بسم الله الرحمن الرحيم

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته است که در سال در دانشکده دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب دانشجوی رشته مقطع تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی:

تاریخ و امضا:

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجوی مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب و یا نرم افزار و یا آثار ویژه حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم‌پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

گسترش حلقه های برگشت پذیر

نگارنده:

سوزان پورعلی

استاد راهنما:

دکتر سید احمد موسوی

اردیبهشت ماه ۱۳۸۸

چکیده

فرض کنید S یک نیمگروه با عضو صفر، ۰، و $n \geq 2$ باشد. گوئیم S در شرط ZC_n صدق می کند هر گاه $a_1\ a_2 \ldots a_n = ۰$ نتیجه دهد $a_{\sigma(1)}\ a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(n)} = ۰$، برای هر جایگشت $\sigma \epsilon S_n$.

یک حلقه R در شرط ZC_n صدق می کند هر گاه (R , .) در شرط ZC_n صدق کند. در این پایان نامه به بررسی مقاله [۲] از V. Camillo و D.D. Anderson می پردازیم.

نشان می دهیم یک نیمگروه که فاقد عضو پوچ توان ناصفر است، در شرط ZC_n برای هر $n \geq 2$ صدق می کند و به بررسی حلقه هایی که در شرط ZC_n صدق می کنند، می پردازیم.

حلقه شرکت پذیر و یکدار R برگشت پذیر[۱] نامیده می شود هرگاه، برای هر $a, b \epsilon R$ ، $ab = ۰$ نتیجه دهد $ba = ۰$. در این پایان نامه همچنین به مطالعه حلقه های برگشت پذیر که توسط N.K. Kim و Y. Lee در مقاله [۸]، ارائه شده است می پردازیم. در ابتدا ویژگی ها و توسیع های پایه ای حلقه های برگشت پذیر و برخی مفاهیم مرتبط با حلقه های برگشت پذیر، شامل برخی انواع مثال ها را ملاحظه می کنیم. سپس نشان خواهیم داد حلقه های چند جمله ای روی حلقه های برگشت پذیر لزوما برگشت پذیر نیستند، و بحث را درباره برگشت پذیری برخی انواع حلقه های چند جمله ای پی خواهیم گرفت. به علاوه نشان خواهیم داد هرگاه R یک حلقه کاهشی[۲] باشد آنگاه $R[x]/(x^n)$ یک حلقه برگشت پذیر است، که (x^n) ایده آل تولید شده توسط x^n و n یک عدد صحیح مثبت است؛ و اینکه برای یک حلقه اُر راست[۳] R و حلقه خارج قسمتی راست کلاسیک[۴] Q، R برگشت پذیر است اگر و فقط اگر Q برگشت پذیر باشد.

کلید واژه: حلقه، نیمگروه، کاهشی، برگشت پذیری، نیم جابجایی.

[1]- Reversible
[2] -Reduced
[3] -Right ore
[4]- Classical right quotient

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست جداول

عنوان | **صفحه**

مقدمه

در سراسر این پایان نامه R حلقه ای شرکت پذیر و یکدار می باشد مگر آنکه تصریح گردد.

فرض کنید S نیمگروهی[1] با عضو ۰ و R حلقه ای دلخواه باشد. نیمگروه S را کاهشی گوئیم، هرگاه عضو پوچ توان[2] ناصفر نداشته باشد. در یک نیمگروه کاهشی، برای هر دو عضو دلخواه a,b , $ab=0$ نتیجه می دهد $ba=0$. (زیرا $(ba)^2=ba.ba=b(ab)a=0$ و کاهشی بودن نتیجه می دهد $ba=0$).

در فصل اول ثابت خواهیم کرد در یک نیمگروه کاهشی S هرگاه $a_1\, a_2 \ldots a_n=0$ که a_i ها، $i=1,\ldots,n$، اعضای دلخواه نیمگروه و n یک عدد صحیح مثبت است، آن گاه $a_{\sigma(1)}\, a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(n)}=0$، برای هر جایگشت $\sigma\epsilon S_n$ که S_n گروه جایگشتی روی n است.

