \sup\{|\Lambda x|; \|x\| \leqslant ۱\},$$

که $\Lambda \in X^*$ است، یک فضای باناخ است.

تعریف ۲۶.۱ (عملگر الحاقی): اگر X و Y دو فضای نرم‌دار باشند و $T \in B(X,Y)$ و $f \in Y^*$، آنگاه $foT \in X^*$. حال نگاشت $T^* : Y^* \longmapsto X^*$ با ضابطه‌ی
$T^*(f) = foT \quad (f \in Y^*)$ را عملگر الحاقی T می‌نامیم.
اگر برای هر $\Lambda \in X^*$ و $x \in X$ مقدار Λx را با $\langle x, \Lambda\rangle$ نمایش دهیم، آنگاه

$$T^*(f)(x) = \langle x, T^*(f)\rangle = \langle T(x), f\rangle = (foT)(x).$$

گزاره ۲۷.۱ : اگر T عملگر خطّی کراندار روی فضای هیلبرت H باشد، آنگاه

الف) $\ker T = (\operatorname{Ran} T^*)^\perp$.

ب) $(\operatorname{Ran} T)^\perp = \ker T^*$.

ج) $(\ker T^*)^\perp = \overline{\operatorname{Ran} T}$.

اثبات الف.

اگر $h \in \ker T$، آنگاه به ازای هر $g \in H$ داریم $\langle h, T^*g\rangle = \langle Th, g\rangle$. چون $h \in \ker T$، پس $Th = \circ$. بنابراین

$$\begin{aligned} \langle h, T^*g\rangle &= \langle Th, g\rangle = \langle \circ, g\rangle = \circ \\ &\Rightarrow h \perp Ran\, T^* \\ &\Rightarrow h \in (Ran\, T^*)^\perp \\ &\Rightarrow \ker T \subseteq (Ran\, T^*)^\perp. \end{aligned}$$

برعکس:

$$\begin{aligned} h \in (Ran\, T^*)^\perp &\Rightarrow h \perp Ran\, T^* \\ &\Rightarrow \langle h, T^*g\rangle = \circ \quad \forall g \in H \\ &\Rightarrow \langle Th, g\rangle = \circ \quad \forall g \in H. \end{aligned}$$

یعنی $Th = \circ$. لذا $h \in \ker T$.

اثبات ب.

فرض کنید $h \in (\operatorname{Ran} T)^\perp$، آنگاه

$$h \perp \operatorname{Ran} T \Rightarrow \forall g \in H \quad \langle h, Tg\rangle = \circ \Rightarrow \langle T^*h, g\rangle = \circ.$$

چون به ازای هر $g \in H$، $\langle T^*h, g\rangle = \circ$ بنابراین

$$T^*h = \circ \Rightarrow h \in \ker T^* \Rightarrow (\operatorname{Ran} T)^\perp \subseteq \ker T^*.$$

برعکس:

فرض کنید $h \in \ker T^*$. پس $T^*h = \circ$. لذا به ازای هر $g \in H$

$$\langle T^*h, g\rangle = \circ = \langle h, Tg\rangle$$

$$\Rightarrow \quad h \perp Tg \Rightarrow h \perp Ran\, T$$
$$\Rightarrow \quad h \in (Ran\, T)^{\perp}. \qquad \blacksquare$$

قضیه ۲۸.۱ : برد T بسته است اگر و فقط اگر برد T^* بسته باشد.(در اینجا T^* الحاقی عملگر T است.)

گزاره ۲۹.۱ : اگر $M \leqslant H$ و $H = M \oplus M^{\perp}$ برای $T \in B(H)$، آنگاه T را می‌توان به‌صورت ماتریس ۲×۲ با درایه‌های عملگری $T = \left[\begin{array}{cc} W & X \\ Y & Z \end{array}\right]$ نوشت، که در آن

$$W \in B(M),\ X \in B(M^{\perp}, M),\ Y \in B(M, M^{\perp}),\ Z \in B(M^{\perp}).$$

هر عملگر روی زیرفضا می‌تواند تجزیه‌ی ماتریسی شود.

تعریف ۳۰.۱ : فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $A \subseteq H$. در این صورت، مجموعه‌ی $A^{\perp}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A^{\perp} = \{h \in H; h \perp A\} = \{h \in H; \langle h, a\rangle = ۰ \quad \forall a \in A\}.$$

تعریف ۳۱.۱ (عملگر با رتبه‌ی متناهی[۸]): عملگر T با رتبه‌ی متناهی است اگر بعد $\mathrm{ran}\ T$ متناهی باشد.

