دانشگاه مازندران

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

گرایش ریاضی کاربردی

عنوان

حل معادلات دیفرانسیل فازی با روش آنالیز هموتوپی

استاد راهنما

دکتر حسین جعفری

استاد مشاور

دکتر سید هادی ناصری

نگارش

مریم علی پور کلایی

تیر ماه ۱۳۸۹

به نام خداوند بخشنده مهربان

خداوند منان را شاکرم که مرا توفیق عطا فرمود تا بتوانم این مسیر را با سرافرازی طی کنم. این موفقیت را مدیون کسانی هستم که خالصانه مرا یاری نموده و سایه گستر امید برایم بودند. بر خود لازم می دانم از همه آنها تشکر و قدردانی کنم.

از استاد راهنمای گرانقدرم، آقای دکتر حسین جعفری و استاد مشاورم آقای دکتر هادی ناصری به خاطر ایده های گرانبها و ارزنده شان در تدوین این پایان نامه صمیمانه سپاسگزاری و قدردانی می نمایم.

از اساتید محترم گروه آقایان دکتر حسین زاده و دکتر متین فر و دکتر نعمتی همچنین مدیر محترم گروه آقای دکتر طالشیان به خاطر راهنمایی های ارزنده شان طی دوره تحصیل کمال تقدیر و تشکر را دارم.

و از همسر مهربانم به خاطر مساعدت های بی دریغش از صمیم قلب سپاسگزارم.

تقدیم به

پدر و مادرم به خاطر همه فداکاری هایشان

و همسرم برای همه بردباری ها و تحمل هایش

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان نامه ابتدا تعاریف گوناگون مشتق فازی یک تابع فازی به همراه جواب های مختلفی که متناسب با آنها وجود دارد، بیان گردیده است. روش های آشفتگی هموتوپی آنالیز هموتوپی و تکرار تغییرات هی را برای یافتن جواب تقریبی معادله دیفرانسیل کوشی غیر فازی به کار برده و آن را به حالت فازی تعمیم می دهیم. با استفاده از این روش های تکراری مسائلی که روش های کلاسیک را برای آنها در حالت غیر فازی نمی توانستیم به کار بریم حل می کنیم. در ادامه روش آنالیز هموتوپی را برای حل معادلات دیفرانسیل فازی بیان کرده و چند مثال را با این روش حل می کنیم.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل فازی، آنالیز هموتوپی، آشفتگی هموتوپی و تکرار تغییرات هی.

پیشگفتار

نظریه مجموعه های فازی برای اولین بار توسط پرفسور لطفی عسگر زاده دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه برکلی آمریکا، در سال ۱۹۶۵ مطرح گردید[۴۱]. معرفی مجموعه های فازی و کاربردهای آن یک انقلاب علمی در ریاضیات محسوب می شود. پایه هندسی برای اعداد فازی در سالهای ۱۹۷۶ و ۱۹۷۸ و ۱۹۷۹ توسط ریاضیدانان مختلفی مطرح شد، که همگی اعداد فازی را به صورت α -برش در نظر گرفتند.

گوسچل- وکسمن [۱] [۱۴] در سال ۱۹۸۶ تقریب دیگری ارائه کردند، آنها اعداد فازی ر ا به صورت پارامتریک نمایش دادندو سپس مجموعه های فازی را در یک فضای برداری توپولوژیک محاط نمودند. این امر باعث شد آنها بتوانند یک پایه برای حساب فازی طرح ریزی کنند.

در زمینه حل کلاسیک و بررسی معادلات دیفرانسیل فازی می توان به مقاله ای اشاره نمود که در سال ۱۹۸۷ توسط سیکالا[۲] [۳۷] مطرح گردید. او در این مقاله جوابی جدید برای معادلات دیفرانسیل فازی معرفی کرد. در این تحقیق روشهای تکراری برای حل معادلات دیفرانسیل فازی (FDE) و معادلات انتگرال فازی (FIE) مورد بررسی قرار می گیرد.