(به عبارتی حلقه های کاهشی در شرط ZC_n برای هر عدد صحیح مثبت دلخواه n صدق می کنند). پس لزوما مفهومی تحت عنوان شرط ZC_n را معرفی می کنیم و نشان می دهیم شرط ZC_n برای برخی $n\geq 3$ ، ZC_{n+1} را ایجاب می کند و یک مثال نقض برای حالت n=2 ارائه می دهیم.

(برای هر میدان k, k- جبر متناهی البعدی وجود دارد که شرط ZC_2 را دارد در حالیکه فاقد شرط ZC_3 است). و همچنین با ارائه مثالی نشان خواهیم داد در حالت کلی وقتی حلقه R فاقد عضو همانی است شرط ZC_n , ZC_{n-1} را ایجاب نمی کند.

---

1 - Semigroup
2 - Nilpotent

در ادامه چند ویــژگی از حلقه هــایی که شرط ZC_n، برای برخی n دلخواه، را دارا هستند بیان می کنیم؛ و نشان می دهیم برای حلقه منظم فان نویمن[1] R، شرط کاهشی بودن با شرط ZC_n برای هر n دلخواه معادل است.

در فصل اول مثالی از حلقه های غیرکاهشی و ناجابجایی، که دارای ویژگی ZC_n برای هر $n \geq 2$ هستند، ارائه می دهیم.

فرض کنیـد R یک حلقه دلخواه باشد، حلقـه چنـد جملـه ای روی R با $R[x]$ نشـــان داده مـی شــود. $l_R(-)$, $r_R(-)$ بترتیب برای پوچ ساز راست و پوچ ساز چپ R استفاده می شود.

طبق[۴] $cohn$، حلقه R برگشت پذیر است هرگاه برای هر $a, b \epsilon R$, $ab = ۰$ نتیجه دهد $ba = ۰$.

اندرسون و کمیلو[2] طی مقاله [۲]، شرط ZC_n را بـــرای آنچــه که برگشت پذیر نامیده می شود بکار برده اند، در حالیکه کرمپا[3] در [۱۰]، از شرط C برای آن استفاده کرده است.

بنابر[۱۰]، یک ایده آل راست A از حلقــه R متقارن است هرگاه برای هر $r, t, s \epsilon R$، $rst \epsilon A$ نتیجه دهد $rts \epsilon A$. پس حلقه R متقارن[4] است هــرگـــاه برای هر $r, t, s \epsilon R$, $rst = ۰$ نتیجه دهد $rts = ۰$. انـدرسون و کمیلـو در [۲]، شـرط ZC_3 را برای متقــارن بودن حلقه R بکار برده اند.

طبق [۱۰, $Proposition$ 1]، حلقه R متقارن است اگر و فقط اگر $r_1 r_2 \ldots r_n = ۰$ نتیجه دهد $r_{\sigma(1)} r_{\sigma(2)} \ldots r_{\sigma(n)} = ۰$، برای هر جایگشت $\sigma \epsilon S_n$. در فصل اول طی قضیه ۱.۲.۱، این مطلب مستقلا اثبات شده است.

حلقه R، نیم جابجایی[5] نامیده می شود هرگاه برای هر $a \epsilon R$، $r_R(a)$ ایده آل R باشد.

---

[1] - Von neumann regular
[2] - Anderson - Camillo
[3] - Kermpa
[4] - Symmetric
[5] - Semicommutative

همانطــوری که قبلا گفته شد در فصل اول نشان می دهیم حلقه های کاهشی متقارن هستند. بــه وضوح حلقه هــای جابجایی متقــارن هستنــد و حلقــه های متقارن با فرض یکداری برگشت پذیراند.

ثابت خواهیم کرد حلقه های برگشت پذیر نیم جابجایی هستند. عکس مطالب ذکر شده برقرار نیست؛ زیرا:

۱- طبق مثال ۳.۳.۱، یک حلقه متقارن غیرکاهشی ناجابجایی وجود دارد.

۲- طبق مثال ۳.۳.۱، یک حلقه برگشت پذیر نامتقارن وجود دارد.

۳- طبق مثال ۲.۳.۲، یک حلقه برگشت ناپذیر نیم جابجایی وجود دارد.

