بسم الله الرحمن الرحيم

انتگرالهای بیضوی تعمیم یافته‌ومعادلات مدولی

علی لطیفی

دانشکده‌ی علوم

گروه ریاضی

تابستان ۱۳۸۹

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر رسول آقالاری

پایان نامه آقای: **علی لطیفی سیویری** به تاریخ **۸۹/۵/۱۳** شماره **۲-۱۰۶۷**

مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه (عالی) و نمره ۱۸/۷۰ (به حروف هجده و ۷۰)

قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر رسول آقالاری

۲- داور خارجی: دکتر سعید استادباشی

۳- داور داخلی: دکتر علی عبادیان

۴- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر حبیب اذانچیلر

تقدیم به

گنجینه های زندگی:

پدر و مادر بی همتایم

و

خواهر و برادران عزیزم

تقدیر و تشکر

شکر و سپاس بر درگاه پروردگار و دوست مهربانم که در طول کار با این پایان نامه ، وجود بیکران و دست یاریش را بیش از پیش باور کردم. صدایش زدم و چه نیکو آنچنان که در لیاقت مقام اوست یاریم رساند.

بی تردید اتمام این مجموعه مرهون زحمات بی دریغ استاد گرانقدرجناب آقای دکتررسول آقالاري می باشد. که بر خویش فرض می دانم تا مراتب سپاس و امتنان قلبی خود نسبت به ایشان را ابراز دارم.

همچنین از آقایان دکتر استاد باشي، دکترعبادیان، که زحمت داوري پایان نامه مرا برعهده داشتند کمال سپاس و قدرداني را دارم. بویژه از اساتید گروه ریاضی و تمام دوستان و همکلاسی هایم که مرا در طول این پایان نامه یاري رساندند تشکر می نمایم.

برای تمامی این بزرگواران و تمامی رهروان راه علم و دانش آرزوی سلامتی و توفیق روزافزون دارم.

علي لطيفي – تابستان ۱۳۸۹

فهرست مندرجات

۱.۰ چکیده

در نظریه توابع هندسی؛ توابع و انتگرالهای بیضوی تعمیم یافته از تبدیلات شوارتز کریستوفل؛ از نیم صفحه بالایی به توی یک متوازی الاضلاع وبه طور طبیعی با توابع فوق هندسی گوسی مرتبط هستند. ترکیبات معینی از این انتگرالها در نظریه تحلیلی اعداد در مبحث تساویهای مدولار رومانجوآ و نیز تقریب های π مطرح می‌شوند. نویسندگان مقاله خاصیت یکنوایی و تحدب این کمیتها را بررسی کرده و نامساویهای دقیقی برای آنها بدست آورده‌اند.

۲.۰ پیش گفتار

این پایان نامه براساس مقاله مهمی [٦] در سال ۱۹۹۵ توسط آقایان برنت، بارگاوا و گاروان که معادلات مدولار تعمیم یافته را مطالعه و بررسی می کند، تدوین یافته است.

معادلات مدولار تعمیم یافته با نشان $\frac{1}{a}$ و درجهٔ P عبارتست از :

$$\frac{F(a,1-a,1;1-s^2)}{F(a,1-a,1;s^2)} = P\frac{F(a,1-a,1;1-r^2)}{F(a,1-a,1;r^2)} \quad ; \quad (0<r<1, 0<s<1, 0<a<1)$$

که در آن F یک تابع فوق هندسی وP یک عدد صحیح می‌باشد.

فصل دو این پایان نامه، به معرفی انتگرالهای بیضوی $\kappa(r)$ و $\kappa(r')$ ، $\varepsilon(r)$ و $\varepsilon(r')$ پرداخته، و خاصیت یکنوایی تابع $F(a,b,c;x)$ و ترکیبات خاص آن با توابع دیگر را مورد بررسی قرا ر می دهد.

فصل سوم پایان نامه؛ به اثبات قضیه مهمی که $w=f(z)=\frac{sin\pi a}{2}\int_0^z t^{-a}(1-t)^{a-1}(1-r^2t)^{-a}dt$ نگاشت همدیس از نیم صفحهٔ بالایی صفحهٔ مختلط به روی متوازی‌الاضلاع با زاویه‌های πa و $\pi(1-a)$ می‌باشد؛ می‌پردازد. بعد از معرفی توابع $\varphi_k^a(r)$ و $\eta_k^a(r)$ ؛ در فصل چهار، مشتقات این توابع بیان می شوند ودر فصل پنجم به بیان قاعده مهمی به نام قاعده l—هوپیتال که در مرجع [۳] قضیه ۱.۲۵ آمده، خواهیم پرداخت که در اثبات برخی از قضایا استفاده می شود.