[۱] Goetschel & Voxman
[۲] seikala

فصل ۱
تعاریف مقدماتی

نظریه مجموعه های فازی نظریه ایی است برای اقدام در شرایط عدم اطمینان. در واقع یک تعمیم و گسترش طبیعی نظریه مجموعه های معمولی است که در یک قالب جدید ریاضی برای صورت بندی و تجزیه و تحلیل مفاهیم موافق با زبان و فهم طبیعی انسان ها بیان شده است.

۱.۱ مفاهیم اولیه

فرض کنید X، یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. تابع نشانگر هر زیر مجموعه ی معمولی A از X، یک تابع از Xبه مجموعه$\{۰, ۱\}$ است که به صورت زیر تعریف می شود.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱, & x \in A, \\ ۰, & x \notin A. \end{cases}$$

حال اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه دو عضوی$\{۰, ۱\}$ به بازه $[۰, ۱]$توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر xاز Xعددی از بازه$[۰, ۱]$ نسبت می دهد. این تابع را تابع عضویت A می نامیم. اکنونA دیگر یک مجموعه معمولی نیست، بلکه چیزی است که آن را مجموعه فازی می نامیم. (به طور دقیق تر یک زیر مجموعه فازی از X). بنابراین یک مجموعه ی فازی A، مجموعه ای است که درجات عضویت اعضای آن می تواند به طور پیوسته از $I = [۰, ۱]$ اختیار می شود. این مجموعه به طور کامل و یکتا توسط یک تابع عضویت که آن را با $\mu_A(x)$ نشان می دهیم مشخص می شود؛ این تابع به هر عنصر از X، یک عدد از بازه $[۰, ۱]$ به عنوان درجه

عضویت آن عنصر در مجموعه فازی A نسبت می دهد. نزدیکی مقدار $\mu_A(x)$ به عدد یک نشان دهنده ی تعلق بیشتر x به مجموعه فازی A است و به عکس نزدیکی آن به صفر نشان دهنده تعلق کمتر x به A است. به لحاظ شهودی $\mu_A(x)$ را می توان درجه ی پذیرش ما در قبول x به عنوان عضوی از A در نظر گرفت. در حالت حدی چنانچه x کاملا در A عضو باشد داریم $\mu_A(x) = ۱$ و چنانچه اصلا در A عضو نباشد داریم $\mu_A(x) = ۰$. پس مجموعه های معمولی و توابع نشانگر آنها، حالتهای خاصی از مجموعه های فازی و توابع عضویت آن ها هستند.

برای تمیز دادن مجموعه معمولی و مجموعه فازی علامت~ روی نام مجموعه های فازی می گذاریم.

مثال ۱ *فرض کنید $x = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ یک زیر مجموعه معمولی از X شامل اعداد کوچکتر از سه به صورت روبرو است $A = \{۱, ۲\}$*
که تابع نشانگر آن عبارت است از

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱, & x = ۱, ۲ \\ ۰, & x = ۳, ۴, ۵, ۶, ۷ \end{cases}$$

در اینجا $\chi_A(۲) = ۱$ یعنی عدد دو عضو A است و $\chi_A(۴) = ۰$ یعنی عدد چهار عضو A نیست. به عبارت دیگر عدد دو ویژگی کوچکتر از سه را داراست ولی عدد چهار این ویژگی را ندارد.
حال یک زیر مجموعه فازی از X که کوچک بودن را نشان می دهد می تواند به وسیله تابع عضویت زیر تعریف شود

$$\mu_B(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱ \\ ۰/۶ & x = ۲ \\ ۰/۴ & x = ۳ \\ ۰/۱ & x = ۴ \\ ۰ & x = ۵ \end{cases}$$

در اینجا مثلا" $\mu_B(۲) = ۰/۶$ یعنی عدد دو با درجه ی عضویت ۰.۶ عضو مجموعه فازی Bاست. $\mu_B(۵) = ۰$ یعنی عدد پنج اصلا" عضو مجموعه فازی B نیست و $\mu_B(۱) = ۱$ یعنی عدد۱ کاملا" عضو مجموعه فازی B است.

