دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش جبر

عنوان:

گروه‌های متناهی با زیرگروه فراتینی بدیهی

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا ریسمانچیان

استاد مشاور:

دکتر ندا آهنجیده

پژوهشگر:

ستاره استکی

اسفند ۱۳۸۹

تشکر و قدردانی

خدایا تو را سپاس که مرا در دایره امکان نهادی و نقش علم را بر دفتر اندیشه‌ام کشیدی و چشمه‌سار زلال دانش و معرفتت را ارزانی‌ام داشتی تا در برهوت نادانی سیراب‌گر وجودم باشد. خدایا تو را به خاطر الطاف، نعمت‌های بی‌شمار و توفیق ادامه‌ی تحصیل شاکرم و بر خود واجب می‌دانم که از زحمات بندگانت در راه تحقق کوچک‌ترین ثمره‌ی دوران تحصیلم قدردانی نمایم.

صمیمانه‌ترین مراتب سپاس خود را به استاد گرامی جناب آقای دکتر محمدرضا ریسمانچیان تقدیم نموده که حضور ایشان به عنوان یک پشتوانه علمی همیشه مرا در پیچ و خم‌های راه علم یاری کرده است.

از سرکارخانم دکتر ندا آهنجیده که زحمت مشاوره‌ی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند و از نظرات ارزشمندشان مرا بهره‌مند ساختند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم و آنچه که در این پژوهش حاصل شد، بی‌مدد ایشان هیچ است.

از داوران گرامی جناب آقای دکتر غلامرضا رضایی‌زاده و جناب آقای دکتر بیژن طائری که قبول زحمت کرده و مسئولیت داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم.

همچنین در پایان از جناب آقای دکتر علیرضا نقی‌پور و جناب آقای دکتر علی حاجی زمانی که افتخار شاگردی‌شان را دارم و از مشوقین اصلی من در راه ادامه تحصیل بودند، ممنون و سپاس گزارم و از خداوند متعال موفقیت روزافزون همه‌ی اساتید بزرگوارم را خواهانم.

ستاره استکی

اسفندماه ۱۳۸۹

چکیده

گروه G را یک xP-گروه نامند اگر هر x-زیرگروه آن در شرط P صدق کند به‌طوری‌که مقادیر $x = a, n, c$ به‌ترتیب برای زیرگروه دلخواه، نرمال و مشخصه درنظرگرفته شود و $P = C, S, PNS, CS$ اگر هر x-زیرگروه به‌ترتیب یک متمم، یک مکمل سره، یک مکمل نرمال سره و یک مکمل مشخصه سره داشته باشد.

nS-گروه‌ها ارتباط بسیار نزدیکی با زیرگروه فراتینی دارند. گروه G یک nS-گروه است اگروفقط‌اگر دارای زیرگروه فراتینی بدیهی باشد. در این پایان نامه هم ارزبودن nS-گروه‌ها و گروه‌های مقدماتی بیان می‌شود. همچنین اگر G گروهی حل‌پذیر باشد، آن‌گاه نشان داده می‌شود که G و همه گروه‌های خارج قسمتی آن دارای زیرگروه فراتینی بدیهی هستند اگروفقط‌اگر هر زیرگروه نرمال G دارای یک متمم باشد. در نهایت شرایطی که تحت آن یک زیرگروه نرمال از گروه G دارای مکمل است، بیان خواهد شد.

کلمات کلیدی: زیرگروه فراتینی، گروه مقدماتی، متمم و مکمل یک زیرگروه و nS-گروه.

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

متعلق است به	$\in$
زیرمجموعه	$\subseteq$
زیرمجموعه سره	$\subset$
بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a,b	(a,b)
حاصل‌جمع مستقیم	$\sum$
حاصل‌ضرب مستقیم	$\times, \prod$
یک‌ریختی	$\cong$
زیرگروه	$\leqslant$
زیرگروه سره	$<$
زیرگروه نرمال	$\trianglelefteq$
زیرگروه تولید شده توسط x	$\langle x \rangle$
مزدوج H با g	H^g
مجموعه p–زیرگروه‌های سیلوی G	$\mathrm{Syl_p(G)}$
تعداد اعضای G	$\|G\|$
گروه خارج‌قسمت $\frac{G}{H}$	$\frac{G}{H}$
گروه جابه‌جاگر H,K	$[H,K]$
زیرگروه مشتق G	G'
شاخص H در G	$[G:H]$
مرکزساز زیرگروه H در گروه G	$\mathrm{C_G(H)}$

