بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی گرایش محض

مطالعه حلقه های کرول

استاد راهنما:

دکتر شکراله سالاریان

پژوهشگر:

سحر شکرچیان بروجنی

اسفند ماه 1386

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش محض خانم سحر شکرچیان بروجنی

تحت عنوان:

۱۳۸۷ /۹/ ۲۳

مطالعه حلقه های کرول

در تاریخ ...۸۶/۱۲/۲۱..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ......عالی.............. به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر شکرا.. سالاریان با مرتبه علمی دانشیار امضاء

۲- استاد داور داخل گروه دکتر علیرضا عبدالهی با مرتبه علمی دانشیار امضاء

۳- استاد داور خارج گروه دکتر جواد اسدالهی با مرتبه علمی دانشیار امضاء

مهر و امضای مدیر گروه.....

نون و القلم

حمد و سپاس بی قیاس خدای بی همتا را که به ما نعمت بیان ارزانی داشت و با قلم قدرت خویش، بشریت را به زیور علم و دانش آراست و انسانیت را زیر لوای فرهنگ و ادب تعالی بخشید. پروردگار متعالی که یک لحظه وجود سراسر نقص آفریدگان خویش را به خود وانگذاشته و یک دم از بالندگی علمی و معنوی باز نمی دارد.

اکنون که این پایان نامه به سرانجام رسیده است، می دانم که همه لطف عمیم او بوده که در تمام مراحل، شامل حالم شده است.

تهیه ی این مجموعه را مرهون راهنمایی استاد راهنمایم جناب آقای دکتر شکرالله سالاریان می دانم که در نهایت صبر و شکیبایی و بزرگواری راهنمای ام کردند اگر چه می دانم که توانایی ادای دین و جبران این زحمات را نخواهم داشت. ولی با فروتنی بسیار زحمات و کمک ها را سپاس داشته و از خداوند بزرگ سلامتی و کامیابی ایشان را خواهانم.

همچنین بر خود واجب می دانم از زحمات و راهنمایی های سرکار خانم دکتر جهانشاهی و همین طور استاد ارجمندم جناب آقای دکتر اسدالهی که همواره افتخار شاگردی ایشان را دارم، کمال تشکر را داشته باشم.

همچنین از زحمات سرکار خانم ماموری، گرامی و فرهمند در طی تدوین این پایان نامه سپاس گذاری می کنم.

اما به راستی اگر هم دلی و همراهی های خانواده ی عزیزم نبود، موفق به اتمام این پایان نامه نمی شدم. از آنان و از تمامی عزیزانی که همراه ایشان سختی راه را برایم هموار کرد بی نهایت متشکرم.

تقدیم به :

آنانکه دوستشان دارم، دریای مهر و صبر

مادرم و پدرم که در مسیر زندگی

همراهیم کردند.

چکیده

در این پایان نامه نشان می دهیم که بستار صحیح حلقه ای که ایده آل های منظم آن متناهی تولید شده باشند، حلقه کرول است.

برای این منظور ابتدا به مطالعه ایده آل های منظم و مقداریاب می پردازیم و با استفاده از تعریف مقداریاب، دامنه کرول را معرفی خواهیم کرد و اثبات خواهیم کرد بستار صحیح دامنه نوتری، دامنه کرول است.

سپس دو عملگر t و v را روی کاتگوری ایده آل ها تعریف می کنیم و با دقت به مطالعه رفتار این عملگرها می پردازیم و در فصل آخر در اثبات قضایا از آن استفاده خواهیم کرد.

در فصل آخر به معرفی مقداریاب گسسته و حلقه مقداریاب گسسته رتبه یک پرداخته و در ادامه حلقه کرول را معرفی کرده و به موضوع اصلی این پایان نامه که همان بررسی بستار صحیح حلقه هایی که ایده آل های منظم آنها متناهی تولید شده اند می پردازیم.