نماد گذاری

برای نشان دادن یک مجموعه فازی روشهای مختلفی رایج است. یک روش متداول، توصیف یک مجموعه فازی به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب به گونه زیر است

$$A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\}$$

هنگامی که X یک مجموعه متناهی (و یا نامتناهی شمارا) به صورت $\{x_۱, ..., x_n\}$باشد، یک زیر مجموعه فازی Aاز X به صورت های زیر نشان داده می شود.

$$A = \left\{\frac{\mu_A(x_۱)}{x_۱}, \frac{\mu_A(x_۲)}{x_۲}, ..., \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}\right\}$$

$$A = \mu_A(x_۱)/x_۱ + ... + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=۱}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$$

که در عبارت دوم منظور از علامت +، اجتماع است نه جمع عمل حسابی. و هنگامی کهX یک مجموعه پیوسته باشد نماد زیر بکار برده می شود،

$$A = \int_X \mu_A(x)/x$$

که در آن منظور از علامت $\int$، اجتماع است.

تعریف ۱ *فرض کنید X یک مجموعه مرجع و A یک زیر مجموعه فازی از آن باشد. مجموعه نقاطی از X که برای آن نقاط $\mu_A \neq ۰$ تکیه گاه A نامیده شده و با $suppA$ نشان داده می شود.*

تعریف ۲ *به مقدار $M = sup_x \mu_A(x)$ ارتفاع مجموعه A نامیده می شود. اگر ارتفاع مجموعه ی فازی A برابر یک باشد آنگاه A نرمال نامیده می شود. در غیر اینصورتA زیر نرمال گوییم. بدیهی است که هر مجموعه ی فازی زیر نرمالA را می توان با تقسیم $\mu_A(x)$ها بر ارتفاعA نرمال کرد. اگر عنصری از X باشد که برای آن $\mu_A(x) = \frac{۱}{۲}$، x را یک نقطه گذر A گوییم.*

۲.۱ عملگرهای مجموعه ای

در این بخش عملگرهای مجموعه ای برای مجموعه های فازی تعریف می شوند. این عملگرها یک تعمیم طبیعی عملگرهای مجموعه ای برای مجموعه های معمولی است. در تمامی موارد زیر X یک مجموعه مرجع و برای زیر مجموعه دلخواه فازیA از X، تابع عضویت آن را به $\tilde{A}(x)$ نشان می دهیم.

تعریف ۳ *مجموعه فازی$\tilde{A}$ را تهی گوییم اگر برای هر x از X، $\tilde{A}(x) = ۰$.*

تعریف ۴ *مجموعه فازی$\tilde{A}$ را تام گوییم اگر برای هر x از X، $\tilde{A}(x) = ۱$.*

تعریف ۵ *گوییم مجموعه فازی $\tilde{A}$، زیر مجموعه فازی $\tilde{B}$ است و می نویسیم $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ اگر برای هر x از X، $\tilde{A}(x) \leq \tilde{B}(x)$.*

تعریف ۶ *دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را مساوی گوییم و می نویسیم $\tilde{A} = \tilde{B}$اگر برای هر x از X، $\tilde{A}(x) = \tilde{B}(x)$.*

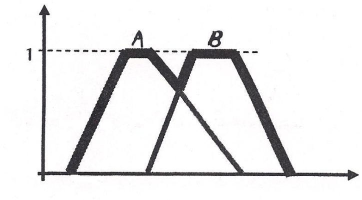
تعریف ۷ *اگر $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ باشد، متمم نسبی$\tilde{A}$ نسبت به $\tilde{B}$ که با $\tilde{B} - \tilde{A}$ نشان داده می شود، به صورت مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود*

$$(\tilde{B} - \tilde{A})(x) = \tilde{B}(x) - \tilde{A}(x) \qquad \forall x \in X$$

تعریف ۸ *اجتماع دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود*

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) = max\left\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)\right\} \qquad \forall x \in X$$

$(\tilde{A} \cup \tilde{B})(x)$ را با نماد $\tilde{A}(x) \vee \tilde{B}(x)$ نیز نمایش می دهند.