نرمال‌ساز زیرگروه H در گروه G	$\mathrm{N_G(H)}$
مرکز گروه G	$\mathrm{Z(G)}$
گروه خودریختی‌های G	$\mathrm{Aut(G)}$
زیرگروه فیتینگ G	$\mathrm{F(G)}$
زیرگروه فراتینی G	$\mathrm{Frat(G)}$
بستار نرمال X در G	$\mathrm{X^G}$
بستار مشخصه X در G	$\mathrm{X^{A(G)}}$
$\{g^p \| g \in G\}$	$\mathrm{G^p}$

پیشگفتار

از سال‌ها پیش بررسی و توصیف xP–گروه‌ها مورد توجه برخی از ریاضیدانان بوده است. xP–گروه‌ها، گروه‌هایی هستند که هر x–زیرگروه آن‌ها دارای خاصیت P می‌باشد. x می‌تواند مقادیر c, n, a باشد که به ترتیب نشانگر زیرگروه دلخواه، نرمال و مشخصه یک گروه است. همچنین خاصیت P مربوط به دارا بودن متمم، مکمل، مکمل نرمال سره و مکمل مشخصه سره می‌باشد که به ترتیب با CS, PNS, S, C نشان داده می‌شود. هال [1] در [۸]، aC–گروه‌های متناهی را بررسی کرده است. سپس بیوآ [2] [۲]، چرنیخوف [3] [٦] و شریف [4] [۱۵] مطالعات او را ادامه داده و نتایجی درباره aC–گروه‌های نامتناهی به دست آوردند. همچنین خانواده nC–گروه‌ها توسط بچتل [5] [۵]، کریستنسن [6] [۷] و رایت [7] [١٦] مورد مطالعه دقیق قرار گرفته است. تا سال ۲۰۰۰ بیشتر تحقیقات بر روی xC–گروه‌ها انجام می‌گرفت، اما کاپه [8] و کیرتلند [9] مطالعات خود را بر روی زیرگروه‌هایی که دارای مکمل هستند، متمرکز کردند. آن‌ها $xCS, xPNS, xS$–گروه‌ها را به طور جامع و کامل توصیف کردند.

ما در این پایان‌نامه به تشریح [۱۲] و [۱۳] می‌پردازیم. ابتدا بخشی از مطالب مقدماتی نظریه گروه‌ها که مورد نیاز در سرتاسر پایان‌نامه است را بیان خواهیم کرد. این مطالب از [۴]، [۱۴]، [۱۷]

---

[1] Hall
[2] Baeva
[3] Chernikova
[4] Sheriev
[5] Bechtell
[6] Christensen
[7] Wright
[8] Kappe
[9] Kirtland

و [۱۸] گردآوری شده است. چون در بررسی xS−گروه‌ها زیرگروه فراتینی نقش اساسی دارد، لذا بیشترین قسمت فصل اول درباره زیرگروه فراتینی و نتایج مربوط به آن می‌باشد.

سپس در فصل دوم، به ترتیب خانواده $xCS, xPNS, xS$−گروه‌ها را بررسی می کنیم. ما باتوجه به تعریف xP−گروه‌ها، این خانواده از گروه‌ها را طبقه‌بندی خواهیم کرد و با اعمال شرط متناهی بودن روی همه گروه‌ها، به طبقه‌بندی دیگری دست می‌یابیم که در پایان فصل به کمک همه مطالب ذکر شده اثبات می‌شود. در بخش‌های بعد ارتباط nS−گروه‌ها و زیرگروه فراتینی، $nPNS$−گروه‌ها و زیرگروه n−فراتینی و cCS−گروه‌ها و زیرگروه c−فراتینی را بیان خواهیم کرد.

