دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

مرکز توپولوژیک برخی جبرهای گروهی با رویکرد نویفنگ

نگارش:

افسانه سلطانی

استاد راهنما: **دکتر سعید مقصودی**

استاد مشاور: **دکتر حبیب امیری**

مهر ۱۳۸۹

فهرست مطالب

چکیده:

فرض کنید $\mathcal{A}$ جبر باناخ و $\mathcal{A}^*$ و $\mathcal{A}^{**}$ به ترتیب دوگان اول و دوم $\mathcal{A}$ باشند. $\mathcal{A}^{**}$ و $(\mathcal{A}^* \odot \mathcal{A})^*$ را مجهز به ضرب آرنز می‌کنیم. در این پایان نامه رویکرد نویفنگ برای حل مساله مرکز توپولوژیک جبرهای $\mathcal{A}^{**}$ و $(\mathcal{A}^* \odot \mathcal{A})^*$ را بررسی می‌کنیم. با استفاده از صورت تعمیم یافته خاصیت مازور و قضیه‌های تجزیه، شرایط کافی برای قویاً نامنظم آرنز بودن $\mathcal{A}$ را ارائه می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم مرکز توپولوژیک $(\mathcal{A}^* \odot \mathcal{A})^*$ تحت شرایطی با جبر ضربگرهای راست روی $\mathcal{A}$ برابر است. قضایای کلی مذکور را برای جبرهای توابع و اندازه‌ها روی گروه موضعاً فشرده نظیر $L^1(G)$، $M(G)$ و $LUC(G)$ و جبرهای وزندار $L^1(G,\omega)$ و $LUC(G,\omega^{-1})$ به کار می‌گیریم و اثبات‌های متفاوتی برای برخی قضایای شناخته شده و پاسخ‌هایی برای برخی سوال‌های باز حل نشده ارائه می‌دهیم.
رده‌بندی موضوعی: اولیه ۲۲D۰۵، ۴۳A۱۰، ۴۳A۲۰. ثانویه ۴۳A۶۰.

کلمات کلیدی: جبرباناخ، جبرفون نویمان، جبرگروهی، جبرگروهی وزندار، خاصیت مازور، خود به خود کرانداری، ضرب آرنز، قویاً نامنظم آرنز، گروه موضعاً فشرده، مرکز توپولوژیک، همریختی مدولی.

پیشگفتار

در سال ۱۹۵۱، آرنز برای اولین بار با استفاده از ضرب روی $\mathcal{A}$، دو ضرب به نام‌های ضرب‌های آرنز اول و دوم که آن‌ها را به ترتیب با $\odot$ و $\boxdot$ نمایش می‌دهیم، روی $\mathcal{A}^{**}$، دوگان دوم $\mathcal{A}$، معرفی کرد.
ضرب آرنز اول یا ضرب چپ روی $\mathcal{A}^{**}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$< F \odot H, f >=< F, H \odot f >, \qquad (F, H \in \mathcal{A}^{**} \ , \ f \in \mathcal{A}^{*})$$

$$< H \odot f, a >=< H, f \odot a >, \qquad (a \in \mathcal{A})$$

$$< f \odot a, b >=< f, ab > \qquad (b \in \mathcal{A}).$$

ضرب دوم یا ضرب آرنز راست به صورت زیر تعریف می‌شود

$$< F \boxdot H, f >=< H, f \boxdot F >, \qquad (F, H \in \mathcal{A}^{**}, f \in \mathcal{A}^{*})$$

$$< f \boxdot F, a >=< F, a \boxdot f >, \qquad (a \in \mathcal{A})$$

$$< a \boxdot f, b >=< f, ba > \qquad (b \in \mathcal{A}).$$

متناظر با ضرب‌های آرنز، مرکز توپولوژیک اول و دوم $\mathcal{A}^{**}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$Z_1(\mathcal{A}^{**}) = \{n \in \mathcal{A}^{**} : \text{نگاشت } m \mapsto n \odot m \text{ ضعیف}^* - \text{ضعیف}^* \text{ پیوسته است}\},$$

$$Z_2(\mathcal{A}^{**}) = \{n \in \mathcal{A}^{**} : \text{نگاشت } m \mapsto m \boxdot n \text{ ضعیف}^* - \text{ضعیف}^* \text{ پیوسته است}\}.$$

مشخص کردن مرکز توپولوژیک جبرهای باناخ یکی از مسایل مطرح در آنالیز هارمونیک است. توجه کنید $\mathcal{A} \subseteq Z_1(\mathcal{A}^{**}) \subseteq \mathcal{A}^{**}$. چنانچه $Z_1(\mathcal{A}^{**}) = \mathcal{A}$ و یا $Z_(\mathcal{A}^{**}) = \mathcal{A}^{**}$، $\mathcal{A}$ را به ترتیب قویاً نامنظم آرنز و منظم آرنز می‌نامند. نظم‌پذیری آرنز را اولین بار خود آرنز معرفی کرد. توجه کنید جبر $\mathcal{A}$ منظم آرنز است اگر و تنها اگر دو ضرب آرنز روی $\mathcal{A}^{**}$ با هم برابر باشند. برای اطلاعات بیشتر به [۵۹]، [۸] و [۱۱] مراجعه کنید. مسالهٔ مرکز توپولوژیک برای دستهٔ وسیعی از جبرهای آنالیز هارمونیک و همچنین جبرهای مهم دیگر در نظریه جبر عملگرها بررسی شده است. در زیر به مهمترین نتایج در حوزهٔ برخی جبرهای گروهی اشاره می‌کنیم.