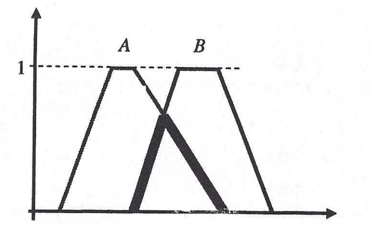


شکل ۱.۱: اجتماع دو مجموعه فازی

تعریف ۹ *اشتراک دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود*

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) = min\left\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)\right\} \qquad \forall x \in X$$

$(\tilde{A} \cap \tilde{B})(x)$ را با نماد $\tilde{A}(x) \wedge \tilde{B}(x)$ نیز نمایش می دهند.

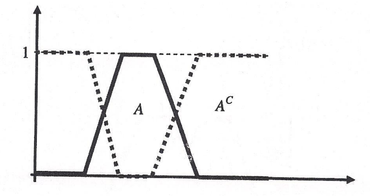


شکل ۲.۱: اشتراک دو مجموعه فازی

تعریف ۱۰ *مجموعه فازی $\tilde{A}'$، متمم مجموعه فازی $\tilde{A}$، با تابع عضویت $\tilde{A}'(x)$ به صورت زیر تعریف می شود:*

$$\forall x \in X \qquad \tilde{A}'(x) = ۱ - \tilde{A}(x)$$

به عنوان مثال به شکل زیر توجه فرمایید.



شکل ۱.۳: متمم مجموعه های فازی

۳.۱ α- برش ها و تحدب

تعریف ۱۱ *زیر مجموعه (معمولی) عناصری از X که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی $\tilde{A}$ حداقل به بزرگی α ($\alpha > ۰$) باشد، α- برش $\tilde{A}$ (یا مجموعه تراز α وابسته به $\tilde{A}$) گوییم و با $\tilde{A}_\alpha$ نشان می دهیم.*

$$\tilde{A}_\alpha = \left\{x \in X | \tilde{A}(x) \geq \alpha\right\}$$

اگر در α- برش، زیر مجموعه عناصر با درجه عضویت بزرگتر از α تعیین شوند به آن α- برش قوی α گفته می شود و به صورت $\tilde{A}'_\alpha$ نشان داده می شود.

$$\tilde{A}'_\alpha = \left\{x \in X | \tilde{A}(x) > \alpha\right\}$$

مثال ۲ *فرض کنید مجموعه فازی $\tilde{A}$ روی مجموعه جهانی $X = (a, b, c, d, e, f)$ به صورت ذیل تعریف شود:*

$$\tilde{A} = \left\{\frac{۱}{a} + \frac{۰/۹}{b} + \frac{۰/۶}{c} + \frac{۰/۳}{d} + \frac{۰/۰۱}{e} + \frac{۰}{f}\right\}$$

در این صورت چند α- برش $\tilde{A}$ در زیر آورده شده است:

$$A_۱ = \{a\} \qquad A_{۰/۶} = \{a, b, c\}$$

$$A_{۰^+} = \{a, b, c, d, e\} \quad A_۰ = \{X\}$$

و چند α- برش قوی $\tilde{A}$ به صورت زیر می باشد

$$A'_۱ = \{\phi\} \qquad A'_{۰/۶} = \{a, b\}$$

$$A'_{۰^+} = \{a, b, c, d, e\} \quad A'_۰ = \{a, b, c, d, e\}$$

بر اساس مفهوم α- برش می توان یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ با تابع عضویت $\tilde{A}(x)$ را به وسیله مجموعه های معمولی ارائه نمود:

$$\tilde{A}(x) = \sup_{\alpha > ۰} \left\{ \alpha | x \in \tilde{A}_\alpha \right\}$$

که در ریاضیات نماد sup همان سوپریمم است.

یک راه دیگر نمایش مجموعه های فازی استفاده از α- برشهای آن است که به صورت ذیل نمایش داده می شود:

$$\tilde{A} = \cup_{\alpha \in [۰,۱]} \alpha \, \tilde{A}_\alpha$$

به این رابطه، اصل تجزیه مجموعه های فازی گفته می شود: منظور از $\alpha \tilde{A}_\alpha$، ضرب مقدار α در درجه عضویت عناصر مجموعه $\tilde{A}_\alpha$ است.