در فصل سوم محور توجه ما بر روی nS−گروه‌ها خواهد بود. ابتدا شرایطی معادل با nS−گروه بودن را ارائه می‌دهیم و سپس هم ارز بودن nS−گروه‌های پوچ‌توان و گروه‌های آبلی مقدماتی را اثبات خواهیم کرد. همچنین nS−گروه‌های فوق حل‌پذیر را به طور کامل توصیف می نماییم. علاوه بر این نشان خواهیم داد که nS−گروهی که نسبت به گروه خارج قسمتی بسته است، یک nC−گروه می‌باشد.

در فصل آخر ارتباط نزدیک میان زیرگروه فراتینی و زیرگروه نرمال در یک گروه را مشاهده خواهیم کرد و نشان می‌دهیم که تحت چه شرایطی یک زیرگروه نرمال در یک گروه دارای مکمل است.

فصل ۱

مقدمات و پیشنیازها

در این فصل، مطالب مقدماتی از نظریه گروه‌ها که در سرتاسر پایان‌نامه مورد نیاز است، بیان شده است.

۱.۱ تعاریف و قضایای اساسی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید G یک گروه غیربدیهی و M زیرگروه سره آن باشد. M را یک زیرگروه ماکسیمال G نامند درصورتی‌که از $M \leqslant H \leqslant G$ نتیجه شود که $M = H$ یا $H = G$.

نکته ۲.۱.۱ گروه‌های متناهی غیربدیهی همواره دارای زیرگروه‌های ماکسیمال‌اند و هر زیرگروه سره مشمول در حداقل یک زیرگروه ماکسیمال است.

تعریف ۳.۱.۱ زیرگروه H از گروه G، زیرگروه تعویض‌پذیر G نامیده می‌شود اگر برای همه زیرگروه‌های K از G، $HK = KH$.

قانون مدولی ددکیند: فرض کنید H، K و L زیرگروه‌هایی از گروه G باشند به‌طوری‌که $K \leqslant L$. دراین صورت $(H \cap L)K = (HK) \cap L$. بالاخص، اگر $HK \leqslant G$، آن‌گاه $\langle H \cap L, K\rangle = \langle H, K\rangle \cap L$.

قضیه ۴.۱.۱. اگر N زیرگروه نرمال از گروه متناهی G باشد به‌طوری‌که $(|N|, |\frac{G}{N}|) = 1$، آن‌گاه N زیرگروه مشخصه G است.

برهان. ر.ک. [۱۸] ص ۱۹۳. □

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. زیرگروه نرمال غیربدیهی H را یک زیرگروه نرمال مینیمال G گوییم هرگاه H حاوی هیچ زیرگروه نرمال G به جز خود و $\{1\}$ نباشد. به‌عبارت‌دیگر، هرگاه $N \lhd G$ و $N \subseteq H$، آن‌گاه $N = H$ یا $N = \{1\}$.

نکته ۶.۱.۱ هر گروه متناهی غیربدیهی یک زیرگروه نرمال مینیمال دارد. به خصوص، یک زیرگروه نرمال مینیمال هر گروه ساده متناهی G خود G است.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید X یک زیرمجموعه غیرتهی از گروه G باشد. دراین‌صورت اشتراک همه زیرگروه‌های نرمال G شامل X را بستار نرمال X در G نامند و آن را با $\mathrm{X^G}$ نشان می‌دهند.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید X یک زیرمجموعه غیرتهی از گروه G باشد. دراین‌صورت اشتراک همه زیرگروه‌های مشخصه G شامل X را بستار مشخصه X در G نامند و آن را با $\mathrm{X^{A(G)}}$ نشان می‌دهند.

تعریف ۹.۱.۱ گروه غیربدیهی G را مشخصاً ساده نامند هرگاه زیرگروه‌های مشخصه آن $\{1\}$ و G باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ گروه G را تابدار نامند هرگاه مرتبه هر عضو آن متناهی باشد.

قضیه ۱۱.۱.۱. فرض کنید G یک گروه متناهی و B زیرگروهی از آن باشد به‌طوری‌که B شامل یک زیرگروه نرمال آبلی N از G باشد و $([G : B], |N|) = 1$.
اگر زیرگروه K_1 از B موجود باشد به‌طوری‌که $B = K_1N$ و $K_1 \cap N = \{1\}$، آن‌گاه زیرگروه K از G موجود خواهد بود به‌طوری‌که $G = KN$ و $K \cap N = \{1\}$.