تعریف ۳۲.۱ (عملگر فشرده): عملگر T فشرده است اگر $\overline{T(ball\ H)}$ فشرده باشد، که در آن

$$ball\ H = \{x \in H : \|x\| \leqslant ۱\}.$$

مجموعه‌ی عملگرهای فشرده را با $B_{۰}(H)$ نشان می‌دهند.

[۸] Finite rank operator

قضیه **۳۳.۱** : عملگر T فشرده است اگر و فقط اگر دنباله‌ی $\{T_n\}$ از عملگرهای بارتبه‌ی متناهی وجود داشته باشد به طوری که $\|T_n - T\| \to 0$.

قضیه **۳۴.۱** : فرض کنید X یک فضای باناخ و T یک عملگر کراندار با رتبه‌ی متناهی بر X باشد. در این صورت، بردارهای x_1 و x_2 و ... و x_k در X و تابعک‌های y_1 و y_2 و ... و y_k در Y^* موجودند به طوری که $T = \sum_{n=1}^{k} x_n \otimes y_n$ و $x_n \otimes y_n(z) = \langle z, y_n\rangle x_n$.

تعریف **۳۵.۱ (جبر باناخ)**: یک جبر باناخ عبارتست از جبر $\mathcal{A}$ روی $\mathbb{F}$ به همراه $\|.\|$ به طوری که:

الف) $\mathcal{A}$ نسبت به نرم تعریف شده یک فضای باناخ باشد.

ب) به‌ازای هر $x, y \in \mathcal{A}$، $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$.

ج) $\mathcal{A}$ شامل عنصر همانی e است به قسمی که $\|e\| = 1$ و به ازای هر $x \in \mathcal{A}$ داریم $ex = xe = x$.

تعریف **۳۶.۱** : فرض کنید X یک فضای بردای توپولوژیک و موضعاً محدّب باشد و P یک گردایه از نیم‌نرم‌های تعریف شده بر X باشد به طوری که

$$\bigcap_{p\in P}\{x : p(x) = 0\} = 0 \quad (*).$$

اگر $p \in P$ و $x_0 \in X$ و $\varepsilon > 0$، آنگاه تعریف کنید:

$$V(p, x_0, \varepsilon) = \{x \in X; p(x - x_0) < \varepsilon\}.$$

در این صورت، توپولوژی پدید آمده توسّط تمام مجموعه‌هایی به‌شکل فوق را توپولوژی تولید شده توسّط نیم‌نرم‌ها گویند.

توجه کنید که شرط $(*)$ ایجاب می کند که با توپولوژی جدید فضای X هاسدورف باشد.

تعریف **۳۷.۱** : فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. اگر $T \in X^*$ و $x_0 \in X$ و $\varepsilon > 0$، آنگاه تعریف کنید:

$$V(T, x_0, \varepsilon) = \{x \in X; \|T(x - x_0)\| < \varepsilon\}.$$

در این صورت، توپولوژی تولید شده توسّط تمام مجموعه‌های به‌شکل فوق (به عنوان زیرپایه) را توپولوژی ضعیف روی X می‌نامیم.
توجه کنید که اگر $T \in X^*$، آنگاه $p_T(x) = \|Tx\|$ یک نیم‌نرم روی X تعریف می‌کند. بنابراین می‌توان گفت که توپولوژی تولید شده توسط نیم‌نرم‌های $\{p_T; T \in X^*\}$، همان توپولوژی ضعیف روی X می‌باشد.

نتیجه **۳۸.۱** : فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. در این صورت، داریم:
الف) $U \subseteq X$ نسبت به توپولوژی ضعیف باز است اگر و فقط اگر به‌ازای هر $x_\circ \in X$ وجود داشته باشد $\varepsilon > \circ$ و $T_1, T_2, \cdots, T_n \in X^*$ به طوری که

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{x; |T_i(x - x_\circ)| < \varepsilon\} \subseteq U.$$

ب) اگر $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد، آنگاه $\{x_n\}$ همگرای ضعیف به $x \in X$ است اگر و تنها اگر به ازای هر $T \in X^*$، $T(x_n) \to T(x)$.

قضیه **۳۹.۱** **(قضیه‌ی کاتگوری بئر[۹])**: اگر X یک فضای توپولوژیک باشد یا،
الف) یک فضای متریک کامل یا،
ب) یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد.
آنگاه اشتراک شمارای هر گردایه‌ی باز از زیرمجموعه‌های چگال X در X چگال است.