فرض کنیم $C_b(G)$ مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط $-$ مقدار کراندار روی گروه موضعاً فشردهٔ G باشد. تابع $f \in C_b(G)$ را پیوستهٔ یکنواخت چپ می‌نامیم اگر نگاشت $x \longmapsto \ell_x f$ از G به $C_b(G)$ در e پیوسته باشد که در آن ℓ_x عملگر انتقال چپ است. یا معادلاً برای هر $\epsilon > 0$، یک همسایگی U از e در G موجود باشد به طوری که برای هر $x \in G$ داشته باشیم

$$|f(y^{-1}x) - f(x)| < \epsilon \qquad (y \in U).$$

فضای تمام توابع پیوستهٔ یکنواخت چپ را با $LUC(G)$ نشان می‌دهیم. برای هر گروه موضعاً فشردهٔ G، می‌توان $LUC(G)^*$ را به یک جبر باناخ تبدیل کرد. در واقع روی $LUC(G)^*$ عمل ضرب . را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$< m.n, f >=< m, n.f >, \qquad (m, n \in LUC(G)^*,\ f \in LUC(G))$$
$$< n.f, x >=< n, \ell_x f > \qquad (x \in G).$$

مرکز توپولوژیک $LUC(G)^*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Z_t(LUC(G)^*) = \{n \in LUC(G)^* :\ \text{نگاشت } m \longmapsto n.m \text{ ضعیف}^* - \text{ضعیف}^* \text{پیوسته است}\}.$$

در سال ۱۹۷۴، زاپا [۷۰] برای اولین بار مساله مرکز توپولوژیک جبر $LUC(\mathbb{R})^*$ را بررسی کرد. وی نشان داد که مرکز توپولوژیک $LUC(\mathbb{R})^*$ برابر با $M(\mathbb{R})$، یعنی جبراندازه‌های بورل منظم روی $\mathbb{R}$ است. در سال ۱۹۸۴ گروسر و لوزرت [۲۵] نتایج زاپا را به گروه‌های موضعاً فشردهٔ آبلی تعمیم دادند. در سال ۱۹۸۶ لائو نتایج مذکور را به حالت کلی یعنی گروه موضعاً فشردهٔ دلخواه تعمیم داد [۴۱]. این نتایج را در سال ۲۰۰۷ فری و نویفنگ به گروه توپولوژیک دلخواه، نه لزوماً موضعاً فشرده، تعمیم دادند [۱۶].

فرض کنیم λ یک اندازه هار چپ روی G باشد. جبر باناخ تمام توابع مختلط $-$ مقدار و بورل اندازه‌پذیر φ روی G که نسبت به λ انتگرال پذیر هستند و با نرم

$$\| \varphi \|_1 = \int_G | \varphi | \, d\lambda$$

مجهز شده است را جبر گروهی G می‌نامند و با $L^1(G)$ نمایش می‌دهند. ضرب در $L^1(G)$ به نام پیچش، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_G \varphi(y)\psi(y^{-1}x)d\lambda(x) \qquad \Big(\varphi, \psi \in L^1(G)\Big).$$

در سال ۱۹۸۷ ایشیک، پیم و اولگر [۳۴] مرکز توپولوژیک $L^1(G)$ را برای گروه فشردهٔ G بررسی کردند و نشان دادند $L^1(G)$ قویاً نامنظم آرنز است، یعنی $Z_1(L^1(G)^{**}) = L^1(G)$. درسال ۱۹۸۸ لائو و لوزرت [۴۳] نتایج آنها را به گروه موضعاً فشردهٔ دلخواه تعمیم داد. در سال ۲۰۰۴ نویفنگ [۵۳] با روشی کاملاً متفاوت همین نتایج را برای گروه موضعاً فشردهٔ غیر فشرده اثبات کرد.

فضای تمام اندازه‌های مختلط بورل منظم μ روی G را با $M(G)$ نشان می‌دهیم و آن را با نرم $\|\mu\| = |\mu|(G)$ مجهز می‌کنیم. برای هر $\mu, \nu \in M(G)$ ضرب پیچشی μ و ν را با $\mu * \nu$ نمایش می‌دهیم و برای هر $f \in C_0(G)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(\mu * \nu)(f) \;\; = \;\; \int_G \int_G f(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y).$$

$M(G)$ همراه با ضرب پیچشی فوق و نرم $\|\mu\| = |\mu|(G)$ یک جبر باناخ با همانی δ_e است.

درسال ۱۹۹۵ قهرمانی و لائو [۲۰] حدس زدند جبراندازهٔ $M(G)$ قویاً نامنظم آرنز است. در سال ۲۰۰۵ نویفنگ [۵۴] این حدس را برای ردهٔ وسیعی از گروه‌های موضعاً فشرده پاسخ مثبت داد. در سال ۲۰۰۵ نویفنگ با رویکرد خاص خود نشان داد مرکز توپولوژیک $LUC(G)^*$ برابر $M(G)$ است. وی نتایج مشابهی برای مساله مشکل‌تر مرکز توپولوژیک جبرهای وزندار $L^1(G,\omega)$ و $LUC(G,\omega^{-1})$ را نیز ارائه کرده است.

در این پایان نامه، ابتدا در فصل ۱ مقدمات مورد نیاز برای مطالعهٔ فصل‌های بعد را جمع آوری می‌کنیم. در فصل ۲ خاصیت مازور و خاصیت (X) و تعمیم‌های نویفنگ از این خواص را ارائه می‌کنیم. در فصل ۳ که در واقع مهمترین بخش این پایان نامه است قضیه‌ای کلی دربارهٔ مرکزتوپولوژیک $\mathcal{A}^{**}$ و $(\mathcal{A}^* \odot \mathcal{A})^*$ اثبات می‌کنیم، که در اینجا $\mathcal{A}$ جبر باناخ و دوگان آن مجهز به ضرب آرنز چپ $\odot$ است. در فصل ۴، ۵ و ٦ مرکزتوپولوژیک جبرهای گروهی $L^1(G)$، $LUC(G)$ و $M(G)$ و جبرهای وزندار نظیر آنها را بررسی می‌کنیم. اثبات‌ها در این فصل همگی اثبات کلی در فصل ۳ را در حالت خاص مورد نظر شبیه‌سازی می‌کنند. در فصل پایانی به عنوان محصولی فرعی به بررسی همریختی‌های $\mathcal{A}^{**}-$ مدولی روی $\mathcal{A}^*$ می‌پردازیم و حدس هوفمایر — ویت استاک را در مورد پیوستگی همریختی‌های $L^1(G)^{**}-$ مدولی $L^\infty(G)$ پاسخ مثبت می‌دهیم.

فصل ۱

مقدمات

دراین فصل تعاریف، مفاهیم و قضیه‌های مورد نیاز برای فصل‌های بعدی را می آوریم.

تعریف ۱.۱ (یک) فرض کنید A یک مجموعه و $\leq$ یک رابطه روی آن باشد به طوری که

(الف) برای هر $x \in A$، $x \leq x$.

(ب) برای هر $x, y \in A$ اگر $x \leq y$ و $y \leq x$ آن‌گاه $x = y$.