برهان. ر.ک. [۴]، ص ۳۸ . □

قضیه ۱۲.۱.۱ . (شور–زاسنهاوس). اگر N زیرگروه نرمال از گروه متناهی G باشد و $(|N|,|\frac{G}{N}|)=1$، آن‌گاه زیرگروه N_1 از G موجود است به‌طوری‌که $G=NN_1$ و $N\cap N_1=\{1\}$.

برهان. ر.ک. [۱۷]، ص ۱۹۵ . □

قضیه ۱۳.۱.۱ . فرض کنید N زیرگروه نرمال آبلی گروه متناهی G باشد. دراین‌صورت زیرگروه سره N_1 از G موجود است به طوری‌که $G=NN_1$ و $N\cap N_1=\{1\}$ اگروفقط‌اگر برای هر عدد اول p که عامل $|N|$ است و هر p–زیرگروه سیلوی P، زیرگروه سره N_2 از G موجود باشد به طوری‌که $P=(P\cap N)N_2$, $(P\cap N)\cap N_2=\{1\}$.

برهان. ر.ک. [۴]، ص ۴۰ . □

قضیه ۱۴.۱.۱ . فرض کنید G یک گروه متناهی باشد به‌طوری‌که اندیس هر زیرگروه ماکسیمال در G عددی اول باشد. اگر p بزرگترین عامل مرتبه G باشد، آن‌گاه p–زیرگروه سیلوی متناظر در G نرمال خواهد بود.

برهان. p–زیرگروه سیلوی P از G را در نظر بگیرید. اگر $P \ntrianglelefteq G$، آن‌گاه $\mathrm{N_G(P)} \neq \mathrm{G}$. در نتیجه $\mathrm{N_G(P)}$ مشمول در یک زیرگروه ماکسیمال M از G است. بنابراین $[G:\mathrm{N_G(P)}]=[\mathrm{G}:\mathrm{M}][\mathrm{M}:\mathrm{N_G(P)}]$ و $\mathrm{N_G(P)}=\mathrm{N_M(P)}$، پس $[G:\mathrm{N_G(P)}]=[\mathrm{G}:\mathrm{N_M(P)}]$ و لذا $[G:\mathrm{N_M(P)}]=[\mathrm{G}:\mathrm{M}][\mathrm{M}:\mathrm{N_M(P)}]$. با توجه به قضیه سوم سیلو، به ازای عدد صحیح k، $[G:\mathrm{N_M(P)}]=1+\mathrm{kp}$ و نیز به ازای عدد صحیح k'، $[M:\mathrm{N_M(P)}]=1+\mathrm{k'p}$. بنابراین به ازای عدد صحیح k'' خواهیم داشت: $[G:M]=1+k''p$. از طرفی طبق فرض $[G:M]$ برابر با عدداول q است به‌طوری‌که $q\leq p$ می‌باشد. در نتیجه $k''p=q-1$، پس p، $q-1$ را عاد می‌کند از این‌رو $p<q$

که تناقض است. بنابراین P در G نرمال است. $\square$

قضیه ۱۵.۱.۱ . (استدلال فراتینی). فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و $H \lhd G$. دراین‌صورت اگر P یک p–زیرگروه سیلوی H باشد، آن‌گاه $G = \mathrm{N_G(P)H}$.

برهان. فرض کنید g عضو دلخواهی از G باشد. چون $P \leqslant H$ و $H \lhd G$، پس $P^g \leqslant H^g = H$. P و P^g هر دو p–زیرگروه سیلوی Hاند. بنابراین در H مزدوج‌اند، لذا hای در H موجود است به‌طوری‌که $P^g = P^h$، در نتیجه $P^{gh^{-1}} = P$. از این‌رو $gh^{-1} \in \mathrm{N_G(P)}$، پس $G = \mathrm{N_G(P)H}$. $\square$

۲.۱ زیرحاصل‌ضرب مستقیم

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید $\{G_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از گروه‌ها باشد. زیرگروه H از حاصل‌ضرب مستقیم $\prod\limits_{i\in I} G_i$، یک زیرحاصل‌ضرب مستقیم $\{G_i\}_{i\in I}$ نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر $i \in I$، $\pi_i(H) = G_i$ که $\pi_i : \prod\limits_{i\in I} G_i \longrightarrow G_i$ نگاشت تصویری است.