تعریف ۱۲ *مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر داشته باشیم*

$$\tilde{A}(\lambda \, x_۱ + (۱ - \lambda) x_۲) \geq min(\tilde{A}(x_۱), \tilde{A}(x_۲))$$

λ عددی بین صفر و یک است. به عبارت دیگر مجموعه های فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر تمام α- برشهای آن مجموعه محدب باشند.

تعریف ۱۳ *مجموعه فازی $\tilde{A}$ را کراندار گوییم، اگر (برای هر $۰ < \alpha$) ، α- برشهای $\tilde{A}$ کراندار باشند یعنی برای هر $۰ < \alpha$ یک $R(\alpha)$ متناهی وجود داشته باشدکه برای هر $x \in \tilde{A}_\alpha$ داشته باشیم $\|x\| \leq R(\alpha)$، که در آن $\|x\| = \sqrt{x_۱^۲ + x_۲^۲ + \ldots + x_n^۲}$ (نرم اقلیدسی x) است.*

۴.۱ اصل گسترش

اصل گسترش یکی از مفاهیم اساسی و کلیدی در نظریه مجموعه های فازی است. این اصل ابزاری است برای گسترش و تعمیم مفاهیم ریاضی غیر فازی به گونه ای که به صورت کمیتهای فازی در آیند. این اصل به ویژه

در تعمیم عملگر های جبری بین اعداد و تعریف این عملگرها برای اعداد فازی مفید است.

فرض کنید یک تابع معمولی مانند $f: X \to Y$ داریم. این تابع به هر $x \in X$، نقطه ای از Y را می نگارد. بنابراین تابع f بر هر نقطه از X عمل کرده و نقطه ای از Y را به آن نسبت می دهد. حال می خواهیم f را طوری گسترش دهیم که به جای اینکه بر هر نقطه از X عمل کند، بر یک زیر مجموعه از X عمل کند. یعنی قلمرو f از X به $F(X)$، مجموعه تمام زیر مجموعه های فازی X تعمیم داده شود. آنچه مهم است تعریف مقدار حاصل از عمل f بر یک زیر مجموعه فازی از Xمثلا A است. مسلما انتظار داریم که $F(A)$ یعنی حاصل عمل f بر A، دیگر یک نقطه از Y نباشد.بلکه یک زیر مجموعه فازی از Y مانند B باشد.

تعریف ۱۴ *فرض کنید X و Y دو مجموعه و f یک تابع به صورت$f: X \to Y$ و $\tilde{A}$ یک زیر مجموعه فازی ازX باشد. اصل گسترش بیان می کند که می توانیم قلمرو f را به زیر مجموعه های فازی X و به صورت زیر گسترش دهیم*

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \Big\{(y, \tilde{B}(y))|y = f(x), x \in X\Big\}$$

که در آن

$$\tilde{B(y)} = \begin{cases} \sup\limits_{x, y=f(x)} \tilde{A(x)}, & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0, & f^{-1}(y) = \phi. \end{cases}$$

مثال ۳ *فرض کنید $X = Z$ و $y = f(x) = x^2$ و مجموعه های فازی $\tilde{A}$ از X بیانگر تقریبا ۲ به صورت زیر باشد*

$$\tilde{A} = \left\{\frac{0/2}{-2}, \frac{0/4}{-1}, \frac{0/6}{0}, \frac{0/8}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0/8}{3}, \frac{0/6}{4}, \frac{0/4}{5}, \frac{0/2}{6}\right\}$$

در این صورت با توجه به اصل گسترش داریم

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \left\{\frac{0/6}{0}, \frac{0/8}{1}, \frac{1}{4}, \frac{0/8}{9}, \frac{0/6}{16}, \frac{0/4}{25}, \frac{0/2}{36}\right\}$$

تعریف ۱۵ تعمیم اصل گسترش

فرض کنید f یک نگاشت از $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ ($X_1, X_2, ..., X_n$ حاصلضرب دکارتی) به مجموعه Y بوده و $\tilde{A}_1$، $\tilde{A}_2$، $\tilde{A}_n, \ldots$، به ترتیب n زیر مجموعه فازی از X_1، X_2، ...، X_n باشند. حال نتیجه عمل f بر n مجموعه ی فازی $\tilde{A}_1$، $\tilde{A}_2$، $\tilde{A}_n, \ldots$ زیر مجموعه های فازی $\tilde{B}$ از Y است که به صورت زیر بیان می گردد

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n) = \Big\{(y, \tilde{B}(x))|y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\Big\}$$

که در آن

$$\tilde{B(y)} = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)|f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=y} min(\tilde{A}_1(x_1), \tilde{A}_2(x_2), \ldots, \tilde{A}_n(x_n)), & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0, & f^{-1}(y) = \phi. \end{cases}$$

و f نگاشت فازی نامیده می شود.