(ج) برای هر $x, y, z \in A$ اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ آن‌گاه $x \leq z$.

در این صورت A را یک مجموعهٔ جزئاً مرتب می‌نامیم.

(دو) فرض کنید $(A, \leq)$ جزئاً مرتب باشد و $B \subset A$. گوییم $m \in B$ کوچکترین عضو B است هرگاه برای هر $b \in B$، $m \leq b$. مجموعهٔ $(A, \leq)$ را خوش‌ترتیب می‌نامیم هرگاه هر عضو غیر تهی آن کوچکترین عضو داشته باشد.

(سه) عدد اصلی κ اندازه‌پذیر است هرگاه برای هر مجموعهٔ Γ با عدد اصلی κ، اندازهٔ μ روی $\mathcal{P}(\Gamma)$ موجود باشد به طوری که $\mu(\Gamma) = ۱$ و $\mu(\{x\}) = ۰$ برای هر $x \in \Gamma$. در اینجا $\mathcal{P}(\Gamma)$ مجموعهٔ توانی Γ را نشان می‌دهد. برای تعریف اندازه تعریف ۱۵.۱ را ببینید.

در اینجا چند تذکر را دربارهٔ اعداد اصلی اندازه‌پذیر لازم می‌دانیم.

تذکر ۲.۱ در اصول نظریه مجموعه‌های تسرملو – فرانکل به همراه اصل انتخاب (ZFC)، وجود اعداد اصلی اندازه‌پذیر را نمی‌توان ثابت کرد. فرض عدم وجود اعداد اصلی اندازه‌پذیر با ZFC سازگار

است. اعداد اصلی $\aleph_0$ و $\aleph_1$ (اعداد اصلی بعد از $\aleph_0$) اندازه‌ناپذیرند. پذیرفتن فرضیه پیوستار ایجاب می‌کند که c، عدد اصلی پیوستار، اندازه‌ناپذیر است. اگر $\kappa_1 \leq \kappa_2$ دو عدد اصلی باشند به طوری که κ_2 اندازه‌ناپذیر باشد، آن‌گاه κ_1 نیز اندازه‌ناپذیر است.

برای اطلاعات بیشتر می‌توانید به [۳۵] مراجعه کنید.

قضیه **۳.۱** (الف) (**قضیه بازگشتی ترامتناهی**). فرض کنید C یک مجموعه، J مجموعه‌ای خوش‌ترتیب، و α_0 کوچکترین عضو آن باشد. همچنین فرض کنید $\mathcal{F}$ مجموعهٔ همهٔ توابعی باشد که قطعه‌ای از J را بتوی C می‌نگارد (از جمله تابع تهی که S_{α_0} را بتوی C می‌نگارد). به ازای تابع مفروض $P : \mathcal{F} \to C$، تابعی یکتا مانند $h : J \to C$ وجود دارد که به ازاء هر $x \in J$، $h(x) = P(h_{|S_x})$، که در آن S_x قطعهٔ آغازین x است، به عبارت دیگر $S_x = \{\alpha \in J \ : \ \alpha \leq x\}$.

(ب) مجموعهٔ اعداد اصلی با رابطه ترتیب معمولی خوش‌ترتیب است.

(ج) (**اصل خوش‌ترتیبی**). اگر A مجموعهٔ دلخواهی باشد. آن‌گاه می‌توان روی A رابطه ترتیبی معرفی کرد که A با آن رابطه خوش‌ترتیب شود.

در واقع اگر I یک مجموعه باشد، می‌توان رابطهٔ ترتیب $\leq$ روی I را طوری تعریف کرد که I خوش‌ترتیب باشد و $|\{\alpha \in I \ : \ \alpha \leq \gamma\}| < |I|$ برای هر $\gamma \in I$، که در آن $|A|$ عدد اصلی مجموعهٔ A را نشان می‌دهد.

تعریف **۴.۱** (یک) مجموعهٔ D را جهت‌دار می‌نامیم اگر رابطه‌ای مانند $<$ روی D موجود باشد به طوری که برای هر $\alpha, \beta, \gamma \in D$ داشته باشیم

(الف) اگر $\beta < \alpha$ و $\gamma < \beta$، آن‌گاه $\gamma < \alpha$.

(ب) برای هر $\alpha, \beta \in D$، $\gamma \in D$ موجود باشد که $\alpha < \gamma$ و $\beta < \gamma$.

(دو) منظور از یک تور در مجموعهٔ X تابعی است مانند $f : D \longrightarrow X$ که در آن D مجموعهٔ جهت‌دار است. معمولا با فرض $x_\alpha = f(\alpha)$ برای هر $\alpha \in D$، تور $f : D \longrightarrow X$ را با $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ یا به طور ساده با (x_α) نمایش می‌دهیم .

(سه) فرض کنید $f : I \to X$ یک تور در مجموعهٔ X باشد. منظور از یک زیر تور از f عبارت است از نگاشت $f \circ \varphi : J \to X$ که در آن J مجموعه‌ای جهت دار و $\varphi : J \to I$ نگاشت حافظ ترتیب است به طوری که $\varphi(J)$ در I هم‌پایان است. یادآوری می‌کنیم اگر $(A, \leq)$ یک مجموعهٔ جهت‌دار باشد و $B \subseteq A$. گوییم B در A هم‌پایان است هرگاه برای هر $a \in A$ عضو $b \in B$ موجود باشد که $a \leq b$.

(چهار) فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. گوییم تور $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ در X به $x_\circ$ همگراست هرگاه برای هر همسایگی U از $x_\circ$ در X، عنصر $\alpha_\circ \in D$ موجود باشد به طوری که برای هر $\alpha > \alpha_\circ$، $x_\alpha \in U$ و می‌نویسیم $x_\alpha \to x_\circ$ یا $\lim_\alpha \ x_\alpha = x_\circ$. می‌توان ثابت کرد که $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ به $x_\circ$ همگراست اگر و تنها اگر هر زیر تور $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ به $x_\circ$ همگرا باشد.

قضیه ۵.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $\bar{A}$ بستار زیرمجموعهٔ A در X را نمایش دهد. در این صورت

(الف) $x \in \bar{A}$ اگر و تنها اگر تور (x_α) در A موجود باشد به طوری که $x_\alpha \longrightarrow x$.

(ب) A فشرده است اگر و تنها اگر هر تور در A، دارای یک زیرتور همگرا در A باشد.