واژه های کلیدی: ایده آل منظم، بستار صحیح، حلقه مقداریاب، دامنه کرول.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

پیشگفتار

کسانی که با جبر تعویض پذیر آگاهی دارند به خوبی با خواص زیبای حلقه‌های مقداریاب و همچنین حلقه‌های کرول آشنایی دارند.

شاید به توان گفت بهترین مثال از وجود حلقه‌های کرول که لزوماً حلقه‌ی مقداریاب نیستند بستار صحیح دامنه نوتری است.

ارائه مثالهای بیشتر از وجود حلقه‌های کرول همواره مورد توجه بسیاری از محققین در زمینه جبر جابجایی و هندسه جبری بوده است.

در سال ۱۹۸۸ هوکابا [۱] نشان داد بستار صحیح حلقه نوتری، حلقه کرول است [۶]. در سال ۱۹۹۳ کنگ [۲] شرط نوتری بودن را از حلقه حذف کرد و این موضوع را برای حلقه‌های ماروت نانوتری بیان کرد [۱۰]. کنگ از نتایجی که ماتیجویک [۳] در سال ۱۹۷۶ [۱۴] برای حلقه‌های نانوتری استفاده کرده بود و با بکاربردن اثبات این نتایج و بوسیله استقراء روی بعدهای منظم به این نتیجه رسید که بستار صحیح حلقه‌ی ماروتی که همه ایده‌آلهای منظم آن متناهی تولید شده باشند، حلقه کرول است. در اثبات کنگ شرط ماروت فقط به عنوان توجه بیان شده بود. در سال ۱۹۸۸ هوکابا با ارائه مثالهایی نشان داد حلقه‌ای که همه ایده‌آلهای منظم آن متناهی تولید شده باشند لزوماً حلقه

---

[۱] Huckaba

[۲] Kang

[۳] Matijevic

ماروت نیست [٦]. همچنین در سال ۱۹۸۰ کندی [۴] تعریفی از حلقه کرول بیان کرد که بر اساس آن حلقه کرول لزوماً حلقه ماروت نبود [۱۲]. لذا بر اساس نتایجی که ماتیجویک و کندی بیان کرده بودند حلقه کرول است اگر و تنها اگر حلقه کاملاً صحیح بسته باشد و شرط زنجیری روی ایده‌آلهای مقسم منظم آن برقرار باشد [۱۵] و [۱۲].

ما در این پایان نامه قصد داریم نشان دهیم که اگر حلقه به گونه‌ای باشد که تمام ایده‌آلهای منظم آن متناهی تولید شده باشند آنگاه بستار صحیح این حلقه، حلقه کرول است.

این پایان نامه در چهار فصل تنظیم شده است.

فصل اوّل:

این فصل شامل مطالب جبری مورد نیاز، تعاریف و قضایای مقدماتی درباره حلقه‌ها، ایده‌آلها، مجموعه‌های ضربی بسته و... آمده است. در این فصل از منابع [۲]، [۳]، [۸] و [۱۸] استفاده شده است.

فصل دوّم:

این فصل در دو بخش تنظیم شده است. در بخش اوّل این فصل به بیان تعریف بستار صحیح از حلقه و نیز برخی قضایای مرتبط با آن صورت گرفته است. در این بخش از منابع [۳] و [۱٦] استفاده شده است. در بخش دیگر این فصل در ابتدا به معرفی مقداریاب گسسته و اثبات چند لم و قضیه مرتبط با آن پرداخته شده است که در اثبات بسیاری از قضایای مهم این پایان نامه نقش مهم و اساسی دارند. همچنین در این

[۴] Kennedy

بخش از منابع [۳]، [۴]، [۱۶] و [۱۹] استفاده-شده است.

فصل سوّم:

این فصل تنها در یک بخش تنظیم گردیده است. در ابتدای این فصل به تعریف عملگرهای t و v پرداخته شده است سپس به بررسی خواصی که روی این عملگرها وجود دارد پرداخته شده است که در اثبات بسیاری از قضایای مهم فصل آخر استفاده شده است. همچنین در این فصل از منابع [۷] و [۹] استفاده شده است.