قضیه **۴۰.۱** **(قضیه‌ی هان‌باناخ[۱۰])**: فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد. اگر M یک زیرفضا از X باشد و $f \in M^*$، آنگاه تابعک $F \in X^*$ هست که $F|_M = f$ و $\|f\| = \|F\|$.

تعریف ۴۱.۱ **(زیرفضای پایا و کاهشی)**: اگر $T \in B(H)$ و $M \leqslant H$، آنگاه
الف) M یک زیرفضای پایا برای T است هرگاه $TM \subseteq M$.

[۹] Baire category
[۱۰] Hahn-Banach theorem

ب) M یک زیرفضای کاهشی برای T است هرگاه $TM \subseteq M$ و $T(M^{\perp}) \subseteq M^{\perp}$.

تعریف ۴۲.۱ : دنباله‌ی $\{x_n\}$ را یک دنباله‌ی اساسی گویند هرگاه برای هر x متعلّق به $\overline{\text{span}}\{x_n\}$ یک دنباله‌ی یکتا از اسکالرها وجود داشته باشد به طوری که

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k.$$

اگر هر x را بتوانیم به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ بنویسیم، دنباله اساسی است. برای مثال مجموعه‌ی متعامد در فضای هیلبرت یک دنباله‌ی اساسی است.

تعریف ۴۳.۱ : تابعکهای ضریب $\{x_n^*\}$ به‌صورت تابعکهای خطّی $x_k^*(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k) = \alpha_k$ تعریف می‌شود. این تابعکها پیوسته هستند. به کمک قضیه‌ی هان‌باناخ می‌توانیم آنها را به H گسترش دهیم.

تعریف ۴۴.۱ : دو دنباله‌ی اساسی با هم معادلند اگر همگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ با همگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k$ معادل باشد.

اگر $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله‌ی اساسی باشند، آنگاه یک ایزومورفیسم بین $\overline{\text{span}}\{x_n\}$ و $\overline{\text{span}}\{y_n\}$ وجود دارد.

۱ــ۲ طیف اساسی و خواص آن

تعریف ۴۵.۱ (طیف[۱۱]): اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و $x \in \mathcal{A}$، آنگاه طیف x را با $\sigma(x)$ نمایش می‌دهیم که مجموعه‌ی همه‌ی اعداد مختلط λ است به طوری که $\lambda e - x$ وارون‌پذیر نباشد.

[۱۱] Spectrum

تعریف ۴۶.۱ (طیف نقطه‌ای): فرض کنید $B(X)$ جبر باناخ همه‌ی عملگرهای خطّی کراندار روی فضای باناخ X باشد. طیف نقطه‌ای عملگر $T \in B(X)$ را با $\sigma_p(T)$ نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی همه‌ی مقادیر ویژه‌ی T است.
بنابراین $\lambda \in \sigma_p(T)$ است اگر و فقط اگر فضای پوچ $N(T-\lambda I)$ از $T-\lambda I$ بعد مثبت داشته باشد، یعنی

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \ker(T-\lambda I) \neq \circ\}.$$

تعریف ۴۷.۱ (شعاع طیفی): شعاع طیفی x را با $r(x)$ نمایش می‌دهیم که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

تعریف ۴۸.۱ : اگر H و H' دو فضای هیلبرت باشند و $A : H \longmapsto H'$ یک عملگر کراندار باشد، آنگاه A نیم‌فردهلم چپ است اگر عملگر کراندار $B : H' \longmapsto H$ وجود داشته باشد و همچنین عملگر فشرده‌ی K روی H به طوری که $BA = ۱ + K$.
همچنین A نیم‌فردهلم[۱۲] راست است اگر عملگر کراندار B و عملگر فشرده‌ی K' روی H' وجود داشته باشد به طوری که $AB = ۱ + K'$.
A یک عملگر نیم‌فردهلم است اگر A یا نیم‌فردهلم چپ باشد یا نیم‌فردهلم راست.
A فردهلم است اگر A نیم‌فردهلم چپ و راست باشد. از طرفی A نیم‌فردهلم چپ است اگر و فقط اگر A^* نیم‌فردهلم راست باشد. مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای فردهلم را با $\mathcal{F}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۴۹.۱ : عملگر کراندار $T : H \longmapsto H'$ فردهلم است اگر و فقط اگر $\mathrm{Ran}(T)$ بسته باشد و $\ker(T)$ و $\ker(T^*)$ متناهی‌البعد باشند.

[۱۲] Semi-fredholm