اثبات. به بخش ۳ − ۱۰ از [۲۸] رجوع کنید. ■

قضیه ۶.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک و $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد. در این صورت f پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر تور x_α همگرا به x در X داشته باشیم $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$.

اثبات. به بخش ۳ − ۱۰ از [۲۸] رجوع کنید. ■

لم ۷.۱ فرض کنید X فضای هاسدورف فشرده و $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ توری در X باشد. در این صورت اگر هر زیر تور همگرا از $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ به $x_\circ$ همگرا باشد آن‌گاه تور $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ به $x_\circ$ همگراست.

اثبات. فرض کنیم هر زیرتور همگرا از $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ همگرا به $x_\circ$ باشد. اگر $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ همگرا به $x_\circ$ نباشد در این صورت همسایگی $U_\circ$ از $x_\circ$ موجود است به طوری که برای هر α، φ_αیی موجود است که $\varphi_\alpha > \alpha$ و $x_{\varphi_\alpha} \notin U_\circ$. اکنون بوضوح مجموعهٔ تمام اعضاء φ_α یک مجموعهٔ جهت‌دار است و $\{x_{\varphi_\alpha} \ : \ \alpha \in I\}$ یک زیرتور از $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ است. چون X فشرده است پس $(x_{\varphi_\alpha})_{\alpha\in I}$ باید یک زیرتور همگرا و طبق فرض همگرا به $x_\circ$ داشته باشد. که این با توجه به نوع انتخاب x_{φ_α}ها غیر ممکن است. ■

تعریف ۸.۱ فرض کنید X یک فضای نرمدار و $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ توری در X باشد. گوییم سری $\sum\limits_{\alpha\in I} x_\alpha$ به s همگراست هرگاه تور مجموع جزئی آن $(s_F)_{F\in\mathcal{F}}$ به s همگرا باشد که در آن $s_F = \sum\limits_{\alpha\in F} x_\alpha$، F مجموعهٔ متناهی، $\mathcal{F}$ خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی I است که با رابطه عکس شمول جهتدار شده است.

تعریف ۹.۱ فرض کنید X یک مجموعه باشد.

(یک) خانوادهٔ $\mathcal{F}$ از زیر مجموعه‌های ناتهی X را یک پالایه گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد

(الف) اگر $A, B \in \mathcal{F}$، آن‌گاه $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(ب) اگر $A \in \mathcal{F}$ و $A \subseteq B \subseteq X$ آن‌گاه $B \in \mathcal{F}$.

(دو) یک مجموعهٔ $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های ناتهی X را یک پایه پالایه گوییم، هرگاه برای هر $A, B \in \mathcal{B}$ مجموعهٔ $C \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد به طوریکه $C \subseteq A \cap B$.

(سه) فرض کنید I یک مجموعهٔ دلخواه باشد. فرض کنید $\mathcal{F}$ مجموعهٔ همهٔ پالایه‌های سره روی I باشد، به عبارت دیگر

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{F} \ : \ \mathcal{F} \neq \mathcal{P}(I) \text{ و } \mathcal{F} \text{ پالایه روی } I \text{ است}\}.$$

بوضوح هر زنجیر صعودی در $\mathcal{P}$ دارای کران بالا در $\mathcal{P}$ است. بنا به لم زورن $\mathcal{P}$ عضو ماکزیمال دارد. اعضای ماکزیمال $\mathcal{P}$ را فراپالایه روی I می‌نامند.

(چهار) فرض کنید X یک مجموعه باشد. همچنین فرض کنید I یک مجموعه اندیس و $\{x_i\}_{i\in I}$ زیرمجموعه‌ای از X باشد. چنانچه $\mathcal{F}$ یک پالایه روی I باشد گوییم مجموعهٔ $\{x_i\}_{i\in I}$ به $x \in X$ روی $\mathcal{F}$ همگراست اگر برای هر همسایگی V از x، $\{i \in I \ : \ x_i \in V\} \subseteq \mathcal{F}$. در این حالت می‌نویسیم $x = \lim_{i\to\mathcal{F}} x_i$.

لم ۱۰.۱ فرض کنید K فضای توپولوژیک هاسدورف باشد. K فشرده است اگر و تنها اگر هر مجموعهٔ $\{x_i\}_{i\in I} \subset K$ تحت هر فراپالایه $\mathcal{U}$ روی I همگرا باشد.

اثبات. به مرجع [۳] رجوع شود. ■

تعریف ۱۱.۱ فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد.

(الف) مجموعه‌ی تمام توابع پیوستهٔ مختلط ـ مقدار روی X را با $C(X)$ نشان می‌دهیم. $C(X)$ همراه با اعمال نقطه‌ای توابع و ضرب اسکالر یک فضای برداری است. به علاوه برای $f \in C(X)$ محمل f به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\text{supp } (f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq \circ\}}.$$

(ب) مجموعه‌ی تمام توابع پیوستهٔ مختلط ـ مقدار کراندار روی X را با $C_b(X)$ نشان می‌دهیم. بنابراین $C_b(X)$ یک زیرفضای $C(X)$ است و همراه با $\|.\|_u$ یک فضای باناخ است. یادآوری می‌کنیم که

$$\|f\|_u = \sup\{|f(x)| : x \in X\} \quad (f \in C_b(X)).$$

(ج) مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط ـ مقدار f روی X که در بی‌نهایت صفر می‌شوند را با $C_\circ(X)$ نشان می‌دهیم. در بی‌نهایت صفر شدن بدین معنی است که برای هر $\epsilon > \circ$، زیرمجموعهٔ فشردهٔ K از X موجود است که برای هر $x \in X\backslash K$، $|f(x)| < \epsilon$. بنابراین $C_\circ(X)$ یک زیرفضای $C(X)$ و یک ایدآل در $C_b(X)$ است که همراه $\|.\|_u$ یک فضای باناخ است.

(د) مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط ـمقدار f روی X با محمل فشرده را با $C_{\circ\circ}(X)$ یا $C_c(X)$ نشان می‌دهیم که زیرفضای $C(X)$ و یک ایدآل $C_b(X)$ است. همچنین $C_{\circ\circ}(X)$ در $C_\circ(X)$ چگال است.

