دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد
رشته‌ی ریاضی محض - گرایش جبر

عنوان:

گراف‌های مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های ناجابه‌جایی

استاد راهنما:
دکتر غلامرضا صفاکیش همدانی

استاد مشاور:
پروفسور سعید اکبری

نگارنده:
هدی محمدی

مهرماه ۱۳۸۹

چکیده

برای حلقه‌های ناجابه‌جایی، گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی R که با نماد $\Gamma(R)$ نشان داده می‌شود، گرافی است که رأس‌های آن همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر ناصفر از R هستند که برای هر دو رأس مجزای x و y، $x \longrightarrow y$ یک یال است اگر و فقط اگر $xy = 0$. هدف از مطالعه‌ی گراف مقسوم‌علیه صفر بررسی بین ویژگی‌های جبری حلقه‌ی R و ترکیباتی گراف $\Gamma(R)$ است.

در این پایان‌نامه بررسی می‌کنیم که گراف مقسوم‌علیه صفر کدام حلقه‌ها یک گراف دوبخشی، یک گراف کامل و یا یک گراف منتظم است. ثابت می‌کنیم که برای هر میدان متناهی F و عدد طبیعی n، $n \geqslant 2$، اگر $\Gamma(R) \simeq \Gamma\big(M_n(F)\big)$، آن‌گاه $R \simeq M_n(F)$. هم‌چنین تحقیق می‌کنیم تحت چه شرایطی یکریختی گرافی $\Gamma(R) \simeq \Gamma(S)$، یکریختی حلقه‌ای $R \simeq S$ را نتیجه می‌دهد. هم‌چنین نتایجی در مورد عدد غالب گراف مقسوم‌علیه صفر به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: مقسوم‌علیه صفر، حلقه‌ی ناجابه‌جایی، گراف جهت‌دار، حلقه‌ی ماتریسی

فهرست مطالب

مقدمه ث

۱ پیش نیازها ۱

۱.۱ مفاهیمی در نظریه‌ی حلقه‌ها ۱

۲.۱ مفاهیمی در نظریه‌ی گراف‌ها ۱۱

۲ خواص ابتدایی گراف‌های مقسوم‌علیه صفر ۱۵

۱.۲ قطر و کمر گراف ۱۵

۲.۲ گراف کامل ۱۷

۳.۲ گراف‌های دوبخشی ۱۹

۴.۲ گراف‌های منتظم ۲۷

۵.۲ گراف‌های جهت‌دار ۳۰

۶.۲ عدد خوشه‌ای و عدد غالب ۳۸

۳ گراف‌های مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های ماتریسی ۴۱

۱.۳ خواص ابتدایی گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی $M_n(F)$ ۴۱

۲.۳ حلقه‌های کاهشی ۵۰

۳.۳ حلقه‌های تحویل‌ناپذیر ۵۷

مراجع ۶۵

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۶۸

مقدمه

نظریه‌ی حلقه‌ها بخشی از جبر می‌باشد که به بررسی خواص حلقه‌ها به عنوان یک ساختار مهم جبری می‌پردازد. علاوه بر قضایای بنیادی زیادی که در این نظریه وجود دارند و حلقه‌ها را به صورت رده‌ای بررسی می‌کنند، قضیه‌هایی مانند قضیه آرتین ـ ودربرن[1] در مورد حلقه‌های نیم‌ساده و یا قضیه‌ی کوچک ودربرن در مورد حلقه‌های تقسیم، قضایایی نیز وجود دارند که حلقه‌ها را با توجه به خواص عناصر آنها بررسی می‌کنند. به طور مثال خواص مقسوم‌علیه‌های صفر، پوچ‌توان‌ها، خودتوان‌ها و ... . مطالعه‌ی عناصر مقسوم‌علیه‌های صفر یک حلقه با اهمیت است، زیرا این عناصر تأثیر زیادی روی ساختار حلقه‌ها دارند. به عنوان مثال، ثابت شده است که اگر در یک حلقه‌ی متناهی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر در مرکز باشد، آن‌گاه آن حلقه جابه‌جایی است. از طرف دیگر مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر یک حلقه، ساختار جبری قوی ندارند. بنابراین به طور معمول خواص نظریه مجموعه‌ای یا ترکیبیاتی آن‌ها مطالعه می‌شود. ما در این پایان‌نامه به بررسی خواص حلقه‌ها با توجه به مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر آن‌ها می‌پردازیم. برای این منظور به هر حلقه‌ی R، گراف مقسوم‌علیه صفر که با نماد $\Gamma(R)$ نمایش داده می‌شود را نسبت می‌دهیم.

طی سالهای اخیر، علاقه خاص ریاضی‌دانان به تحقیق و پژوهش درمقوله‌های ترکیبی ریاضی مانند مباحث ترکیبی جبر، آنالیز و توپولوژی، ترکیب آنالیز و نظریه احتمالات و همچنین جبر مجرد و نظریه گراف باعث به وجود آمدن مباحث جدید و متنوعی دراین زمینه گردیده است. ایده‌ی برقراری ارتباط بین حلقه‌های جابه‌جایی و نظریه‌ی گراف برای اولین بار درسال ۱۹۸۸ میلادی توسط بک[2] در مقاله‌ی [۹] مطرح شد. در تعریفی که بک در مقاله‌اش ارائه داده است، همه‌ی عناصر حلقه به عنوان رئوس یک گراف در نظر گرفته شده‌اند و دو رأس متمایز x و y مجاورند

---

[1] Wedderburn-Artin

[2] I.Beck

اگر و تنها اگر $xy = 0$. بنابراین در این گراف، رأس ۰ با همه‌ی رئوس دیگر مجاور است. مطالعه در این مقوله توسط ریاضی‌دانان متعددی ادامه یافت تا این‌که در سال ۱۹۹۹، اندرسون[۳] و لیوینگستون[۴]، در مقاله‌ی [۷]، تعریف جدیدی برای گراف وابسته به یک حلقه‌ی جابه‌جایی ارائه دادند. در این تعریف رئوس گراف، مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر نابدیهی حلقه هستند و دو رأس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $xy = 0$. در همین مقاله ثابت می‌شود که این گراف همبند است. کنکاش و پژوهش عاشقان ریاضی باعث گسترش این مقوله در ساختارهای جبری و گراف انجامید. چنان‌که در سال ۲۰۰۲ میلادی برای اولین بار، ردموند[۵] در مقاله‌ی [۱۳] گراف مقسوم‌علیه صفر را برای هر حلقه دلخواه که ممکن است یک‌دار یا جابه‌جایی نباشد تعریف کرد.