حلقه های نیم جابجایی طبق[۸, $Lemma$ 2,1]، آبلی[۱] (حلقه هایی با خود توان های مرکزی) هستند.

در فصل دوم مطالعه حلقه های برگشت پذیر را ادامه می دهیم و در ابتدا ویژگی ها و توسیع های پایه ای از حلقه های برگشت پذیر و نیم جابجایی شامل برخی انواع مثال ها را بررسی می کنیم.

نشان خواهیم داد حلقه چند جمله ای ها روی حلقــه های برگشـــت پذیر، لزومـا برگشت پذیر نیستند و لذا درباره برگشت پذیری برخی انواع حلقه های چند جمله ای بحث خواهیم کرد.

در ادامه فصل دوم مثال ۵.۴.۱، فصـل اول را به حالت کلی تعمیم خواهیم داد. به عبارتی نشـــان می دهیم هرگاه R یک حلقه کاهشی و n عدد صحیح مثبت دلخواه و (x^{n}) ایده آل تولید شده توسط x^{n} باشد، آن گاه R یک حلقه برگشت پذیر است.

و در نهایت برای یک حلقه اُر راست R و حلقه خارج قسمتی راست کلاسیک R،Q برگشت پذیر است اگر و فقط اگر Q برگشت پذیر باشد.

[۱] - Abelian

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۰. گروه آزاد : فرض کنید X مجموعه ای ناتهی و X^{-1} مجموعه ای جدا از X باشد که $|X| = |X^{-1}|$، و بیژکسیون $X \to X^{-1}$ که نقش هر $x\epsilon X$ با x^{-1} نمایش داده می شود و مجموعه ای جدا از $X \cup X^{-1}$ تنها با یک عضو که آن را با 1 نمایش می دهیم را در نظر بگیرید.

یک کلمه بر X دنباله $(a_1, a_2, \dots)$ است که $a_{\mathrm{i}} \,\epsilon\, X \cup X^{-1} \cup \{1\}$ و برای برخی $n\epsilon N$، $a_{\mathrm{k}} = 1$ برای هر $k \geq n$. دنباله ی ثابت $(1,1, \dots)$، کلمه تهی نامیده می شود.

کلمه$(a_1, a_2, \dots)$ تحویل یافته است هرگاه برای هر $x\epsilon X$، x و x^{-1} در این کلمه مجاور نباشند و $a_{\mathrm{k}} = 1$ نتیجه دهد برای هر $i \geq k$, $a_{\mathrm{i}} = 1$.

مجموعه تمام کلمات تحویل یافته بر مجموعه X با عمل دوتایی زیر، گروه آزاد بر مجموعه X نامیده می شود:

$$\left({x_1}^{\lambda_1} \dots {x_m}^{\lambda_m}\right)\left({\mathrm{y}_1}^{\delta_1} \dots {\mathrm{y}_\mathrm{n}}^{\delta_\mathrm{n}}\right) = {\mathrm{x}_1}^{\lambda_1} \dots x^{\lambda_m} y^{\delta_1} \dots \mathrm{y}^{\delta_\mathrm{n}}$$

کلمه تهی به عنوان عضو همانی عمل می کند. (توجه کنید که در ضرب فوق جملات مجاور حذف میشوند).

تعریف ۲.۰. حلقه نیمگروهی[1] : اگر k حلقه و S یک نیمگروه باشد حلقه نیمگروهی $k(S)$ به صورت $\oplus_{\mathrm{s}\in\mathrm{S}}^{i} \mathrm{Ks}$ است، با عناصری به شکل $\sum_{s\in S}^{i} k_s\, s$ (i متناهی است) و ضربی به صورت زیر:

$$\left(\sum_{s\in S}^{i} k_s\, s\right)\left(\sum_{\acute{s}\in S}^{i} k_{\acute{s}}\, \acute{s} \right) = \sum_{\mu} \mathrm{k}_{\mu}\mu \;\; , \mu = s\acute{s} \; , k_{\mu} = \sum k_s\, k_{\acute{s}}$$

که جمع روی تمام عناصر $\acute{\mathrm{s}}, s\epsilon S$ است که $\mu = s\acute{s}$.