(ر) فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف باشد. اگر X غیرفشرده باشد، آن‌گاه

$$C_{\circ\circ}(X) \subset C_\circ(X) \subset C_b(X) \subset C(X)$$

و اگر X فشرده باشد، آن‌گاه $C_{\circ\circ}(X) = C_\circ(X) = C_b(X) = C(X)$.

تعریف ۱۲.۱ فرض کنید X یک فضای موضعاً فشرده هاسدورف و (Y, d) یک فضای متریک و $C_b(X, Y)$ فضای تمام توابع پیوستهٔ کراندار از X به Y باشد. زیرمجموعهٔ $K \subseteq C_b(X, Y)$ را همپیوسته در نقطهٔ $x_\circ \in X$ گوییم هرگاه برای هر $\epsilon > \circ$، همسایگی U از $x_\circ$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $y \in U$ و $f \in K$ داشته‌باشیم

$$d(f(x_\circ), f(y)) < \epsilon.$$

K را همپیوسته گوییم هر گاه در هر نقطهٔ $x \in X$ همپیوسته باشد.

قضیه ۱۳.۱ (آرزلا– آسکولی). فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده هاسدورف و (Y, d) یک فضای متریک باشد. زیرمجموعهٔ K از فضای باناخ توابع پیوسته کراندار از X به Y دارای بستار فشرده در توپولوژی همگرایی یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشرده است اگر و تنها اگر K همپیوسته باشد و برای هر $x \in X$ مجموعهٔ $\{T(x) : T \in K\}$ دارای بستار فشرده در Y باشد.

اثبات. به [۵۲] رجوع کنید. ■

لم ۱۴.۱ (اوریسون). فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشردهٔ هاسدورف، V یک زیرمجموعهٔ باز و K یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ X باشند به طوری که $K \subseteq V$. در این صورت تابع $f \in C_{\circ\circ}(X)$ موجود است که $\text{supp}\,(f) \subseteq V$ و $f \equiv ۱$ روی K.

اثبات. به قضیه‌ی ۲ — ۲۰ از [۶۰] رجوع کنید. ■

قضیه **۱۵.۱** **(استون_ وایرشتراس).** فرض کنید X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد و $\mathcal{A}$ زیرجبری از $C_\circ(X)$ به طوری که تحت مزدوج مختلط بسته باشد و برای هر $x \in X$، تابع $f \in \mathcal{A}$ موجود باشد که $f(x) \neq \circ$ و بعلاوه برای هر $x, y \in X$، تابع $f \in \mathcal{A}$ موجود باشد که $f(x) \neq f(y)$. آن‌گاه $\mathcal{A}$ به طور یکنواخت در $C_\circ(X)$ چگال است.

اثبات. به مرجع [۳۷] رجوع کنید. ■

تعریف **۱۶.۱** فرض کنیم X یک مجموعه باشد.

(الف) خانواده‌ی $\mathcal{M}$ از زیرمجموعه‌های X را یک σ_جبر در X گوییم هرگاه $\mathcal{M}$ دارای خواص زیر باشد.

(۱) $X \in \mathcal{M}$.

(۲) اگر $A \in \mathcal{M}$، آن‌گاه $A^c \in \mathcal{M}$. که در آن A^c متمم A نسبت به X است.

(۳) اگر $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$، آن‌گاه $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

(ب) اگر $\mathcal{M}$ یک σ_جبر در X باشد، آن‌گاه $(X, \mathcal{M})$ را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضای $\mathcal{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامیم.

(ج) هرگاه $(X, \mathcal{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. نگاشت $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ را اندازه‌پذیر گوییم اگر به ازای هر مجموعهٔ باز V در $\mathbb{C}$، $f^{-1}(V)$ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر در X باشد.

(د) یک اندازه مثبت، تابعی $[\circ, \infty]$_مقدار مانند μ است که روی یک σ_ جبر مانند $\mathcal{M}$ تعریف شده است به طوری که $\mu(\varnothing) = \circ$ و μ جمعی شمارش‌پذیر است؛ یعنی برای دنبالهٔ (A_i) از عناصر دو به دو مجزای $\mathcal{M}$ داریم

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

در این حالت گوییم زیرمجموعهٔ A از X، σ_متناهی است هرگاه $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ که برای هر k، $A_k \in \mathcal{M}$ و $\mu(A_k) < \infty$.

تعریف **۱۷.۱** فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده باشد. در این صورت

(الف) اگر $\mathcal{B}(X)$ کوچکترین σ—جبر شامل تمام زیر مجموعه‌های بستهٔ X باشد، آن‌گاه $\mathcal{B}(X)$ را

σ_جبر مجموعه‌های بورل X و اعضای $\mathcal{B}(X)$ را مجموعه‌های بورل گوییم.

(ب) اندازه‌ی μ روی X را بورل می‌نامیم اگر روی $\mathcal{B}(X)$ تعریف شده باشد.

(ج) یک اندازهٔ مختلط روی X، یک تابع مختلط مقدار μ تعریف شده روی $\mathcal{B}(X)$ است به طوری که جمعی شمارش‌پذیر باشد؛ یعنی اگر E برابر اجتماع مجزای خانوادهٔ $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ از مجموعه‌های بورل X باشد، آن‌گاه

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

متناظر به هر اندازهٔ μ روی X، تابع $|\mu| : \mathcal{B}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ را تغییر کل μ می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$|\mu|(E) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| : \quad E \in \mathcal{B}(X)\right\}$$

که در آن سوپریمم روی همهٔ افرازهای متناهی $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ از E متشکل از مجموعه‌های بورل تغییر می‌کند. در این صورت $|\mu|$ یک اندازهٔ مثبت متناهی روی X است؛ یعنی $|\mu|(X) < \infty$. به علاوه برای هر اندازهٔ مختلط μ تعریف می‌کنیم

$$\|\mu\| = |\mu|(X).$$

فضای تمام اندازه‌های مختلط مقدار روی X را با $M(X)$ نشان می‌دهیم وبرای هر $\mu, \nu \in M(X)$، $E \in \mathcal{B}(X)$ و $c \in \mathbb{C}$ تعریف می‌کنیم

$$(c\mu + \nu)(E) = c\mu(E) + \nu(E).$$

در این صورت $M(X)$ همراه با اعمال و نرم فوق یک فضای باناخ است.