علاوه بر گراف‌های ذکر شده در بالا، گراف‌های دیگری نیز به حلقه‌ها نسبت داده‌اند. به عنوان مثال، در مقاله‌ی [۱۶] برای هر حلقه‌ی جابه‌جایی و یک‌دار R، گرافی با مجموعه رئوس R که در آن دو رأس متمایز x و y به هم متصل هستند اگر و تنها اگر $xR + yR = R$، نسبت داده شده است. به عنوان مثال دیگر، در مقاله‌ی [۱۲] به هر حلقه‌ی یک‌دار R، گرافی با مجموعه رئوس R که در آن دو رأس x و y به هم متصل هستند اگر و تنها اگر $x - y$ عنصری وارون‌پذیر در R باشد، نسبت می‌دهند. در همین راستا، در سال ۲۰۰۶ میلادی گراف مقسوم‌علیه صفر برای حلقه‌های ناجابجایی مورد توجه اکبری و محمدیان قرار گرفت و آن‌ها طی مقاله‌ی [۲]، که اساس نگارش این پایان‌نامه است، ساختار این گراف را مورد مطالعه قرار دادند.

در این پایان‌نامه، ابتدا در فصل اول که شامل دو بخش می‌باشد، تعاریف و قضایای مورد نیاز در نظریه‌ی حلقه‌ها و نظریه‌ی گراف‌ها را چنان یادآوری می‌کنیم که خواننده بتواند به طور کامل مطالب فصل‌های بعدی را دنبال کند. سپس در فصل دوم به خواص گراف مقسوم‌علیه صفر یک حلقه‌ی دلخواه، که ممکن است یک‌دار یا جابه‌جایی نباشد، می‌پردازیم. شرایطی را بررسی می‌کنیم که $\Gamma(R)$ ویژگی‌های گرافی خاصی مثل دوبخشی بودن، کامل بودن، منتظم بودن و ... را داشته باشد. همچنین در مورد عدد خوشه‌ای و عدد غالب یک حلقه نتایجی را به دست می‌آوریم. در فصل سوم بررسی می‌کنیم که در چه صورتی یکریختی بین دو گراف مقسوم‌علیه صفر را می‌توان به یکریختی بین حلقه‌های متناظر آن‌ها تعمیم داد. ثابت می‌کنیم که بجز سه مورد استثنا که در قضیه‌ی

[۳] D.F.Anderson

[۴] P.S.Livingston

[۵] S.P.Redmond

۵.۳ توضیح داده شده، هر حلقه‌ی کاهشی و متناهی از روی گراف ساده‌ی متناظر گراف مقسوم‌علیه صفر آن‌ها مشخص می‌شود. نشان می‌دهیم که هر حلقه‌ی کامل ماتریسی روی یک میدان متناهی به طور منحصر به فرد از روی گراف مقسوم‌علیه صفر آن تعیین می‌شود و هم‌چنین همه‌ی حلقه‌هایی را که گراف مقسوم‌علیه صفر آن‌ها حداکثر ۴ رأس دارند را شناسایی می‌کنیم.

در پایان بیان می‌کنم که با توجه به تمام ریزنگاری‌ها و دقت اینجانب سعی شده که مطالب به بهترین شکل ممکن تنظیم گردد، با این وجود هیچ‌گونه ادعایی مبنی بر بی‌نقصی این مجموعه وجود ندارد و پذیرای انتقادات سازنده‌ی عاشقان عرصه‌ی ژرف و زیبای ریاضیات می‌باشم.

فصل ۱

پیش نیازها

در فصل اول مفاهیم، اصطلاحات و قضایایی را ارائه می‌دهیم که ابزارهای اساسی ما در فصل‌های بعد می‌باشند. هم‌چنین به بررسی مفاهیمی در حلقه‌های ناجابه‌جایی و برخی از خواص حلقه‌ی ماتریس‌ها روی میدان‌های متناهی می‌پردازیم. در ادامه برخی از خواص ماتریس‌های $n \times n$ روی حلقه‌ی یک‌دار R که با $M_n(R)$ نمایش داده می‌شود، را بیان می‌داریم. در کل این پایان‌نامه R یک حلقه‌ی دلخواه می‌باشد و اگر X زیرمجموعه‌ای از R باشد، $X\backslash\{0\}$ را با نماد X^* نمایش می‌دهیم. هم‌چنین $\mathbb{F}_q$، میدان متناهی با q عنصر را نشان می‌دهد.

۱.۱ مفاهیمی در نظریه‌ی حلقه‌ها

در این بخش به طور مختصر به بیان مفاهیم و تعاریفی از نظریه‌ی حلقه‌های جابه‌جایی و ناجابه‌جایی می‌پردازیم و قضایای مهمی در باب ساختار مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر یک حلقه بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد و $a \in R$. گوییم a یک *مقسوم‌علیه صفر* چپ است اگر عنصر ناصفر $x \in R$ موجود باشد که $ax = 0$. به طور مشابه *مقسوم‌علیه صفر راست* تعریف می شود. عنصر $a \in R$ را یک *مقسوم‌علیه صفر* گوییم هرگاه a یک مقسوم‌علیه صفر چپ و یا

یک مقسوم‌علیه صفر راست باشد. هم‌چنین $a \in R$ را یک *مقسوم‌علیه صفر دو طرفه* گوییم هرگاه هم یک مقسوم‌علیه صفر چپ و هم یک مقسوم‌علیه صفر راست باشد.

مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر چپ حلقه‌ی R را با نماد $D_l(R)$ و مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر راست R را با نماد $D_r(R)$ نمایش می‌دهیم و قرار می‌دهیم $D(R) = D_l(R) \cup D_r(R)$.

واضح است که در هر حلقه‌ی R، عنصر $۰ \in R$ یک مقسوم‌علیه صفر دو طرفه است.

تعریف ۲.۱. حلقه‌ی R را *حوزه* گوییم هرگاه $D(R) = \{۰\}$.

تعریف ۳.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. در این‌صورت *گراف جهت‌دار* $\Gamma(R)$ که مجموعه رئوس آن $D(R)^*$ است را در نظر بگیرید به طوری‌که برای هر دو رأس x و y، داریم $x \longrightarrow y$ یک یال است اگر و تنها اگر $x \neq y$ و $xy = ۰$.

توجه کنید طبق تعریف بالا اگر x و y دو رأس متمایز $\Gamma(R)$ باشند که $xy = yx = ۰$، آن‌گاه در گراف $\Gamma(R)$ دو یال جهت‌دار یکی از x به y و دیگری از y به x وجود دارد. در این‌صورت گوییم یک یال دوگانه بین x و y وجود دارد.

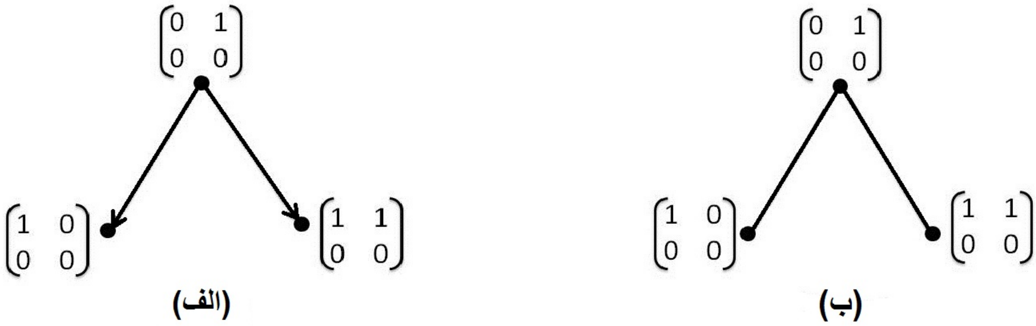
تعریف ۴.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. در این‌صورت گراف $\overline{\Gamma}(R)$ که مجموعه رئوس آن $D(R)^*$ است را در نظر بگیرید به طوری‌که دو رأس x و y با یک یال بدون جهت به هم متصل هستند اگر و تنها اگر $x \neq y$ و حداقل یکی از دو عنصر xy یا yx برابر صفر باشد.

توجه کنید تعریف گراف $\overline{\Gamma}(R)$ چندان دور از ذهن نیست، در واقع ما همه جهت‌ها را از روی یال‌های گراف $\Gamma(R)$ حذف کرده‌ایم و به جای یال‌های دوگانه پدید آمده یک یال قرار داده‌ایم.

مثال ۵.۱. زیرحلقه‌ی

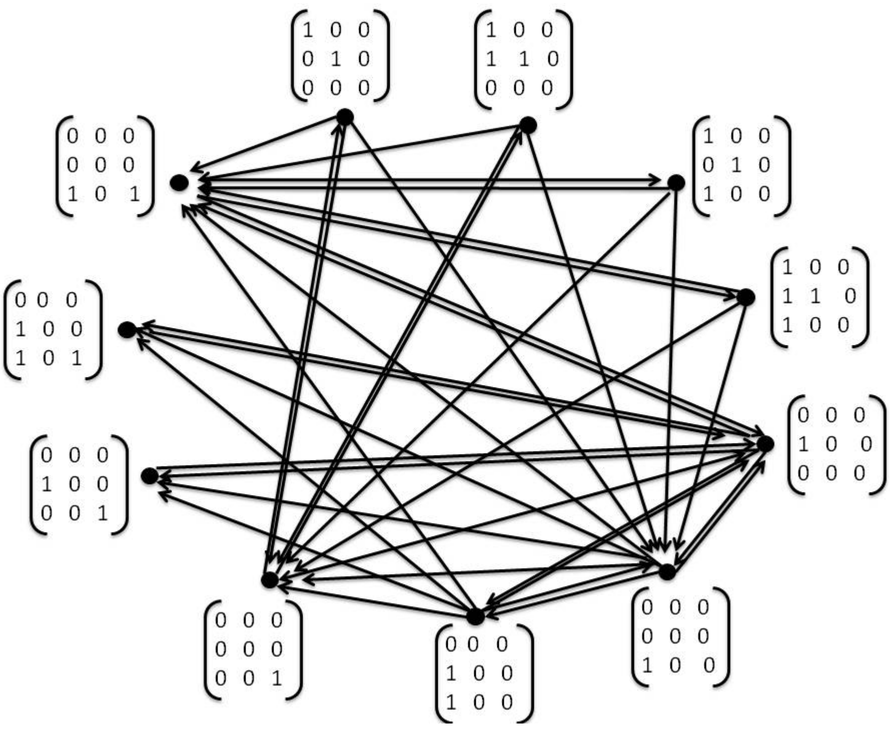
$$\mathfrak{R} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}_۲ \right\}.$$

را در $M_۲(\mathbb{Z}_۲)$ در نظر بگیرید. در حلقه‌ی $\mathfrak{R}$ دو عضو $E_{۱۱}$ و $E_{۱۱} + E_{۱۲}$ مقسوم‌علیه صفر راست هستند ولی مقسوم‌علیه صفر چپ نیستند. هم‌چنین $E_{۱۲} \in \mathfrak{R}$ پوچ‌توان است. توجه کنید $\mathfrak{R}$ کوچکترین حلقه‌ی ناجابه‌جایی است و گراف مقسوم‌علیه صفر آن به صورت شکل ۱.۱ می‌باشد، که شکل (الف) گراف $\Gamma(\mathfrak{R})$ و شکل (ب) گراف $\overline{\Gamma}(\mathfrak{R})$ است.