فصل چهارم:

این فصل به عنوان آخرین فصل به بررسی و اثبات برخی نتایج در مورد حلقه‌هایی که تمام ایده‌آلهای منظم آن متناهی تولید شده باشند پرداخته شده است.

این فصل در دو بخش تنظیم شده است. در بخش اوّل این فصل با معرفی حلقه مقداریاب رتبه یک به بررسی حلقه و ایده‌ال اولش که در فصل قبل معرفی شد پرداخته و نشان می‌دهیم حلقه مقداریاب رتبه یک است. در این بخش از منابع [۳]، [۵]، [۱۲]، [۱۴]، [۱۵] و [۱۷] استفاده شده است. در بخش بعدی این فصل لم ۱۰.۴ که به عنوان تمرین در پایان نامه ارائه شده است را بررسی کرده و با بررسی حلقه‌هایی با ایده‌آلهای منظم متناهی تولید شده، به مهمترین قضیه این فصل که در اصل نتیجه اصلی این پایان نامه می‌باشد پرداخته شده است. در این بخش از منابع [۲] و [۱۰] استفاده شده است.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل، به خاطر دسترسی بهتر خواننده، برخی تعاریف و قضایای مقدماتی که در دیگر فصلها از آنها استفاده خواهیم کرد بیان و در صورت نیاز برای اثبات آنها راهنمایی های لازم را ارائه می‌نماییم.

تعریف ۱.۱ . فرض کنید R حلقه‌ای تعویض پذیر باشد. منظور از R − جبر، حلقه‌ای چون S مجهز به یک همریختی حلقه‌ای چون $f : R \longrightarrow S$ است.

تعریف ۲.۱ . عنصر a در یک حلقه‌ی R را یک مقسوم علیه صفر چپ (راست) می‌گوییم، اگر عنصر ناصفری مانند $b \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $ab = ۰$

($ba = 0$) و مقسوم علیه صفر عنصری از R است که هم مقسوم علیه صفر چپ و هم مقسوم علیه صفر راست باشد.

تعریف ۳.۱ . حلقه‌ی تعویض‌پذیر و یکدار R که $1_R \neq 0_R$ و 0_R تنها مقسوم علیه صفر آن می‌باشد را دامنهٔ صحیح می‌نامیم.

تعریف ۴.۱ . عنصر a در حلقه‌ی یکدار R را معکوس پذیر چپ (راست) گوییم اگر $c \in R$ ($b \in R$) وجود داشته باشد که $ca = 1_R$ ($ab = 1_R$). عنصر c (b) معکوس چپ (راست) a نامیده می‌شود و عنصر $a \in R$ که معکوس پذیر چپ وراست باشد، معکوس پذیر یا یکه نامیده می‌شود. معکوس‌های چپ وراست عنصر a در حلقه‌ی یکدار R، یکتا هستند.

تعریف ۵.۱ . فرض کنید R حلقه‌ای تعویض پذیر و یکدار باشد. عضو وارونپذیر R عضوی چون $r \in R$ است که به ازای آن عضوی مانند $u \in R$ وجود داشته باشد که $ru = 1_R$. اگر $r \in R$ وارونپذیر باشد آنگاه دقیقاً یک عضو $u \in R$ با خاصیت $ru = 1_R$ وجود دارد. این عضو را وارون r می‌نامیم و با r^{-1} نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱ . فرض کنید $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای از ایده‌آلهای حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد. مجموع این خانواده یعنی $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ را برابر با ایده‌آل تولید شده توسط $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ در R تعریف می‌کنیم یعنی:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda).$$

تعریف ۷.۱ . فرض کنید I و J ایده‌آلهای حلقه‌ی تعویضپذیر R باشند. حاصل تقسیم یا خارج‌قسمت $(I :_R J)$ به صورت

$$(I :_R J) = \{a \in R \mid aJ \subseteq I\}$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۸.۱ . فرض کنید R و S حلقه‌هایی تعویضپذیر و $f : R \longrightarrow S$ همریختی حلقه‌ای باشد.