اندازهٔ دیراک δ_x روی X، متعلق به $M(X)$ است که برای هر زیرمجموعهٔ بورل E از X به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E. \end{cases}$$

تعریف ۱۸.۱ فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده باشد. در این صورت

(الف) اندازهٔ مثبت μ منظم درونی روی زیرمجموعهٔ بورل E از X است اگر

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \text{فشرده } K \subseteq E\}.$$

و منظم بیرونی روی E است اگر

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) :\ \text{باز}\ V \supseteq E\}.$$

اندازهٔ μ منظم است هرگاه منظم درونی و بیرونی روی مجموعه‌های بورل باشد.

(ب) اندازهٔ بورل μ را رادون می‌نامیم اگر روی مجموعه‌های فشرده، متناهی، روی مجموعه‌های بورل، منظم بیرونی و روی مجموعه‌های باز، منظم درونی باشد.

(ج) گوییم اندازهٔ μ نسبت به ν مطلقا پیوسته است و می‌نویسیم $\mu \ll \nu$، اگر اندازهٔ $|\mu|$ نسبت به ν مطلقا پیوسته باشد؛ یعنی برای زیرمجموعهٔ بورل $E \subseteq X$، اگر $\nu(E) = 0$، آن‌گاه $|\mu|(E) = 0$. مجموعهٔ تمام اندازه‌های مطلقا پیوسته نسبت به ν را با $M_a(X, \nu)$ نشان می‌دهیم.
به علاوه گوییم μ نسبت به ν متعامد است و می‌نویسیم $\mu \perp \nu$ اگر و تنها اگر $|\mu| \perp \nu$؛ یعنی زیرمجموعهٔ بورل E از X وجود داشته باشد به طوری که $\nu(E) = 0$ و $|\mu|(X \setminus E) = 0$.

(د) فرض کنیم μ یک اندازهٔ مثبت رادون باشد. زیرمجموعهٔ E از X را موضعاً پوچ می‌نامیم هرگاه برای هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ K از X، $E \cap K$ پوچ باشد؛ یعنی $\mu(E \cap K) = 0$.
یک خاصیت وابسته به $x \in X$ را موضعاً تقریبا در X برقرار می‌نامیم اگر مجموعهٔ نقاطی که دارای آن خاصیت نیست، موضعاً پوچ باشد.

قضیه ۱.۱۹ فرض کنید μ اندازهٔ رادون روی فضای موضعاً فشردهٔ X باشد. همچنین فرض کنید $\mathcal{U}$ خانوادهٔ تمام مجموعه‌های باز دو به دو مجزای X باشد. آن‌گاه $\mu(\cup\{U : U \in \mathcal{U}\}) = \sum_{U \in \mathcal{U}} \mu(U)$.

اثبات. به قضیه ۲۵–۱۱از [۲۹] مراجعه شود. ■

تعریف ۱.۲۰ فرض کنید μ اندازهٔ رادون روی فضای موضعاً فشردهٔ X باشد. اگر $\mathcal{U}$ خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌های باز $\mu-$ پوچ X باشد، اجتماع این خانواده، بزرگترین مجموعهٔ باز $\mu-$ پوچ است. متمم مجموعهٔ فوق را محمل μ می‌نامیم و با $\mathrm{supp}(\mu)$ نشان می‌دهیم. بنابراین محمل μ کوچکترین مجموعهٔ بسته است که متمم آن $\mu-$ پوچ است. لذا همواره $\mu(X \setminus \mathrm{supp}(\mu)) = 0$.

لم ۱.۲۱ فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده باشد. در این صورت مجموعهٔ اندازه‌های با محمل فشرده در $M(X)$ چگال‌اند.

اثبات. $\mu \in M(X)$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم

$$|\mu|(X) = \sup\{|\mu|(K) : \quad \text{فشرده} \ \ K \subseteq X\}.$$

پس برای هر $\epsilon > 0$، زیرمجموعهٔ فشردهٔ K از X وجود دارد به طوری که $|\mu|(X \setminus K) < \epsilon$. اندازهٔ $\nu \in M(X)$ را برای هر زیرمجموعهٔ بورل E از X به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\nu(E) = \mu(E \cap K).$$

به راحتی دیده می‌شود که $\mathrm{supp}(\nu) \subseteq K$. پس محمل ν فشرده است. از طرفی

$$\begin{aligned} |\mu - \nu|(X) &= |\mu - \nu|(K) + |\mu - \nu|(X \setminus K) \\ &= 0 + |\mu|(X \setminus K); \end{aligned}$$

یعنی $\|\mu - \nu\| \leq \epsilon$. ■

تعریف **۲۲.۱** فرض کنیم $L^\infty(X,\mu)$ مجموعهٔ همهٔ توابع اندازه‌پذیر مختلط– مقدار روی X باشد به طوری که

$$||f||_\infty = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \ \alpha \geq 0, x \in X \ \text{برای موضعا تقریبا هر} \ \ |f(x)| \leq \alpha\} < \infty.$$

دو تابع $f, g \in L^\infty(X,\mu)$ را یکسان می‌گیریم اگر $||f - g||_\infty = 0$؛ یعنی f و g موضعاً تقریبا همه جا برابر باشند و می‌نویسیم $f \equiv g$. در این صورت $L^\infty(X,\mu)$ همراه با اعمال نقطه‌ای توابع و نرم $||.||_\infty$، یک فضای باناخ است.

برای $1 \leq p < \infty$ ، خانوادهٔ تمام توابع مختلط– مقدار f روی X با شرط

$$(\int_X |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

را با $L^p(X,\mu)$ نشان می‌دهیم. $L^p(X,\mu)$ با اعمال نقطه‌ای توابع و نرم زیر یک فضای باناخ است

$$\|f\|_p = (\int_X |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} \quad (f \in L^p(X,\mu)).$$

حال فرض کنیم μ اندازهٔ شمارشی روی مجموعهٔ X باشد. در این صورت فضای $L^p(X,\mu)$ را با نماد

$\ell^p(X)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین $\ell^p(X)$، فضای همهٔ توابع $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ است به طوری که

$$\|f\|_p = (\sum_{x \in X} |f(x)|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

قضیه ۲۳.۱ (لبگ ــ رادون ــ نیکودیم). فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده، μ یک اندازهٔ مثبت رادون و ν یک اندازهٔ مختلط روی X باشد. در این صورت