---

[1] - Group ring

تعریف۰.۳. K – حلقه آزاد[۱] : فرض کنید k یک حلقه و $\{x_{\mathrm{i}}; \mathrm{i}\epsilon\mathrm{I}\}$ متغیرهای ناجابجایی و مستقل باشند. $k-$ حلقه آزاد تولید شـــده توسط $\{x_{\mathrm{i}}; \mathrm{i}\epsilon\mathrm{I}\}$ به صورت $k = \langle x_{\mathrm{i}}; \mathrm{i}\epsilon\mathrm{I}\rangle$ نشان داده می شود کـــه اعضـای آن چندجمله ای هــای روی k هستند که x_{i} ها با یکدیگر جابجا نمی شوند.

تعریف۰.۴. حلقه منظم فان نویمن : حلقـــه R را منظـــم فان نویمن نامیم هرگاه برای هر $x\epsilon R$، $b\epsilon R$ موجود باشد که $x = x\mathrm{b}x$.

تعریف۰.۵. حلقه خارج قسمت ها (حلقه کسرها) : فرض کنید R یک حلقه تعویض پذیر و Δ مجموعه تمام عناصر R که مقسوم علیه صفر نیستند، باشد (مجموعه Δ یک زیر مجموعه بسته ضربی R است). حلقه خارج قسمت های R بر Δ که با $\Delta^{-1}R$ نمـایش داده می شود، مجموعه رده های هم ارزی مجموعه $R \times \Delta$ تحت رابطه هم ارزی زیر است:

$$(r,u)\sim(r',u') \Leftrightarrow \exists\, u_1\epsilon\Delta\, ; u_1(\mathrm{r}u' - r'u) = \circ$$

رده هم ارزی (r,u) را با $u^{-1}\,\mathrm{r}$ نمایش می دهیم، و عمل جمع و ضرب در حلقه $\Delta^{-1}R$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$(u^{-1}r)(\nu^{-1}\mathrm{r}') = (u\nu)^{-1}\mathrm{rr}'$$

$$(u^{-1}r) + (\nu^{-1}\mathrm{r}') = (u\nu)^{-1}(r\nu + r'u)$$

می توان تحقیق کرد که برای هر $u \in \Delta$ نگاشت φ_u که :

$$\varphi_u : R \longrightarrow \Delta^{-1}\,\mathrm{R}$$

$$r \longmapsto u^{-1}\,(ru)$$

یک تکریختی حلقه است. پس R یک نسخه یکـریخـت $\varphi_u(R)$ است. لذا با تقریب یکـریختـی می توان R را یک زیر حلقه $\Delta^{-1}\,\mathrm{R}$ در نظر گرفت.

[1] - free K ring

تعریف ۶.۰. شرط ZC_n : فرض کنید S یک نیمگروه با عضو ٥ و $n \geq 2$ یک عدد صحیح مثبت باشد. گوییم S در شرط ZC_n صدق می کند هرگاه برای $a_i \in S$, i=1,2, … ,n,

$a_1 a_2 \ldots a_n =0$ نتیجه دهد $a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(n)} =0$ برای هر جایگشت $\sigma \epsilon S_n$. حلقه R در شرط ZC_n صدق می کند، هرگاه نیمگروه $(R,.)$ دارای این خاصیت باشد.

تعریف۷.۰. برگشت پذیری : حلقه R برگشت پذیر نامیده می شود هرگاه برای هر $a,b\epsilon R$, $ab =0$ نتیجه دهد $ba =0$.

تعریف۸.۰. ایده ال متقـــارن : ایـــده آل راســـت A از حلقـه R متقارن نامیـده می شود هرگاه برای هر $r,t,s\epsilon R$, $rst\epsilon A$ نتیجه دهد $rts\epsilon A$.

تعریف۹.۰. حلقه متقارن : حلقه R متقارن نامیده می شود هرگاه ایده آل(٥) یک ایده آل متقارن R باشد. به بیان دیگر برای هر $r,t,s\epsilon R$, $rst =0$ نتیجه دهد $rts =0$.

تعریف۱۰.۰. نیم جابجایی : حلقه R نیم جابجایی نامیده می شـود هرگاه برای هر $a\epsilon R$ پوچ ساز راست R در a, یک ایده آل R باشد.