شکل ۱.۱

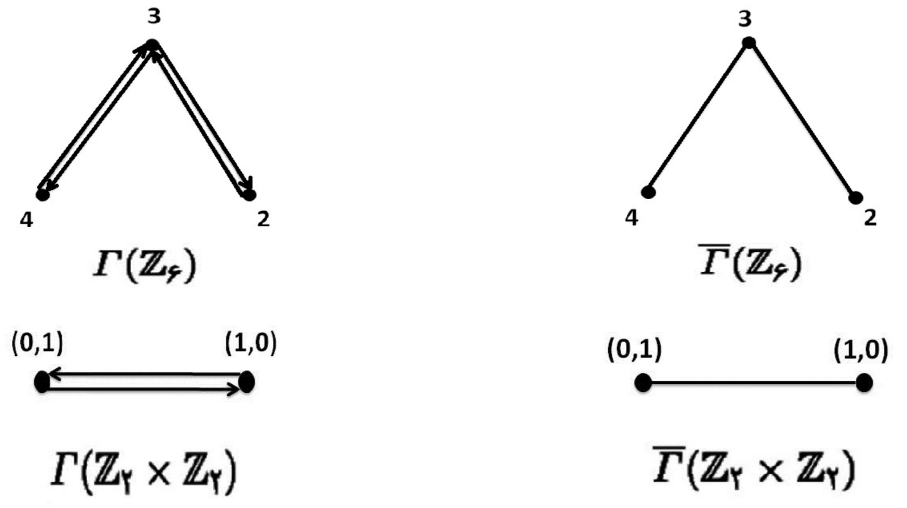
مثال ۶.۱. گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی $\left\{ \begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ b & a & \circ \\ c & \circ & d \end{bmatrix} \middle| \; a,b,c,d \in \mathbb{Z}_{۲} \right\} = \mathcal{R}$ به صورت شکل ۲.۱ می‌باشد.



شکل ۲.۱

مثال ۷.۱. همان طور که در شکل ۳.۱ می‌بینید، برای حلقه‌های جابه‌جایی مطالعه‌ی گراف $\overline{\Gamma}$

منطقی‌تر به نظر می‌رسد.



شکل ۳.۱

تعریف ۸.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد و $a \in R$. گوییم a یک عنصر خودتوان است هرگاه $a^2 = a$. عنصر خودتوان a را نابدیهی گوییم هرگاه a برابر با ۰ و ۱ نباشد.

لم ۹.۱. *اگر e یک عنصر خودتوان حلقه‌ی R باشد که مقسوم‌علیه صفر نیست، آن‌گاه e یکه‌ی حلقه‌ی R است.*

برهان. فرض کنید $x \in R$ دلخواه باشد. چون e یک خودتوان است بنابراین $e(ex - x) = 0$ و چون e مقسوم‌علیه صفر نیست، پس $ex - x = 0$ و در نتیجه $ex = x$. به طور مشابه ثابت می‌شود که $xe = x$ و از این رو $e = 1$ یکه‌ی حلقه‌ی R است. □

تعریف ۱۰.۱. حلقه‌ی $R = \{0\}$ را *حلقه بدیهی* گوییم.

تعریف ۱۱.۱. برای هر حلقه‌ی R قرار می‌دهیم $R^n = \{a_1 \cdots a_n | a_1, \ldots, a_n \in R\}$. حال حلقه R را یک حلقه‌ی صفر گوییم اگر $R^2 = \{0\}$.

لم ۱۲.۱. *اگر R یک حلقه‌ی متناهی باشد و $a \in R$. در این‌صورت دو عدد طبیعی m و n، $m > n$، وجود دارند که $a^m = a^n$. بیش‌تر آن‌که عدد طبیعی k وجود دارد که a^k خودتوان است.*

برهان. چون R حلقه‌ای متناهی است و $\{a, a^{2}, a^{3}, \dots\} \subseteq R$ پس اعداد طبیعی m و n هستند که $a^m = a^n$. حال ادعا می‌کنیم که برای هر عدد طبیعی n داریم $a^{k(m-n)+n} = a^n$ و با استقراء روی k آن را ثابت می‌کنیم. اگر $k = 1$، آن‌گاه $a^{k(m-n)+n} = a^m = a^n$ و اگر برای k برقرار باشد برای $k+1$ داریم $b^{(k+1)(m-n)+n} = b^{k(m-n)+n}b^{m-n} = b^n b^{m-n} = b^m = b^n$. از این رو فرض کنید عدد طبیعی k_0 چنان باشد که $k_0(m-n) > n$. قرار می‌دهیم $e = a^{k_0(m-n)}$، در این صورت $e^{2} = a^{k_0(m-n)+n}a^{k_0(m-n)-n} = a^n a^{k_0(m-n)-n} = a^{k_0(m-n)} = e$. در نتیجه حکم برقرار است. $\square$

تعریف ۱.۱۳. فرض کنید R یک حلقه بوده و $a \in R$. گوییم a یک عنصر *پوچ‌توان* است اگر عدد طبیعی n موجود باشد به‌طوری‌که $a^n = 0$.

نکته ۱.۱۴. هر عنصر پوچ‌توان در حلقه‌ی R، یک مقسوم‌علیه صفر است. هم‌چنین $0 \in R$ عنصری پوچ‌توان است.

نکته ۱.۱۵. در هر حلقه، 0 تنها عضو پوچ‌توان است که خودتوان نیز می‌باشد. همچنین اگر R حلقه‌ای یک‌دار و $e \neq 1$، عنصری خودتوان باشد، چون $(1-e)e = 0$، بنابراین e یک مقسوم‌علیه صفر است.

تعریف ۱.۱۶. حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی *کاهشی* گوییم هرگاه صفر تنها عنصر پوچ‌توان آن باشد.