قضیه ۲.۲.۱ . گروه G با زیرحاصل‌ضرب مستقیم خانواده‌ای از گروه‌های ساده یک‌ریخت است اگروفقط‌اگر برای هر زیرگروه نرمال غیربدیهی N از G، یک زیرگروه نرمال سره N_1 از G موجود باشد به‌طوری‌که $G = NN_1$.

برهان. گیریم G زیرحاصل‌ضرب مستقیم از گروه‌های ساده $\{G_i\}_{i\in I}$ و N زیرگروه نرمال غیربدیهی از G است.

فرض کنید $1 \neq x \in N$. ابتدا نشان می‌دهیم زیرگروه نرمال ماکسیمال N_1 وجود دارد به‌طوری‌که شامل x نیست. چون G با زیرحاصل‌ضرب مستقیم گروه‌های ساده $\{G_i\}_{i\in I}$ یک‌ریخت است و نیز نگاشت $\pi_i : G \longrightarrow G_i$ پوشاست درنتیجه، بنا به قضیه اول یک‌ریختی $\frac{G}{\mathrm{Ker}\ \pi_i} \cong G_i$ و چون G_iها ساده

هستند، ازاین‌رو $\mathrm{Ker}\ \pi_i$ یک زیرگروه نرمال ماکسیمال G می‌باشد. حال نشان می‌دهیم که $\mathrm{Ker}\ \pi_i$ شامل x نیست.

چون $x \in G$ و G با زیرحاصل‌ضرب مستقیم $\{G_i\}_{i\in I}$ یک‌ریخت است، پس $x = \{x_i\}_{i\in I}$. حال چون $\pi_i(x) = x_i$ و $x \neq ۱$ بنابراین همه x_iها، $i \in I$، برابر یک نمی‌باشند. لذا به ازای $i \in I$، $x \notin \mathrm{Ker}\ \pi_i$.

بنابراین $\mathrm{Ker}\ \pi_i$ یک زیرگروه نرمال ماکسیمال G است که شامل x نیست، پس چنین زیرگروهی موجود است.

حال چون N و $N_۱$ زیرگروه‌های نرمال در G هستند، پس $NN_۱ \trianglelefteq G$ اما $G \trianglelefteq NN_۱ \leqslant N_۱$. از این‌رو با توجه به نرمال ماکسیمال بودن $N_۱$، $NN_۱ = G$ یا $NN_۱ = N_۱$.

اگر $NN_۱ = N_۱$، آن‌گاه $N \subseteq N_۱$ که چون $x \notin N_۱$ یک تناقض است، درنتیجه $NN_۱ = G$.

برعکس، فرض کنید G گروهی باشد که برای هر زیرگروه نرمال غیربدیهی N از G یک زیرگروه نرمال سره $N_۱$ از G موجود باشد به‌طوری‌که $G = NN_۱$. فرض کنید $۱ \neq x \in G$ و N بستار نرمال x در G و $N_۱$ زیرگروه نرمال سره G باشد به‌طوری‌که $G = NN_۱$.

گیریم M زیرگروه نرمال G باشد به‌طوری‌که در خاصیت $x \notin M \supset N_۱$، ماکسیمال است.

این زیرگروه یک زیرگروه نرمال ماکسیمال G خواهد بود. زیرا اگر M زیرگروه نرمال ماکسیمال G نباشد، آن‌گاه زیرگروه نرمال ماکسیمال $M_۱$ از G موجود است به‌طوری‌که $M \leqslant M_۱ < G$. ازاین رو $G = \langle x\rangle M \leqslant \langle x\rangle M_۱$، پس $G = \langle x\rangle M_۱$.