(الف) زوج یکتایی از اندازه‌های مختلط ν_1 و ν_2 وجود دارند به طوری که

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 \quad \text{و} \quad \nu_1 \ll \mu \ , \ \nu_2 \perp \mu.$$

(ب) عضو یکتای $f \in L^1(X,\mu)$ وجود دارد به طوری که برای هر زیرمجموعهٔ بورل E از X داریم

$$\nu_1(E) = \int_E f \, d\mu.$$

اثبات. به قضیه‌ی ۱۰ــ ۶ از [۶۰] رجوع کنید. ■

قضیه ۲۴.۱ (فوبینی). فرض کنیم (X,μ) و (Y,ν) دو فضای اندازه باشند و f یک تابع مختلط ـ مقدار $\mu \times \nu$ ـ اندازه‌پذیر روی $X \times Y$ باشد که خارج از مجموعهٔ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ تقریبا همه جا صفر می‌شود. که در آن هر A_n مجموعهٔ $\mu \times \nu$ ـ اندازه‌پذیر است و $(\mu \times \nu)(A_n) < \infty$. در این صورت انتگرال‌های زیر

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\ d(\mu\times\nu)(x,y), \quad \int_X \int_Y f(x,y)\ d\nu(y)\ d\mu(x), \quad \int_Y \int_X f(x,y)\ d\mu(x)\ d\nu(y)$$

مساوی و متناهی هستند اگر و تنها اگر یکی از انتگرال‌های زیر متناهی باشد.

$$\int_{X\times Y} |f(x,y)|\ d(\mu\times\nu)(x,y), \quad \int_X \int_Y |f(x,y)|\ d\nu(y)\ d\mu(x), \quad \int_Y \int_X |f(x,y)|\ d\mu(x)\ d\nu(y)$$

اثبات. به قضیه‌ی ۱۳ــ ۱۰ از [۲۸] رجوع کنید. ■

قضیه ۲۵.۱ (نمایش ریس). فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشردهٔ هاسدورف و I یک تابعک خطی مثبت روی $C_c(X)$ باشد. در این صورت یک اندازهٔ رادون یکتایی مانند μ روی X وجود دارد به طوری که

$$I(f) = \int_X f \ d\mu \qquad (f \in C_c(X)).$$

به علاوه داریم $\|I\| = \|\mu\|$.

اثبات. به قضیه‌ی ۲—۱۴ از [۶۰] رجوع کنید. ■

تعریف ۲۶.۱ فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار باشد. مجموعهٔ همهٔ تابعک‌های خطی و کراندار با اعمال نقطه‌ای روی فضای نرمدار X را با X^* نمایش می‌دهیم. فضای X^*، همراه با نرم یکنواخت خود یک فضای باناخ می‌باشد و آن را دوگان X می‌نامیم. مقدار $f \in X^*$ در $x \in X$ را با $< f, x >$ نشان می‌دهیم.

(الف) منظور از توپولوژی ضعیف روی X، کوچکترین توپولوژی روی X است که تحت آن هر $f \in X^*$ پیوسته است. این توپولوژی را با $\sigma(X, X^*)$ نمایش می‌دهیم. همگرایی تور (x_α) به x در X در توپولوژی ضعیف را همگرایی ضعیف (x_α) به x می‌نامیم و با $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ یا $x = w - \lim_\alpha x_\alpha$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ اگر و تنها اگر $< f, x_\alpha > \longrightarrow < f, x >$ برای هر $f \in X^*$.

(ب) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. نگاشت $\tau : X \to X^{**}$ را با ضابطه $x \mapsto \widehat{x}$ تعریف می‌کنیم که در آن،

$$\widehat{x}(f) = < f, x > \qquad (f \in X^*).$$

توجه کنید که τ خطی و طولپاست. لذا یک به یک نیز هست. در حالتی که τ پوشا باشد، X را انعکاسی می‌نامیم. در ضمن $\widehat{x}$ را به طور ساده با x نمایش می‌دهیم. منظور از توپولوژی ضعیف* روی X^*، کوچکترین توپولوژی روی X^* است که خانوادهٔ $\tau(X)$ را پیوسته می‌سازد. این توپولوژی را با $\sigma(X^*, X)$ نمایش می‌دهیم. همگرایی تور (f_α) به f در این توپولوژی را همگرایی ضعیف* (f_α) به f می‌نامیم و با نمادهای $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$ یا $f = w^* - \lim_\alpha f_\alpha$ نمایش می‌دهیم که معادل است با اینکه $< f_\alpha, x > \to < f, x >$ برای هر $x \in X$.

قضیه ۲۷.۱ (هان ـ باناخ). فرض کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار، Y یک زیر فضای خطی X و m یک تابعک خطی و پیوسته روی Y باشد. در این صورت تابعک خطی و پیوسته m' روی X وجود دارد به طوری که $\|m'\| = \|m\|$ و $m' |_Y = m$.

اثبات. به قضیه‌ی ۵–۱٦ از [٦۰] رجوع کنید. ■

قضیه **۲۸.۱** **(باناخ – آلاغـلو).** فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. در این صورت گوی یکهٔ B_{X^*} از X^* تحت توپولوژی ضعیف*، فشرده است.

اثبات. به قضیه‌ی ۳ – ۱۵ از [٦۰] رجوع کنید. ■

نتیجه **۲۹.۱** اگر X یک فضای باناخ باشد و $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ یک تور کراندار در X^* باشد، آن‌گاه $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ یک زیرتور ضعیف* همگرا دارد.

قضیه **۳۰.۱** **(گلدشتاین).** فرض کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار باشد. در این صورت B_X تحت توپولوژی ضعیف* در $B_{X^{**}}$ چگال است.

اثبات. به قضیه‌ی ۲ – ۱٦ از [٦۴] رجوع کنید. ■

تعریف **۳۱.۱** فرض کنید X فضای برداری نرمدار باشد و $A \subseteq X$. منظور از پوچساز A در X^* عبارت است از مجموعهٔ $A^{\perp} = \{f \in X^* \ : < f, x >= 0 \quad$ برای هر $x \in X\}$.

گزاره **۳۲.۱** فرض کنید X فضای برداری نرمدار و M زیر فضای بسته‌ای از X باشد آن‌گاه $M^* \simeq \frac{X^*}{M^{\perp}}$ به طور یکریخت طولپا.