تعریف ۱.۱۷. فرض کنید R یک حلقه و X یک عضو یا یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از R باشد. *پوچساز چپ* X که با نماد $\mathrm{Ann}_l(X)$ نمایش می‌دهیم را به صورت

$$\mathrm{Ann}_l(X) = \{a \in R \,|\, ax = 0, x \in X \text{ برای هر}\}$$

تعریف می‌کنیم. به طور مشابه *پوچساز راست* X که با نماد $\mathrm{Ann}_r(X)$ نمایش می‌دهیم تعریف می‌شود.

لم ۱.۱۸. *فرض کنید R یک حلقه باشد. برای هر عنصر $a \in R$ داریم*

$$[R : \mathrm{Ann}_r(a)] = |Ra| \text{ و } [R : \mathrm{Ann}_l(a)] = |aR|.$$

برهان. تابع $\phi : R \to R$ را به صورت $\phi(x) = ax$ در نظر بگیرید. طبق قضیه‌ی اول همریختی مدول‌ها داریم $Im\,\phi \simeq \dfrac{R}{Ker\,\phi}$. اما چون $Ker\,\phi = \mathrm{Ann}_l(a)$ و $Im\,\phi = aR$، در نتیجه تساوی

$[R:\mathrm{Ann}_l(a)]=|aR|$ برقرار است. همچنین به طور مشابه رابطه‌ی $[R:\mathrm{Ann}_r(a)]=|Ra|$ اثبات می‌شود. $\square$

قضیه ۱۹.۱. *فرض کنید R یک حلقه باشد. دراین‌صورت $\Gamma(R)$ متناهی است اگر و تنها اگر R متناهی یا حوزه باشد. علاوه بر آن اگر R حوزه نباشد، $|R|\leqslant|D(R)|^{۲}$.*

برهان. فرض کنید $D(R)$ متناهی و ناصفر باشد. پس قرار می‌دهیم $x\in D(R)^*$. از آن‌جایی‌که $\mathrm{Ann}_l(x)$ و Rx زیرمجموعه $D(R)$ هستند، پس متناهی می‌باشند و بنابر لم ۱۸.۱ می‌توانیم بنویسیم $|R|=|\mathrm{Ann}_l(x)||Rx|\leqslant|D(R)|^{۲}$. در نتیجه اثبات کامل است. $\square$

همچنین توجه کنید بنا به قضیه‌ی ۱۹.۱ حلقه‌ی R متناهی است اگر و تنها اگر $\Gamma(R)$ گرافی متناهی باشد.

تعریف ۲۰.۱. گوییم حلقه‌ی R *آرتینی چپ* (راست) است هرگاه به ازای هر خانواده‌ی $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ از ایده‌آل‌های چپ (راست) R که در شرط $\cdots\supseteq I_{۲}\supseteq I_{۱}$ صدق کند، عدد $k\in\mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری‌که $I_k=I_{k+۱}=\cdots$.

لم ۲۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه‌ی آرتینی چپ باشد و $R\neq D(R)$. دراین‌صورت R حلقه‌ای یک‌دار است و هر عنصر $R\backslash D(R)$ وارون‌پذیر است.*

برهان. فرض کنید $a\in R\backslash D(R)$. بنابراین نگاشت $\phi:R\to R$ وجود دارد به طوری‌که $\phi(x)=xa$ یک تکریختی $R-$مدولی چپ است. چون R یک حلقه‌ی آرتینی چپ و ϕ یک‌به‌یک است، واضح است که ϕ پوشاست. از این رو عنصر $e\in R$ وجود دارد به طوری‌که $ea=a$. حال چون $a\notin D(R)$ و $(xe-x)a=۰$ نتیجه می‌شود که برای هر $x\in R$، $xe=x$. بنابراین $e=۱$ یکه‌ی R است. علاوه بر آن چون ϕ پوشاست عنصر $a'\in R$ وجود دارد به طوری‌که $a'a=۱$. دوباره چون $a\notin D(R)$ و $aa'-۱=۰$ نتیجه می‌شود که $aa'=۱$ و در نتیجه a وارون‌پذیر است. $\square$

تعریف ۲۲.۱. حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی تقسیم گوییم هرگاه هر عنصر ناصفر در R وارون‌پذیر باشد. یک حلقه‌ی تقسیم جابه‌جایی، میدان نامیده می‌شود.

تعریف ۲۳.۱. برای هر حلقه‌ی R، *رادیکال جیکوبسن* R را برابر با اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال R تعریف می‌کنیم و آن را با نماد $J(R)$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۲۴.۱. رادیکال جیکوبسن R، شامل هیچ عضو خودتوان ناصفری نمی‌باشد.

تعریف ۲۵.۱. حلقه‌ی R را *نیم‌ساده* گوییم، هرگاه $J(R) = \{0\}$.

تعریف ۲۶.۱. فرض کنید R حلقه‌ای یک‌دار باشد. گوییم حلقه‌ی R *موضعی* است هرگاه $\frac{R}{J(R)}$ یک حلقه‌ی تقسیم باشد.

نکته ۲۷.۱. به سادگی ثابت می‌شود که حلقه‌ی یک‌دار R موضعی است اگر و فقط اگر تنها یک ایده‌آل ماکسیمال چپ داشته باشد.

قضیه ۲۸.۱. [[۲۱]، صفحه ۲۸۶] فرض کنید R یک حلقه‌ی آرتینی چپ باشد. دراین‌صورت R حلقه‌ای موضعی است اگر و تنها اگر عنصر خودتوان نابدیهی نداشته باشد.

یادداشت ۲۹.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی آرتینی چپ باشد. یک قضیه منسوب به براور[۱] بیان می‌کند که هر ایده‌آل چپ در R یا پوچ‌توان است و یا شامل یک عنصر خودتوان ناصفر است. بنابراین R خودتوان نابدیهی ندارد اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی پوچ‌توان یا یک حلقه‌ی موضعی باشد.

تعریف ۳۰.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد و $e \in R$. عنصر e را یک *بی‌اثر* چپ گوییم هرگاه برای هر عضو $x \in R$ داشته باشیم $ex = x$. به طور مشابه عنصر بی‌اثر راست تعریف می‌شود.