تعریف ۱۱.۰ . آبلی : حلقه R آبلی نامیده می شود هرگاه خود توان های R مرکزی باشند.

تعریف ۱۲.۰. توسیع بدیهی[1] یک حلقه : فرض کنید R حلقه و ${}_RM_R$ یک دو مدول باشد. توسیع بدیهی R توسط M حلقه $T(R,M) = R \oplus M$ با عمل جمع و ضرب زیر است :

$$(r_1 , m_1) + (r_1 , m_2) = (r_1 + r_2 \ , \ m_1 + m_2)$$

$$(r_1 , m_1)(r_2 , m_2) = (r_1 r_2 \ , \ r_1 m_2 + m_1 r_2)$$

که $m_1,m_2\epsilon M$ و $r_1,r_2\epsilon R$.

[1] - Trivial extension

حلقه $T(R,M)$ با حلقه ماتریسهای به شکل $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & \mathrm{r} \end{pmatrix}$ که $r\epsilon R\ , m\epsilon M$ با عمل جمع و ضرب معمول ماتریسها ایزومورف است.

تعریف ۱۳.۰ . توسیع دُرُ : فرض کنید R یک جبر روی حلقه جابجایی S باشد. توسیع دُرُ [۱] از R توسط S حلقه $R \times S$ با عمل جمع و ضرب زیر است:

$$(r_1\ ,\ s_1\ ) +\ (r_2\ ,\ s_2\ ) =\ (r_1 + r_2\ ,\ s_1 + s_2\ )$$
$$(r_1\ ,\ \mathrm{s}_1\ )\ (\mathrm{r}_2\ ,\ \mathrm{s}_2\ ) = (r_1 r_2 + s_1 r_2 + s_2 r_1\ ,\ s_1 s_2\ )$$

که $r_i\ \epsilon\ R\ \ ,\ \ s_i \epsilon\ S$.

تعریف ۱۴.۰. توسیع ناگاتا[۲] : فرض کنید R یک حلقه جابجایی و M یک R– مدول و σ یک درون ریختی از R، باشد. توسیع ناگاتای R توسط σ, M، حلقه $R \oplus M$، با عمل جمع و ضرب زیر است:

$$(r_1\ ,\ \mathrm{m}_1\ ) + (r_1\ ,\ m_2\ ) = (r_1 + r_2\ ,\ m_1 + m_2\ )$$

$$(\mathrm{r}_1\ ,\ \mathrm{m}_1\ )(\mathrm{r}_2\ ,\ \mathrm{m}_2\ ) = (r_1 r_2\ \ ,\ \sigma\ (r_1) m_2 +\ r_2\, m_1)$$

تعریف ۱۵.۰. آرمنداریز [۳]: حلقه R آرمنداریز است هرگاه برای هر $f(x) = a_\circ + a_1 x + \cdots\ + a_{\mathrm{m}}\, x^{\mathrm{m}}$ و $g(x) = b_\circ + b_1 x + \cdots +\ b_{\mathrm{n}} x^{\mathrm{n}}$ دو عضو دلخواه $R[x]$, $f(x)g(x) = \circ$ نتیجه دهد $a_i \mathrm{b}_j\ = \circ$ برای هر i,j.

تعریف ۱۶.۰. حلقه أرِ : حلقه R یک حلقه أرِ است هرگاه هر عنصر منظم R یک عنصریکه باشد.

تعریف ۱۷.۰. حلقه خارج قسمتی راست : حلقه یکدار $Q(R)$ را یک حلقه خارج قسمتی راست حلقه R گوییم هرگاه :

---

[1] - Dorroh extension
[2] - Nagata extension
[3] - Armendariz

(۱) $R \subseteq Q(R)$.

(۲) هر عنصر منظم راست در R یک عنصر یکه در حلقه $Q(R)$ باشد.

(۳) هر عنصر $Q(R)$ بشکل $c = ab^{-1}$ باشد که $a, b \epsilon R$ و b در R منظم است.

تعریف ۱۸.۰. حلقه گلدی[۱] : حلقهR را گلدی چپ گوییم هرگاه :

(۱) در شرط زنجیر افزایشی برای پوچ سازهای چپ صدق کند.

(۲) هر مجموعه مستقل از ایده آل های چپ R متناهی باشد.