اثبات. به [٦۰] رجوع کنید. ■

گزاره **۳۳.۱** فرض کنید X فضای نرمدار و Y زیرفضایی از X^* باشد. عبارت‌های زیر معادل‌اند.

(الف) Y نقاط X را جدا می‌کند.

(ب) $Y^{\perp} = \{0\}$.

(ج) Y ضعیف* چگال در X^* است.

اثبات. به قضیه ۵–۸–۱ از [۱] مراجعه کنید. ■

تعریف ۳۴.۱ (الف) فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار باشند. مجموعهٔ تمام عملگرهای خطی و خطی کران دار از X به Y را به ترتیب با $\mathcal{L}(X,Y)$ و $\mathcal{B}(X,Y)$ نمایش می‌دهیم و برای هر $T \in \mathcal{B}(X,Y)$، نرم T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$||T|| = \sup\{||T(x)|| \ : \ x \in B_X\},$$

که در اینجا B_X گوی یکه فضای نرمدار X است. در حالتی که $X = Y$، $\mathcal{B}(X,Y)$ و $\mathcal{L}(X,Y)$ را به طور ساده با $\mathcal{B}(X)$ و $\mathcal{L}(X)$ نشان می‌دهیم.

(ب) نگاشت الحاقی $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ را با T^* نمایش می‌دهیم و برای هر $x \in X$ و $f \in X^*$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$T^* : Y^* \to X^*, \qquad T^*(f)(x) = f(T(x)).$$

به راحتی دیده می‌شود اگر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $T, S \in \mathcal{B}(X)$، آن گاه $(T+S)^* = T^* + S^*$، $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$، $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$ و $||T|| = ||T||^*$.

گزاره ۳۵.۱ فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند.

(الف) اگر نگاشت $T : X \to Y$ نرم پیوسته باشد. آن‌گاه T^* ضعیف* $-$ ضعیف* پیوسته است.

(ب) اگر عملگر خطی $T : X^* \to Y^*$ ضعیف* $-$ ضعیف* پیوسته باشد. آن‌گاه عملگر کراندار $T_\circ : X \to Y$ موجود است به طوری که $T_\circ^* = T$.

اثبات. به [۶۰] رجوع کنید. ■

قضیه ۳۶.۱ (**باناخ ـ اشتاین هاوس**). فرض کنید X فضای باناخ و Y فضای نرمدار باشد. فرض کنید $\{T_\alpha\}$ توری در $\mathcal{B}(X,Y)$ باشد. اگر برای هر $x \in X$، $\lim\limits_{\alpha} T_\alpha(x) = T(x)$ موجود باشد آن‌گاه

(الف) $T \in \mathcal{B}(X,Y)$.

(ب) همگرایی (T_α) به T روی مجموعه‌های فشردهٔ X یکنواخت است.

اثبات. نتیجه ۹$-$۱۱ از [۶۴] مراجعه شود. ■

تعریف ۳۷.۱ فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$، میدان اعداد مختلط، همراه با یک عمل ضرب $(a,b) \longmapsto ab$ از $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ به $\mathcal{A}$ باشد به طوری که برای هر $a,b,c \in \mathcal{A}$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

(الف) $(ab)c = a(bc)$

(ب) $(\alpha a)b = \alpha(ab) = a(\alpha b)$

ج) $a(b+c)=ab+ac$

د) $(a+b)c=ac+bc$.

در این صورت $\mathcal{A}$ را یک جبر می‌نامیم.

جبر $\mathcal{A}$ را نرم‌دار گوییم هرگاه به عنوان یک فضای برداری، نرم‌دار باشد و به علاوه برای هر $a,b\in\mathcal{A}$ داشته باشیم $\|ab\|\leqslant\|a\|\|b\|$. در این حالت $d(a,b)=\|a-b\|$ یک متر روی $\mathcal{A}$ تعریف می‌کند که عمل‌های جمع برداری، ضرب اسکالر و ضرب برداری روی $\mathcal{A}$ نسبت به توپولوژی حاصل از d (که به توپولوژی نرم معروف است) پیوسته‌اند.

جبر نرم‌دار $\mathcal{A}$ را جبر باناخ گوییم اگر به عنوان یک فضای متریک کامل باشد. عنصر $e\in\mathcal{A}$ را همانی می‌نامیم اگر برای هر $a\in\mathcal{A}$، داشته باشیم $ae=ea=a$. جبر $\mathcal{A}$ را یکدار نامیم، هرگاه دارای عضو همانی باشد. جبر $\mathcal{A}$ را تعویض‌پذیر خوانیم، هرگاه برای هر $a,b\in\mathcal{A}$ داشته باشیم $ab=ba$.

تعریف ۳۸.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باشد.

(الف) زیرمجموعهٔ I از جبر $\mathcal{A}$ را زیرجبر $\mathcal{A}$ گوییم، هرگاه با اعمال $\mathcal{A}$ تشکیل یک جبر دهد.

(ب) زیرجبر I از جبر $\mathcal{A}$ یک ایدآل چپ (راست) در $\mathcal{A}$ است اگر $\mathcal{A}I\subseteq I$ $(I\mathcal{A}\subseteq I)$.

(ج) گوییم I در جبر $\mathcal{A}$ یک ایدآل است اگر ایدآل چپ و راست باشد.

(د) ایدآل I در جبر $\mathcal{A}$ را یک ایدآل سره گوییم هرگاه $I\neq\mathcal{A}$.

(ر) مجموع دو ایدآل چپ (راست، دوطرفه) J و I در جبر $\mathcal{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$I+J=\{x+y\ :\ x\in I, y\in J\},$$

که بوضوح یک ایدآل چپ (راست، دوطرفه) در جبر $\mathcal{A}$ است.

لم ۳۹.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ جبر نرمدار باشد.

(الف) اگر $I\subset\mathcal{A}$ یک ایدآل دوطرفه و بسته باشد، آن‌گاه فضای خارج قسمتی $\frac{\mathcal{A}}{I}$ با نرم و ضرب زیر یک جبر باناخ است.

$$|||x+I|||=\inf_{y\in I}||x+y||,\qquad\qquad (x+I)(y+I)=(xy+I).$$

(ب) اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و I یک ایدآل دوطرفه و بسته باشد، آن‌گاه $\frac{\mathcal{A}}{I}$ یک جبر باناخ است.

اثبات. به صفحه ۵ از [۳۹] مراجعه شود. ■