حال اگر $x \in M_۱$، آن‌گاه $G = M_۱$ که تناقض است. لذا $x \notin M_۱$، اما باتوجه به این‌که M در این خاصیت ماکسیمال بود، پس $M = M_۱$. در نتیجه برای هر عضو غیربدیهی x از G، زیرگروه نرمال ماکسیمال M_x از G موجود است به‌طوری‌که $x \notin M_x$ و $\frac{G}{M_x}$ ساده می‌باشد. حال به ازای هر عضو غیربدیهی x از G، نگاشت $\theta_x : G \longrightarrow \prod\limits_{x\in G} \frac{G}{M_x}$ را به صورت $g \mapsto \prod\limits_{x\in G} gM_x$ تعریف می‌کنیم که یک نگاشت پوشا می‌باشد. لذا بنا به تعریف (۱.۲.۱)، G با زیرحاصل‌ضرب مستقیم خانواده $\{\frac{G}{M_x}\}_{x\in G}$

یک‌ریخت است. $\square$

۳.۱ گروه‌های پوچ‌توان

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. یک سری زیرنرمال G، زنجیری از زیرگروه‌های G است. مانند:

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_r \leqslant \cdots,$$

به‌طوری‌که به‌ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، $G_{i-1} \lhd G_i$.

گاهی اوقات سری زیر نرمال را به صورت زیر هم نشان می‌دهند:

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_r \lhd \cdots.$$

تعریف ۲.۳.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. یک سری نرمال G، زنجیری از زیرگروه‌های نرمال G است. مانند:

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_r \leqslant \cdots.$$

واضح است که هر سری نرمال یک سری زیرنرمال است.

تعریف ۳.۳.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. سری نرمال

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_r \leqslant \cdots,$$

را یک سری مرکزی G گوییم درصورتی‌که به‌ازای هر i که $1 \leq i \leq r$،

$$\frac{G_i}{G_{i-1}} \leqslant Z(\frac{G}{G_{i-1}}).$$

تعریف ۴.۳.۱ گروه G را پوچ‌توان نامند درصورتی‌که دارای یک سری مرکزی به صورت

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_r = G$$

باشد. طول کوتاهترین سری مرکزی G را رده پوچ‌توانی G گویند و آن را با $c(G)$ نشان می‌دهند.

مثال ۵.۳.۱ هر $p-$گروه متناهی پوچ‌توان است.

قضیه ۶.۳.۱. فرض کنید G یک گروه غیربدیهی متناهی باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(۱) G پوچ‌توان است؛

(۲) هر زیرگروه ماکسیمال G نرمال است؛

(۳) هر $p-$زیرگروه سیلوی G نرمال است؛

(۴) هر دو عضو G که مرتبه آن‌ها نسبت به هم اول‌اند، تعویض‌پذیرند؛

(۵) G حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلوی خود است.

برهان. ر.ک. [۱۷]، ص ۲۲۳. □

لم ۷.۳.۱ فرض کنید G یک گروه و $A, B \leqslant G$ باشند. دراین‌صورت $[A, B] \leqslant B$ اگروفقطاگر $A \leqslant \mathrm{N_G(B)}$.

قضیه ۸.۳.۱. فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان و H زیرگروه سره آن باشد. دراین‌صورت $H \neq \mathrm{N_G(H)}$.

برهان. فرض کنید $1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_r = G$ یک سری مرکزی برای G باشد. مجموعه A را چنین تعریف کنید:

$$A = \{l \mid 1 \leq l \leq r,\ G_l \nleq H\}.$$

واضح است که $r \in A$، بنابراین A غیرتهی است.

فرض کنید $k = minA$. ازاین‌رو $G_k \nleqslant H$ و $G_{k-1} \leqslant H$. اینک ملاحظه می‌کنید که:

$$[H, G_k] \leqslant [G, G_k] \leqslant G_{k-1} \leqslant H.$$

پس باتوجه به لم قبل، $G_k \leqslant \mathrm{N_G(H)}$ و درنتیجه $\mathrm{N_G(H)} \neq \mathrm{H}$. $\square$

نتیجه ۹.۳.۱ اگر G گروهی پوچ‌توان و M زیرگروه ماکسیمال آن باشد، آن‌گاه $M \lhd G$ و $\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{M}}$ یک گروه دوری از مرتبه عددی اول است.

تعریف ۱۰.۳.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. زیرگروه تولیدشده به وسیله همه زیرگروه‌های نرمال پوچ‌توان G را زیرگروه فیتینگ G می‌نامند و آن را با $\mathrm{F(G)}$ نشان می‌دهند.

نکته ۱۱.۳.۱ $\mathrm{F(G)}$ یک زیرگروه مشخصه G است.