۱) هرگاه J ایده‌آل S باشد آنگاه $f^{-1}(J) := \{r \in R \mid f(r) \in J\}$ ایده‌آلی از R است که آن را حاصل تحدید J نسبت به همریختی حلقه‌ای $f : R \longrightarrow S$ می نامیم. $f^{-1}(J)$ را اغلب با J^c نمایش میدهیم.

۲) به ازای هر ایده‌آل I از R، ایده‌آل $f(I)S$، یعنی ایده‌آل تولید شده توسط $f(I)$ در S را حاصل توسیع I نسبت به همریختی حلقه‌ای $f : R \longrightarrow S$ می‌نامیم. $f(I)S$ را اغلب با I^e نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۱ . فرض کنید R دامنه صحیح باشد و I یک $R-$ زیر مدول از میدان کسرهای R باشد. I را ایده‌آل کسری گوییم اگر عضو ناصفری مانند $\alpha \in R$ موجود

باشد به طوری که: $\alpha I \subseteq R$.

تعریف ۱۰.۱ . فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و یکدار باشد. ایده‌آل سره‌ای مانند P از حلقه‌ی R را اول گوییم هرگاه به ازای هر $a,b \in R$، اگر $ab \in P$ آنگاه $a \in P$ یا $b \in P$.

تعریف ۱۱.۱ . فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. طیف R را مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آلهای اول R تعریف می‌کنیم و آنرا با $Spec(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۱ . حلقه تعویضپذیر R را شبه نیمه موضعی می‌گوییم اگر تنها تعدادی متناهی ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد.

تعریف ۱۳.۱ . فرض کنید V مجموعه‌ای ناتهی باشد. رابطه $\preceq$ را ترتیب جزئی روی V می‌نامیم اگر بازتابی، ترایایی و پادمتقارن باشد. اگر $\preceq$ یک ترتیب جزئی روی V باشد می‌گوییم که $(V,\preceq)$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب است.

تعریف ۱۴.۱ . مجموعه جزئاً مرتب $(V,\preceq)$ را کلاً مرتب می‌گوییم اگر به ازای هر $u,v \in V$ دست کم یکی از روابط $v \preceq u$ و $u \preceq v$ برقرار باشد.

تعریف ۱۵.۱ . فرض کنید W زیر مجموعه‌ای ناتهی از مجموعه جزئاً مرتب $(V,\preceq)$ باشد. عضو $u \in V$ را کران بالای W می‌گوییم اگر به ازای هر $w \in W$ داشته باشیم:

$.w \preceq u$

تعریف ۱.۱۶ . اگر $(V, \preceq)$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد آنگاه به ازای هر $u, v \in V$ می‌نویسیم $u \prec v$ اگر $u \preceq v$ و $u \neq v$. عضو $m \in V$ را عضو ماکسیمال V می‌گوییم اگر عضوی چون $w \in V$ وجود نداشته باشد که $m \prec w$. لذا $m \in V$ یک عضو ماکسیمال V است اگر و تنها اگر از $m \preceq v$ و $v \in V$ نتیجه شود $m = v$.

لم ۱.۱۷ . (لم زورن). فرض کنید $(V, \preceq)$ مجموعه‌ای ناتهی جزئاً مرتب با این خاصیت باشد که هر زیر مجموعه‌ی ناتهی کلاً مرتب V کران بالایی در V داشته باشد. در این صورت V دست کم یک عضو ماکسیمال دارد.

تعریف ۱.۱۸ . فرض کنید $(V, \preceq)$ مجموعه‌ای ناتهی و جزئاً مرتب باشد.

۱) می‌گوییم که $(V, \preceq)$ در شرط زنجیر صعودی صدق می‌کند اگر به ازای هر خانواده‌ای از عضوهای V چون $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ با خاصیت:

$$v_1 \preceq v_2 \preceq \ldots \preceq v_i \preceq v_{i+1} \preceq \ldots$$

عدد $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که به ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $v_k = v_{k+i}$،

۲) می‌گوییم $(V, \preceq)$ در شرط ماکسیمال صدق می‌کند اگر هر زیر مجموعه‌ی ناتهی از V شامل عضوی ماکسیمال (نسبت به $\preceq$) باشد.