تعریف ۱۶ *مجموعه پشتیبان [1] یک مجموعه فازی، زیر مجموعه ای از عناصر مجموعه های فازی با درجه عضویت مثبت است و به صورت زیر تعریف می شود.*

$$supp(\tilde{A}) = \Big\{x|\tilde{A}(x) > 0\Big\}$$

تعریف ۱۷ *هسته [2] یک مجموعه فازی، زیر مجموعه ای از عناصر مجموعه های فازی با درجه عضویت ۱ است.*

$$Core(\tilde{A}) = \Big\{x|\tilde{A}(x) = 1\Big\}$$

۵.۱ اعداد فازی

تعریف ۱۸ *عدد فازی، یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ روی اعداد حقیقی است که حداقل سه شرط زیر را دارا باشد:*

۱) $\tilde{A}$ باید یک مجموعه فازی نرمال باشد.

---
[1] set support
[2] Core

۲) A_α باید یک بازه بسته روی هر مقدار $(\alpha \in (0, 1])$ باشد.

۳)مجموعه پشتیبان $\tilde{A}$ باید محدود باشد.

از آنجا که هر α- برش از هر عدد فازی باید یک بازه بسته باشد در نتیجه هر عدد فازی یک مجموعه فازی محدب است. البته عکس این مطلب لزوما صادق نیست.

عدد فازی را بر حسبα - برشهایش نیز می توان تعریف نمود.

تعریف ۱۹ عدد فازی$\tilde{A}$را می توان به صورت زوج مرتب $\tilde{A}_1$ ، $\tilde{A}_2$ از توابع$\tilde{A}_1[\alpha]$ و$\tilde{A}_2[\alpha]$ که $0 \leq \alpha \leq 1$، در نظر گرفت چنانچه در شرایط زیر صدق کنند

۱) $\tilde{A}_1[\alpha]$ یک تابع کران دار به طور یکنوا صعودی است که از چپ پیوسته می باشد.

۲) $\tilde{A}_2[\alpha]$ یک تابع کران دار به طور یکنوا نزولی است که از چپ پیوسته می باشد.

۳) $\tilde{A}_1[\alpha] \leq \tilde{A}_2[\alpha]$؛ $0 \leq \alpha \leq 1$ که

$$\tilde{A}_1[\alpha] = inf\left\{x \in R : \tilde{A}(x) \geq \alpha\right\}$$

$$\tilde{A}_2[\alpha] = sup\left\{x \in R : \tilde{A}(x) \geq \alpha\right\}$$

تعریف ۲۰ $\tilde{A}[0]$ منحصرا به فرم زیر تعریف می گردد

$$\tilde{A}[0] = \cup_{0 \leq \alpha \leq 1} \tilde{A}[\alpha]$$

نمادگذاری: برای سهولت$\tilde{A}[\alpha]$ را به فرم زیر نمایش می دهیم

$$\tilde{A}[\alpha] = (a_1, a_2)$$

اعداد فازی مختلفی وجود دارد که به اختصار بعضی از آنها را معرفی می کنیم.

تعریف ۲۱ عدد فازی $\tilde{A}$ ، نوع $L - R$ نامیده می شود اگر تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{\alpha}), & x \leq m. \\ R(\frac{x-m}{\beta}), & x > m. \end{cases}$$

L و R توابعی غیر صعودی از R^+ به $[0,1]$ و $L(0)=R(0)=1$، آنگاه $\tilde{A}$ را با نماد $\tilde{A}=(m,\alpha,\beta)_{LR}$ نشان می دهیم. m را مقدار میانی وα وβ را به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست گفته می شود. از توابع مختلف می توان برای $L(x)$ و به طور مشابه برای $R(x)$استفاده کرد.