لم ۳۱.۱. *اگر R تنها یک عضو بی‌اثر راست مثل e داشته باشد، آن‌گاه* $e = 1$.

برهان. فرض کنید $x \in R$ دلخواه باشد، بنابراین به ازای هر $a \in R$ داریم $a(xe + e - x) = a$. از این رو $xe + e - x$ یک بی‌اثر راست است، در نتیجه $xe - x = 0$. یعنی برای هر x، داریم $xe = x$ پس $e = 1$ و برهان کامل است. □

قضیه ۳۲.۱. [[۲۱]، صفحه ۵۳] اگر R حلقه‌ای موضعی آرتینی باشد، آن‌گاه خواهیم داشت $J(R) = D(R)$.

قضیه ۳۳.۱. [[۲۱]، صفحه ۵۴] فرض کنید R حلقه‌ای آرتینی چپ باشد. دراین‌صورت $J(R)$ یک ایده‌آل پوچ‌توان است.

---

[۱] Brauer

نتیجه ۳۴.۱. *اگر R حلقه‌ای موضعی یا پوچ‌توان باشد، آن‌گاه*
$$\mathrm{Ann}_r(D(R)) \cap \mathrm{Ann}_l(D(R)) \neq \{0\}.$$

برهان. با استفاده از قضیه‌ی ۳۲.۱ برای هر حلقه‌ی موضعی R داریم $J(R) = D(R)$ و برای حلقه‌های پوچ‌توان خواهیم داشت $J(R) = R = D(R)$. بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۳۳.۱ عدد طبیعی n وجود دارد که $J(R)^n = \{0\}$ و $J(R)^{n-1} \neq \{0\}$. حال اگر $a \in J(R)^{n-1}$، در این صورت داریم $aJ(R) = 0$ و $J(R)a = 0$، یعنی $a \in \mathrm{Ann}_r(D(R)) \cap \mathrm{Ann}_l(D(R))$ و این همان مطلبی است که می‌خواستیم. □

نتیجه ۳۵.۱. *اگر R حلقه‌ای موضعی یا پوچ‌توان باشد، آن‌گاه رأسی در $\Gamma(R)$ هست که به همه‌ی رئوس دیگر متصل است.*

قضیه ۳۶.۱. [۲۱، صفحه ۳۵] (آرتین - ودربرن) اگر R یک حلقه‌ی نیم‌ساده آرتینی چپ باشد، آن‌گاه حلقه‌های تقسیم D_1 ، $\cdots$ ، D_r و اعداد طبیعی n_1 ، $\cdots$ ، n_r وجود دارند به طوری که
$$R \simeq M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r).$$

نتیجه ۳۷.۱. *اگر R حلقه‌ای متناهی باشد و $J(R) = 0$، آن‌گاه میدان‌های F_1 ، $\ldots$ ، F_k و اعداد طبیعی n_1 ، $\ldots$ ، n_k وجود دارند به طوری که $R \simeq M_{n_1}(F_1) \times \cdots \times M_{n_k}(F_k)$.*

نتیجه ۳۸.۱. *اگر R حلقه‌ی متناهی جابه‌جایی باشد و $J(R) = 0$، آن‌گاه $R \simeq F_1 \times \cdots \times F_n$ که F_iها میدان هستند.*

نتیجه ۳۹.۱. *هر حوزه‌ی آرتینی چپ، یک حلقه‌ی تقسیم است.*

برهان. از آن جایی که R حلقه‌ی آرتینی چپ است طبق قضیه‌ی ۳۳.۱، $J(R)$ پوچ‌توان است و چون یک حوزه، مقسوم‌علیه صفر ناصفر ندارد در نتیجه $J(R) = \{0\}$. پس طبق قضیه‌ی ۳۶.۱، R یک حلقه‌ی تقسیم است. □

قضیه ۴۰.۱. *فرض کنید R حلقه‌ای متناهی باشد و $|R \backslash D(R)| = 1$. در این صورت R با حاصل‌ضرب تعداد متناهی $\mathbb{Z}_2$ یکریخت است.*

برهان. با استفاده از قضیه‌ی ۲۱.۱ حلقه‌ی R یک‌دار است. اگر $a \in R$ پوچ‌توان باشد، آن‌گاه $1 - a$ وارون‌پذیر است و چون $R \backslash D(R)$ تنها شامل ۱ است بنابراین $1 - a = 1$، در نتیجه $a = 0$.

از این رو R پوچ‌توان نابدیهی ندارد. حال بنا به قضیه‌ی ۳۳.۱ چون $J(R)$ ایده‌آلی پوچ‌توان است بنابراین همه‌ی عناصر آن پوچ‌توان هستند، در نتیجه $J(R) = \{0\}$ و بنا به قضیه‌ی ۳۶.۱، $R \simeq M_{n_1}(F_1) \times \cdots \times M_{n_k}(F_k)$ و چون همه‌ی حلقه‌های $M_{n_i}(F_i)$ تنها یک عنصر وارون‌پذیر دارند، پس همه‌ی آن‌ها $\mathbb{Z}_2$ هستند. □

قضیه‌ی زیر به قضیه کوچک ودربرن معروف است.

قضیه ۴۱.۱. [[۲۱]، صفحه ۲۰۳] هر حلقه‌ی تقسیم متناهی، حلقه‌ای جابه‌جایی است.

تعریف ۴۲.۱. اگر برای حلقه‌ی دلخواه R، عدد طبیعی n وجود داشته باشد که برای هر $a \in R$، $na = 0$، یعنی مرتبه‌های عناصر R نسبت به عمل جمع کران‌دار باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی n با این خاصیت را *مشخصه‌ی* حلقه‌ی R می‌نامیم. مشخصه‌ی R را با نماد $\mathrm{char}(R)$ نمایش می‌دهیم. درصورتی‌که چنین عددی وجود نداشته باشد، گوییم مشخصه‌ی R صفر است.