لم ۱۹.۱ . فرض کنید $(V, \preceq)$ مجموعه‌ای ناتهی و جزئاً مرتب باشد. در این صورت $(V, \preceq)$ در شرط زنجیر صعودی صدق می‌کند اگر و تنها اگر در شرط ماکسیمال صدق کند.

اثبات . فرض کنید T زیر مجموعه‌ی ناتهی V باشد و عضو ماکسیمال نداشته باشد. عضوی چون $t_1 \in T$ وجود دارد، و چون T عضو ماکسیمال ندارد عضوی چون $t_2 \in T$ وجود دارد که $t_1 \prec t_2$. همین موضوع در مورد t_2 و غیره صادق است. t_1 و t_2 و غیره را به این ترتیب در نظر می‌گیریم، هرگاه به $t_n \in T$ برسیم آنگاه $t_{n+1} \in T$ وجود دارد به طوری که $t_n \prec t_{n+1}$. به این نحو یک زنجیره‌ی اکیداً صعودی نامتناهی چون

$$t_1 \prec t_2 \prec \dots \prec t_n \prec t_{n+1} \prec \dots$$

از عضوهای $T \subseteq V$ به دست می‌آوریم.

برعکس: فرض کنید که $(V, \preceq)$ در شرط ماکسیمال صدق کند. فرض کنید

$$v_1 \preceq v_2 \preceq \dots \preceq v_n \preceq v_{n+1} \preceq \dots$$

زنجیره‌ای صعودی از عضوهای V باشد. طبق شرط ماکسیمال، مجموعه‌ی $T := \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ متشکل از جمله‌های زنجیره‌ی فوق عضو ماکسیمال دارد، یعنی $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد که به ازای آن v_k یک عضو ماکسیمال T است. در این صورت به ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $v_k = v_{k+i}$. ■

تعریف ۲۰.۱ . فرض کنید R حلقه‌ی تعویضپذیر باشد. مجموعه‌ی ایده‌آلهای R را با I_R نمایش می‌دهیم. می‌گوییم که R نوتری است اگر مجموعه‌ی جزئاً مرتب $(I_R, \subseteq)$ در

شرط زنجیر صعودی و یا در شرط ماکسیمال صدق کند.

به عبارت دیگر R نوتری است اگر و تنها اگر هر زنجیره‌ی صعودی از ایده‌آلهای R چون

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \ldots$$

سرانجام ایستا باشد و این فقط و فقط وقتی ممکن است که هر مجموعه‌ی ناتهی از ایده‌آلهای R نسبت به رابطه‌ی شمول، عضو ماکسیمال داشته باشد.

تعریف ۲۱.۱ . فرض کنید R حلقه‌ی تعویضپذیر و I ایده‌آل R باشد. در این صورت

$\sqrt{I} := \{r \in R \mid r^n \in I$ که باشد داشته وجود $\mathbb{N}$ به متعلق ای $n\}$

ایده‌آلی از R است که I را شامل می‌شود و رادیکال I نام دارد.

تعریف ۲۲.۱ . فرض کنید $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ایده‌آلهایی از حلقه‌ی تعویضپذیر R باشند و فرض کنیم P ایده‌آل اول R باشد و $P = \bigcap\limits_{i=1}^{n} I_i$. در این صورت به ازای j ای که $1 \leq j \leq n$ داریم $P = I_j$.

تعریف ۲۳.۱ . فرض کنید Q ایده‌آلی از حلقه‌ی تعویضپذیر R باشد. می‌گوییم Q ایده‌آل اولیه R است اگر

۱) $Q \subset R$، یعنی Q ایده‌آل سره‌ی R باشد، و

۲) هرگاه $a, b \in R$ و $ab \in Q$ ولی $a \notin Q$ آنگاه $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $b^n \in Q$.