تعریف ۲۲ اگر $\tilde{A}=(m,\alpha,\beta)_{LR}$ و $L=R$، $\tilde{A}$ را یک عدد فازی Lنامیده و با نماد$\tilde{A}=(m,\alpha,\beta)_L$ نشان می دهیم.

تعریف ۲۳ فرض کنید $\tilde{A}=(m,\alpha,\beta)_L$، آنگاه $\tilde{A}$ را یک عدد فازی الف) مثلثی ب) نرمال ج) سهموی نامنداگر به ترتیب به صورت زیر تعریف شود.

(الف)

$$L(x)=\begin{cases} 1-x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \end{cases}$$

(ب)

$$L(x)=e^{-x^2}$$

(ج)

$$L(x)=\begin{cases} 1-x^2, & 0\le x\le 1\\ 0, & \end{cases}$$

تعریف ۲۴ عدد فازی $\tilde{A}=(m,\alpha,\beta)_L$، را یک عدد فازی متقارن می نامیم و با نماد $\tilde{A}=(m,\alpha)_L$ نشان می دهیم. اگر $\tilde{A}$ مثلثی، نرمال و یا سهموی باشد به ترتیب از نمادهای $\tilde{A}=(m,\alpha)_T$، $\tilde{A}=(m,\alpha)_N$ و $\tilde{A}=(m,\alpha)_P$ استفاده می کنیم.

مثال ۴ فرض کنید $L(x)=R(x)=e^{-x^2}$ و $M=0$ و $\alpha=\beta=1$ در این صورت

$$\tilde{A}(x)=\begin{cases} L\left(\frac{0-x}{1}\right)=e^{-x^2} & x\le 0\\ R\left(\frac{x-0}{1}\right)=e^{-x^2} & x>0 \end{cases}$$

آن دسته از اعداد فازی که ما در این پژوهش با آنها سر وکار داریم اعداد فازی مثلثی اند که با بیان کار بردی تر آنها را به صورت زیر معرفی می کنیم

تعریف ۲۵ *تابع عضویت مثلثی [۳] توسط سه پارامتر (a,b,c) تعریف می شود که به شرح زیر است.*

$$\tilde{A}(x)=\begin{cases} 0, & x<a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leq x\leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b\leq x\leq c \\ 0, & x>c \end{cases}$$

نمودار $\tilde{A}(x)$ وقتی $\tilde{A}$ عدد فازی مثلثی است، مثلثی با راس bی و قاعده $[a,c]$ می باشد.

تعریف ۲۶ *تابع عضویت ذوزنقه ای [۴] توسط چهار پارامتر (a,b,c,d) تعریف می شود که به شرح زیر است.*

$$\tilde{A}(x)=\begin{cases} 0, & x<a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leq x<b \\ 1, & b\leq x<c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c\leq x<d \\ 0, & x>d \end{cases}$$

و به اختصار آن را به صورت $\tilde{A}=trap(a,b,c,d)$ نشان می دهیم.

اعداد فازی که دارای تابع عضویتی به صورت زیر باشند اعداد فازی نمایی نامیده می شوند.

$$\tilde{A}(x)=exp[-(\frac{x-a}{\lambda})^2] \qquad \forall x\in X$$

که $a\in R$ و $\lambda\in R^+$ می باشد. عمو ما این اعداد را به صورت $\tilde{A}=(a,\lambda)$ نشان می دهیم.

۶.۱ عملگر های جبری بر اعداد فازی

تعریف ۲۷ *فرض کنید علامت $*$ بیانگر هر یک از چهار عمل اصلی ریاضی باشد و دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ روی مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است. آنگاه معادله $\tilde{A}*\tilde{B}$ به صورت زیر تعریف می شود:*

$$(\tilde{A}*\tilde{B})(z)=\sup_{z=x*y} min\{\tilde{A}(x),\tilde{B}(y)\} \qquad \forall z\in R$$

[۳] Triangular Membership Function
[۴] Trapezoidal Membership Function