تعریف ۴۳.۱. حلقه‌ی R را *حلقه‌ی تجزیه‌پذیر* گوییم، هرگاه R یکریخت با حاصل‌ضرب مستقیم دو حلقه‌ی نابدیهی باشد.

نکته ۴۴.۱. اگر R حلقه‌ای یک‌دار باشد، آن‌گاه R تجزیه‌ناپذیر است اگر و تنها اگر R عنصر خودتوان مرکزی نابدیهی نداشته باشد.

گزاره ۴۵.۱. [[۲۱]، صفحه ۳۰۸] (تجزیه پیرس[۲]) عنصر خودتوان e در حلقه‌ی R را در نظر بگیرید، در این‌صورت حلقه‌ی R را می‌توان به‌صورت

$$R = eRe \oplus eR(1-e) \oplus (1-e)Re \oplus (1-e)R(1-e)$$

تجزیه کرد.

تعریف ۴۶.۱. فرض کنید R حلقه‌ای یک‌دار و n یک عدد طبیعی باشد. به ازای i و j که $1 \leqslant i, j \leqslant n$، عبارت E_{ij} را عنصری از $M_n(R)$ تعریف می‌کنیم که درایه (i,j)ام آن برابر ۱ و بقیه‌ی درایه‌های آن برابر ۰ هستند.

برای یک میدان F و عدد طبیعی n، همه‌ی عناصر وارون‌پذیر حلقه‌ی $M_n(F)$ را با نماد $GL(n, F)$ نمایش می‌دهیم.

---

[۲] Peirce decomposition

قضیه ۴۷.۱. *فرض کنید n یک عدد طبیعی و F یک میدان q عضوی باشد. در این صورت* $|GL(n,F)| = (q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})$.

تعریف ۴۸.۱. فرض کنید F یک میدان باشد و $n \geqslant 2$. ماتریس $A \in M_n(F)$ یک *ماتریس دوری* نامیده می‌شود هرگاه بردار سطری $\alpha \in F^n$ موجود باشد به طوری که $\{\alpha, A\alpha, \ldots, A^{n-1}\alpha\}$ یک پایه برای F^n به عنوان یک فضای برداری روی F باشد.

قضیه ۴۹.۱. [۱۹، صفحه ۲۳۷] فرض کنید F یک میدان باشد و $n \geqslant 2$. حال ماتریس $A \in M_n(F)$ دوری است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال و چندجمله‌ای ویژه A یکسان باشند.

قضیه ۵۰.۱. [۱۹، صفحه ۲۳۰] اگر A ماتریس دوری باشد، آن‌گاه هر ماتریسی که با A جابه‌جا شود یک چندجمله‌ای برحسب A است.

قضیه ۵۱.۱. [۱۹، صفحه ۲۰۴] فرض کنید $A \in M_n(F)$. ماتریس A قطری‌شدنی است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال A روی میدان F به عوامل مرتبه‌ی اول متمایز تجزیه شود.

قضیه ۵۲.۱. [۱۹، صفحه ۲۰۷] فرض کنید $\mathcal{F} \subseteq M_n(F)$ خانواده‌ای از ماتریس‌های قطری‌شدنی باشد که دو به دو با هم جابه‌جا می‌شوند. در این‌صورت ماتریس $\mathcal{F}$ همزمان قطری‌شدنی است، یعنی ماتریس وارون‌پذیر P وجود دارد به طوری‌که به ازای هر $A \in \mathcal{F}$، PAP^{-1} قطری است.

لم ۵۳.۱. *فرض کنید M و N دو $R-$مدول چپ ساده باشند. در این صورت $M \simeq N$ اگر و تنها اگر* $\mathrm{Hom}(M,N) \neq 0$.

لم ۵۴.۱. [۲۱، صفحه ۳۵] (شور[۳]) اگر M یک $R-$مدول چپ ساده باشد، آن‌گاه داریم $\mathrm{End}_R(M) = \{0\}$ یا $\mathrm{End}_R(M)$ یک حلقه‌ی تقسیم است.

قضیه ۵۵.۱. *فرض کنید M، M_1، ...، M_n مدول‌های چپ روی حلقه‌ی R باشند. حال اگر $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$، آن‌گاه $\mathrm{End}_R(M)$ با حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ که درایه‌ی (i,j)ام آن عنصری از $\mathrm{Hom}(M_j, M_i)$ است، یکریخت می‌باشد.*

قضیه ۵۶.۱. [۲۰، صفحه ۳۹] (لاگرانژ[۴]) اگر H زیرگروهی از گروه متناهی G باشد، آن‌گاه داریم $|G| = [G:H]|H|$.

---

[۳] Schur

[۴] Lagrange

۲.۱ مفاهیمی در نظریه‌ی گراف‌ها

در این بخش به بررسی گراف مقسوم‌علیه‌های صفر چندین حلقه می‌پردازیم. همچنین با ارائه‌ی قضایای پایه‌ای و اساسی در این مقوله با ویژگی‌ها و خواص این گراف بیشتر آشنا می‌شویم.

تعریف ۵۷.۱. برای هر گراف G و هر رأس v در G، *درجه‌ی* v که با نماد $\deg(v)$ نشان می‌دهیم را برابر با تعداد یال‌های متصل به v تعریف می‌کنیم. همچنین هر رأسی در G که با یک یال به v متصل است، یک همسایه‌ی v نامیده می‌شود. مجموعه‌ی همه‌ی *همسایه‌های* v را با نماد $N(v)$ نشان می‌دهیم. بیش‌ترین درجه‌ی رئوس گراف G را با نماد $\Delta(G)$ و کم‌ترین درجه‌ی رئوس آن را با نماد $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم. گراف G را یک *گراف منتظم* گوییم هرگاه درجات همه‌ی رئوس آن با هم مساوی باشند.

تعریف ۵۸.۱. در گراف جهت‌دار Γ، برای هر رأس a در Γ، تعداد یال‌های خارج‌شونده از a را *درجه‌ی خروجی* a و تعداد یال‌های واردشونده به a را *درجه‌ی ورودی* a گوییم.