تعریف ۲۴.۱ . فرض کنید Q یک ایده‌آل اولیه حلقه‌ی تعویضپذیر R باشد. در این

صورت $P:=\sqrt{Q}$ ایده‌آل اول R است و می‌گوییم Q، P — ابتدایی است.

تعریف ۲۵.۱ . فرض کنید I ایده‌آل سره‌ای از حلقه‌ای تعویض پذیر چون R باشد. تجزیه‌ی اولیه I عبارت است از اشتراک تعدادی متناهی از ایده‌آلهای اولیه R که برابر با I باشد:

$I=Q_1\cap Q_2\cap\ldots\cap Q_n$ که به ازای $n,\ldots,1=i$ ، $\sqrt{Q_i}=P_i$

این را تجزیه اولیه مینیمال I می‌گوییم اگر

۱) $P_1,\ldots,P_n$، ایده‌آلهای اول متمایز R باشند، و

۲) به ازای هر $j=1,\ldots,n$ داشته باشیم

$$Q_j\not\supseteq\bigcap_{i\neq j,i=1}^{n}Q_i.$$

می‌گوییم که I ایده‌آل تجزیه‌پذیر R است اگر تجزیه‌ای اولیه داشته باشد.

قضیه ۲۶.۱ . فرض کنید I ایده‌آلی تجزیه‌پذیر از حلقه‌ی تعویض پذیر R باشد و تجزیه‌ی

$I=Q_1\cap Q_2\cap\ldots\cap Q_n$ که به ازای $n,\ldots,1=i$ ، $\sqrt{Q_i}=P_i$

تجزیه‌ی اولیه مینیمال I باشد. فرض کنید $P\in Spec(R)$. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱) به ازای i ای که $1\leq i\leq n$ ، $P=P_i$.

۲) $a\in R$ وجود دارد به طوری که $(I:a)$ ایده‌آل P — اولیه باشد.

۳) $a \in R$ وجود دارد به طوری‌که $P = \sqrt{(I : a)}$.

اثبات . به قضیه ۱۷.۴ فصل ۴ از [۱۸] رجوع کنید.■

تعریف ۲۷.۱ . فرض کنید I یک ایده‌آل تجزیه‌پذیری از حلقه‌ی تعویض پذیر R باشد و تجزیه‌ی

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap ... \cap Q_n \text{ که به ازای } i = 1, ..., n, \sqrt{Q_i} = P_i$$

تجزیه‌ی اولیه مینیمال I باشد. در این صورت مجموعه‌ی n عضوی $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ را مجموعه‌ی ایده‌آلهای اول وابسته به I می‌نامیم و با $assI$ یا $ass_R I$ نشان می‌دهیم. عضوهای $assI$ را ایده‌آلهای اول وابسته به I یا اولهای وابسته به I می‌نامیم.

تذکر ۲۸.۱ . فرض کنید I یک ایده‌آل تجزیه‌پذیری از حلقه‌ی تعویض پذیر R باشد و $P \in Spec(R)$. از قضیه ۲۴.۱، نتیجه می‌شود که $P \in ass(I)$ اگر و تنها اگر $a \in R$ وجود داشته باشد که $(I : a)$ ایده‌آل P − اولیه باشد، این شرط برقرار است اگر و تنها اگر $b \in R$ وجود داشته باشد که $P = \sqrt{(I : b)}$.

قضیه ۲۹.۱ . فرض کنید I یک ایده‌آل تجزیه‌پذیری از حلقه‌ی تعویض پذیر R باشد و $P \in Spec(R)$. در این صورت P ایده‌آل اول مینیمال I است اگر و تنها اگر P عضوی مینیمال از مجموعه‌ی $assI$ باشد.

اثبات . به قضیه ۲۴.۴ فصل ۴ از [۱۸] رجوع کنید.■

قرارداد ۳۰.۱ . فرض کنید I یک ایده‌آل تجزیه‌پذیری از حلقه‌ی تعویض پذیر R باشد، عضوهای مینیمال $assI$ دقیقاً همان ایده‌آلهای اول مینیمال I اند که این