نکته ۱۲.۳.۱ هرگاه G متناهی باشد، آن‌گاه $\mathrm{F(G)}$ پوچ‌توان است و به وضوح بزرگترین زیرگروه نرمال پوچ‌توان G است.

۴.۱ زیرگروه فراتینی

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. اشتراک همه زیرگروه‌های ماکسیمال G را زیرگروه فراتینی G گویند و آن را با $\mathrm{Frat(G)}$ نشان می‌دهند. هرگاه G فاقد زیرگروه ماکسیمال باشد، برطبق قرارداد $\mathrm{Frat(G)} = \mathrm{G}$.

مثال ۲.۴.۱ گروه جمعی $\mathbb{Q}$ دارای زیرگروه ماکسیمال نیست. زیرا اگر M زیرگروه ماکسیمال $\mathbb{Q}$ باشد، آن‌گاه چون $\mathbb{Q}$ آبلی است لذا $M \trianglelefteq \mathbb{Q}$. ازاین‌رو $\frac{\mathbb{Q}}{M}$ یک گروه ساده است. اما هر گروه ساده آبلی

با $\mathbb{Z}_p$ به ازای عدد اول pای یک‌ریخت است. بنابراین $\frac{\mathbb{Q}}{M} \cong \mathbb{Z}_p$ و در نتیجه مرتبه هر عضو غیربدیهی در $\frac{\mathbb{Q}}{M}$ مساوی p است. حال اگر $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ عضو دلخواهی باشد، آن‌گاه $\frac{a}{pb}$ نیز عضوی از $\mathbb{Q}$ است ازاین رو $\frac{a}{pb} + M \in \frac{\mathbb{Q}}{M}$ و درنتیجه $p(\frac{a}{pb} + M) = M$، پس $\frac{a}{b} + M = M$ و بنابراین $\frac{a}{b} \in M$. لذا $\mathbb{Q} \subseteq M$ و در نتیجه $\mathbb{Q} = M$ که تناقض است.

مثال ۳.۴.۱ گروه متقارن از درجه ۳ ، $S_۳$ را در نظر بگیرید. زیرگروه منحصربه‌فرد مرتبه ۳ در $S_۳$ ماکسیمال است و علاوه براین $S_۳$ دارای سه زیرگروه ماکسیمال مرتبه ۲ است که عبارت‌اند از $\{(۲\ ۱), \{۱\}\}$، $\{(۳\ ۱), \{۱\}\}$ و $\{(۳\ ۲), \{۱\}\}$. بنابراین $\mathrm{Frat(G)}$ اشتراک این چهار زیرگروه ماکسیمال است که عبارت اند از $\mathrm{Frat(S_3)} = \{1\}$.

نکته ۴.۴.۱ $\mathrm{Frat(G)}$ یک زیرگروه مشخصه G است.

تعریف ۵.۴.۱ عنصر x از گروه G یک نامولد نامیده می‌شود، هر گاه بتوان آن را از هر مجموعه مولد G حذف کرد یعنی اگر S زیرمجموعه‌ای از G بوده و $G = \langle S, x \rangle$، آن‌گاه $G = \langle S \rangle$.

قضیه ۶.۴.۱. (قضیه فراتینی). فرض کنید G گروهی دلخواه باشد. دراین‌صورت زیرگروه فراتینی G برابر با مجموعه تمام عناصر نامولد G است.

برهان. فرض کنید $g \in G$ یک نامولد از G باشد. نشان می‌دهیم که $g \in \mathrm{Frat(G)}$.
فرض کنید $g \notin \mathrm{Frat(G)}$. دراین‌صورت زیرگروه ماکسیمال M از G موجود است به‌طوری‌که $g \notin M$، لذا $M < \langle g, M \rangle \leqslant G$ و با توجه به ماکسیمال بودن M نتیجه می‌شود که $\langle g, M \rangle = G$. چون M زیرگروه سره G است، پس g یک مولد G خواهد بود که تناقض است. ازاین رو $g \in \mathrm{Frat(G)}$.
برعکس، اگر $x \in \mathrm{Frat(G)}$، نشان می‌دهیم که x یک عنصر نامولد G است.
برای این منظور فرض کنید $G = \langle x, S \rangle$ که $S \subseteq G$ است. نشان می‌دهیم که $G = \langle S \rangle$. اگر