[1]- Goldi

فصل اول

نیمگروهها و حلقه هایی که حاصلضرب های صفرشان جابجا می شود

۱-۱ مقدمه

در این بخش پس از مطالعه شرط ZC_n برای نیمگروهها و حلقه های کاهشی و برخی انواع مثالها نتایجی از حلقه هایی که در شرط ZC_n صدق می کنند را بررسی می کنیم. مطمئناً حلقه های جابجایی برای هر $n \geq 2$ واجد شرط ZC_n هستند. شرط ZC_n برای زیر حلقه ها و حاصلضرب های مستقیم حفظ می شود هر چند این ویژگی توسط تصویرهای همریختی حفظ نمی شود.

اگر D یک حلقه تقسیم و $R=D < x , y >$ حلقه چندجمله ای ها رویD با متغیرهای y,x (که جابجا نمی شوند) باشد، آن گاه R در شرط ZC_n برای هر $n \geq 2$ صدق می کند، اما$R/(xy)$ فاقد این شرط برای هر $n \geq 2$ است، چون $\bar{y}\,\bar{x}^{\,n-1} = 0$ اما $\bar{x}^{\,n-1}\,\bar{y} \neq 0$.

۱-۲ شرط zc_n برای نیمگروهها و حلقه ها

قضیه ۱.۲.۱. هرگاه نیمگروهی با عضو ∘، دارای شرط ZC_n برای برخی $n \geq 3$ باشد، آن گاه شرط ZC_{n+1} را نیز دارد.

برهان :

۱- فرض کنید $n= 3$ و نیمگروه S دارای شرط ZC_3 باشد و برای $a_1, a_2, a_3, a_4 \in S$ داشته باشیم $a_1\, a_2\, a_3\, a_4 =\circ$.

نشان می دهیم با ثابت نگه داشتن a_1، هر جایگشتی از a_2 , a_3 , a_4 صفر است و چون $a_1\, a_2(\, a_3\, a_4) =\circ$ و S شرط ZC_3 دارد پس $a_2\, a_1(\, a_3\, a_4) =\circ$. و مشابهاً هر جایگشت از a_1, a_3, a_4 با ثابت نگه داشتن a_2 صفر است. همچنین از $(a_1 a_2)a_3 a_4 =\circ$ و شرط ZC_3 نتیجه می شود که (I) $a_3\, a_1\, a_2\, a_4 =\circ$ و (II) $a_4\, a_1\, a_2\, a_3 =\circ$. مجدداً با استدلالی مشابه هر جایگشت از سه عنصر دیگر با ثابت نگه داشتن a_3 در (I) و a_4 در (II) صفر است و لذا $a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} a_{\sigma(3)}\, a_{\sigma(4)} =\circ$ برای هر $\sigma \epsilon S_n$.

لذا جهت تکمیل برهان کافی است نشان دهیم $a_1\, a_i\, a_j\, a_k =\circ$ برای هر جایگشت k,j,i از 2,3,4 :

$$(\, a_1\, a_2)a_3\, a_4 =\circ \underset{ZC_3}{\Longrightarrow} a_1\, a_2\, a_4\, a_3 = (a_1\, a_2)a_4\, a_3 =\circ$$

$$a_1(\, a_2\, a_3\,)a_4 =\circ \underset{ZC_3}{\Longrightarrow} a_1\, a_4\, a_2\, a_3 = a_1\, a_4(\, a_2\, a_3) =\circ$$

$$(\, a_1\, a_4)\, a_2\, a_3 =\circ \underset{ZC_3}{\Longrightarrow} a_1\, a_4\, a_3\, a_2 = (a_1\, a_4)\, a_3\, a_2 =\circ$$

$$a_1\ a_2(\ a_3\ a_4) = \circ \underset{\mathrm{ZC_3}}{\Longrightarrow}\ a_1\ a_3\ a_4\ a_2\ =\ a_1\ (a_3\ a_4)\ a_2 = \circ$$

$$(\ a_1\ a_3)\ a_4\ a_2 = \circ \underset{\mathrm{ZC_3}}{\Longrightarrow}\ a_1\ a_3\ a_2\ a_4\ = (\ a_1\ a_3)\ a_2\ a_4 = \circ$$

۲- برای $n \geq 4$ فرض کنید S شرط ZC_n دارد و $a_1 a_2 \ldots a_{n+1} = \circ$ ، برای $n+1$ عضو دلخواه S.