تعریف ۵۹.۱. گراف n رأسی که هر دو رأس متمایز آن به هم متصل هستند را یک *گراف کامل* نامیده و با نماد K_n نشان می‌دهیم.

مثال ۶۰.۱. در شکل ۴.۱ دو مثال از گراف مقسوم‌علیه صفر کامل داده شده است که در آن $F = \{0, a, b, c\}$ یک میدان ۴ عضوی است.

$\overline{\Gamma}(\frac{\mathbb{Z}_2[x,y,z]}{(x^2,y^2,z^2,xy,xz,yz)})$ $\quad$ $\overline{\Gamma}(\frac{F[x]}{(x^2)})$

شکل ۴.۱

تعریف ۶۱.۱. گراف G را یک گراف *دوبخشی* گوییم هرگاه مجموعه رئوس G را بتوان به دو زیرمجموعه‌ی مجزا افراز کرد به طوری که بین هیچ دو رأسی که در یکی از این زیرمجموعه‌ها قرار دارند، یالی نباشد. گراف G را یک گراف *دوبخشی کامل* گوئیم هرگاه هر دو رأس G که در یک بخش نباشند، به یکدیگر متصل باشند. گراف دوبخشی کامل که اندازه‌های دو بخش آن m و n است را با نماد $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم. یک گراف دوبخشی کامل به صورت $K_{1,n}$ را یک *گراف ستاره* می‌نامیم.

مثال ۶۲.۱. در شکل ۵.۱ مثال‌هایی از گراف‌های مقسوم‌علیه صفر که دوبخشی هستند را می‌بینید، که در آن $F = \{0, a, b, c\}$ یک میدان ۴ عضوی است.

$\overline{\Gamma}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5)$ $\qquad$ $\overline{\Gamma}(F \times \mathbb{Z}_5)$

شکل ۵.۱

تعریف ۶۳.۱. در گراف G، منظور از یک *مسیر* P دنباله‌ای مانند $v_1 — v_2 — \cdots — v_{k+1}$ از رئوس متمایز G است به طوری‌که هر دو رأس متوالی به هم متصل هستند. به عدد k طول مسیر P گوییم.

تعریف ۶۴.۱. برای دو رأس u و v در G، *فاصله* بین u و v که با نماد $d(u,v)$ نمایش داده می‌شود، برابر طول کوتاه‌ترین مسیر بین u و v تعریف می‌شود، اگر چنین مسیری موجود باشد. در غیر این‌صورت قرار می‌دهیم $d(u,v) = \infty$. برای گراف G *قطر گراف* را که با نماد $\mathrm{diam}(G)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{diam}(G) = \sup\{d(u,v) \mid u, v \in V(G), u \neq v\}.$$

تعریف ۶۵.۱. منظور از *دور* C در گراف G یک دنباله‌ی $v_1 — v_2 — \cdots — v_{k+1}$ از رئوس G است به‌طوری‌که $v_1, \ldots, v_k$ دو به دو متمایز هستند و $v_1 = v_{k+1}$. به عدد k طول دور C گوییم.

تعریف ۶۶.۱. برای گراف G، اگر G دارای حداقل یک دور باشد، آن‌گاه طول کوتاه‌ترین دور در G را کمر G می‌نامیم و با نماد $\mathrm{gr}(G)$ نشان می‌دهیم.

قرارداد ۶۷.۱. اگر گراف G شامل هیچ دوری نباشد، آن‌گاه تعریف می‌کنیم $\mathrm{gr}(G) = \infty$.

تعریف ۶۸.۱. گراف G را یک *گراف همبند* گوییم هرگاه بین هر دو رأس u و v از G، یک مسیر موجود باشد.

تعریف ۶۹.۱. گراف جهت‌دار G را *همبند قوی* گوییم اگر بین هردو زوج مرتب u و v از رئوس G با دنبال کردن جهت یال‌ها بتوان یک مسیر یافت.

تعریف ۷۰.۱. گراف همبند بدون دور را درخت گوییم.

تعریف ۷۱.۱. دو گراف G_1 و G_2 را یکریخت گوییم هرگاه یک تابع دوسویی φ بین مجموعه رئوس G_1 و مجموعه رئوس G_2 موجود باشد به طوری‌که برای هر x و y در G_1، $x—y$ یک یال در G_1 است اگر و تنها اگر $\varphi(x)—\varphi(y)$ یک یال در G_2 باشد.

تعریف ۷۲.۱. دو گراف جهت‌دار Γ_1 و Γ_2 را *یکریخت* گوییم هرگاه یک تابع دوسویی ψ بین مجموعه رئوس Γ_1 و مجموعه رئوس Γ_2 موجود باشد چنان که برای هر x و y در Γ_1، $x \longrightarrow y$ یک یال در Γ_1 است اگر و تنها اگر $\psi(x) \longrightarrow \psi(y)$ یک یال در Γ_2 باشد.

تعریف ۷۳.۱. زیرمجموعه S از V در گراف (G, V) را یک *مجموعه‌ی مستقل* می‌نامند، اگر هیچ دو رأس از S در G مجاور نباشند.

تعریف ۷۴.۱. فرض کنید G یک گراف باشد. زیرمجموعه‌ی X از رئوس G را یک *خوشه* می‌نامند هرگاه هردو رأس متمایز در X به هم متصل باشند. بیش‌ترین اندازه‌ی یک خوشه در گراف G را *عدد خوشه‌ای* G نامیده و با نماد $\omega(G)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۷۵.۱. زیرمجموعه‌ی Ω از رئوس یک گراف جهت‌دار Γ را یک *خوشه* می‌گویند اگر برای هر دو رأس متمایز x و y در Ω، $x \longrightarrow y$ و $y \longrightarrow x$ دو یال در Γ باشند. بیش‌ترین اندازه‌ی یک خوشه در گراف جهت‌دار Γ، *عدد خوشه‌ای* گراف Γ نامیده و با نماد $\omega(\Gamma)$ نمایش می‌دهند.