نشان می دهیم هر دو عضو دلخواه a_j, a_i که $i < j$ و $i, j = 1,2,\ldots,n+1$، با هم جابجا می شود در حالیکه حاصل ضرب صفر آنها حفظ میشود. به عبارتی نشان می دهیم اگر $a_1 \ldots\ a_i\ \ldots\ a_j \ldots a_{n+1} = \circ$ آنگاه $a_1 \ldots a_j\ \ldots\ a_i \ldots a_{n+1} = \circ$.

دو حالت مختلف وجود دارد :

الف) $j - i \geq 3$ و یا $i \geq 3$ و یا $n + 1 - j \geq 2$.

به بیانی ساده تر حداقل دو عضو مجاور در حاصل ضرب مذکور قبل از a_{i} و یا بین a_{i} و a_{j} و یا بعد از a_{j} موجود است. در این حالت با ترکیب این دو عضو مجاور به حاصل ضرب n عضوی از اعضای S می رسیم و از شرط ZC_n با هر جایگشت دلخواه اعضا از جمله جابجایی a_{i} با a_{j} حاصل ضرب این اعضا همچنان صفر خواهد بود.

ب) $1 \leq \mathrm{j} - \mathrm{i} \leq 2$ و $1 \leq i \leq 2$ و $\circ \leq n + 1 - j \leq 1$.

در این صورت باتوجه به اینکه $n \geq 4$ انتخاب شده پس $i=2$, $j=\mathrm{n}=4$ و لذا کافی است نشـــان دهیم a_2 و a_4 در حاصلضرب $a_1\ a_2\ a_3\ a_4 a_5 = \circ$ جابجا می شوند :

$$a_1\ a_2\ a_3\ (a_4 a_5) = \circ \underset{\mathrm{ZC_4}}{\Longrightarrow} a_1\ (a_4\ a_5)\ a_2 a_3 = \circ \qquad \text{(I)}$$

از رابطه (I) داریم :

$$(a_1\ a_4)\ a_5\ a_2 a_3\ = \circ\ \underset{\mathrm{ZC_4}}{\Longrightarrow} (\ a_1\ a_4)\ a_3\ a_2 a_5 = \circ$$

و لذا $a_1\ a_4\ a_3\ a_2 a_5 = \circ$.

نتیجه ۲.۲.۱. هرگاه نیمگروهی در شرط ZC_3 صدق کند آن گاه در شرط ZC_n برای هر $n \geq 3$ صدق می کند.

قضیه ۳.۲.۱. هر نیمگروه کاهشی در شرط ZC_n برای هر $n \geq 2$ صدق می کند.

برهان :

هر نیمگروه کاهشی در شرط ZC_2 صدق می کند، پس باتوجه به نتیجه ۲.۲.۱، کافی است نشان دهیم در شرط ZC_3 نیز صدق می کند.

فرض کنید $abc = \circ \ (I)$. پس :

$$a(bc) = \circ \underset{ZC_2}{\Longrightarrow} b\,c\,a = (bc)a = \circ$$

$$(ab)c = \circ \underset{ZC_2}{\Longrightarrow} c\,a\,b = c\,(ab) = \circ$$

با ضرب رابطه (I) از راست در b , $a\,(bcb\,) = \circ$ و از شرط ZC_2، $(\,bcb\,)a = \circ$. با ضرب راست رابطه بدست آمده در c , $b(cbac) = \circ$. بنابراین $(cbac)b = \circ$، و با ضرب راست در a , $(cba\,)(\,cba\,) = \circ$ و از کاهشی بودن $cba = \circ$. پس کافی است نشان دهیم $acb = \circ$ و $bac = \circ$:

$$cba = \circ \ \Rightarrow (cb)a = \circ \ \Rightarrow acb = \circ$$

$$cba = \circ \ \Rightarrow c(ba) = \circ \Rightarrow b\,a\,c = \circ$$

بنابراین S در شرط ZC_n برای هر $n \geq 3$ صدق می کند.