قضایای اصلی این پایان نامه در فصل ششم مورد بررسی قرار می گیرد و خواص ابتدایی توابع $\varphi_k^a(r)$ و $\eta_k^a(r)$ را بیان می‌کند ونامساویهای دقیقی را برای این توابع بدست می‌آورد. و در ادامه در فصل هفتم؛ وابستگی توابع فوق هندسی را روی پارامتر a بررسی می‌کنیم.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدّماتی

در این فصل تعاریف، قضایا و لم‌هایی ازآنالیز حقیقی و مختلط که در طول این پایان نامه به آنها نیاز خواهیم داشت را بیان می‌کنیم.

۱.۱ مفاهیم مقدّماتی از آنالیز تابعی و حقیقی

تعریف ۱.۱.۱ بازهٔ $I \subseteq R$ و تابع $f : I \longrightarrow R$ مفروض اند. می گوییم f تابعی محدب است، هرگاه به ازای هر $(x, y \in I)$ و هر $\circ \leq \lambda \leq ۱$ داشته باشیم

$$f((۱-\lambda)x+\lambda y) \leq (۱-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$$

و اگر به ازای هر $x \neq y$، $(\circ < \lambda < ۱)$ نابرابری

$$f((۱-\lambda)x+\lambda y) < (۱-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$$

برقرار باشد می گوییم f اکیداً محدب است.

می گوییم $f : I \longrightarrow R$ تابعی مقعر (اکیداًمقعر) است ، هرگاه $(-f)$ تابعی محدب (اکیداًمحدب) باشد.

می گوییم $f : I \longrightarrow R$ تابعی آفین است هرگاه f همزمان محدب ومقعر باشد. به عبارت دیگر f آفین است هرگاه به ازای هر سه نقطه دلخواه $x < z < y$ متعلق به I به طوریکه $z = (۱ - \lambda)x + \lambda y$، $۰ < \lambda < ۱$ داشته باشیم

$$f(z) = (۱ - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

تعریف ۲.۱.۱ قرص واحد U را به صورت زیر نمایش میدهیم :

$$U = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < ۱\}$$

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید تابع مختلط f در ناحیه Ω تعریف شده باشد. اگر $z_۰ \in \Omega$ و

$$\lim_{z \to z_۰} \frac{f(z) - f(z_۰)}{z - z_۰}$$

موجود باشد، این حد را با $f'(z_۰)$ نشان داده و آنرا مشتق f در $z_۰$ می‌نامیم. اگر $f'(z_۰)$ به ازای هر $z_۰ \in \Omega$ موجود باشد، می‌گوییم f در Ω تحلیلی است.

تعریف ۴.۱.۱ نگاشت پیوسته‌ای که اندازهٔ زاویه بین خمهای مار یک نقطه مفروض $z_۰$ راحفظ نماید، حافظ زاویه در $z_۰$ گوییم، اگر $f(z)$ در $z_۰$ حافظ زاویه باشد و بعلاوه جهت زوایای بین خمهای مار بر نقطه $z_۰$ را نیز حفظ نماید، می گوییم $f(z)$ در $z_۰$ همدیس است.

تعریف ۵.۱.۱ تابع $f : R \longrightarrow R$ را هومئومورفیسم[۱] می‌نامیم هر گاه یک‌به‌یک، پوشا و دارای معکوس پیوسته باشد.

---

[۱] Homeomorphism

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید $\circ < x < \infty$. در این صورت انتگرال ناسرهٔ $\int_{\circ}^{\infty} t^{x-\text{۱}} e^{-t} dx$ همگراست. تابع $\Gamma(x) = \int_{\circ}^{\infty} t^{x-\text{۱}} e^{-t} dt$ را تابع گاما می گوییم.

تعریف ۷.۱.۱ هرگاه $m, n > \circ$، در این صورت

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \int_{\circ}^{\text{۱}} x^{m-\text{۱}}(\text{۱}-x)^{n-\text{۱}}dx$$

را تابع بتا می نامیم.

تذکر ۸.۱.۱ اگر $\circ < x < \infty$ باشد، همواره تابع $\psi(x) \equiv \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ در نظر می گیریم.

تعریف ۹.۱.۱ $R(a,b)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$R(a,b) = -\text{۲}\gamma - \psi(a) - \psi(b)$$

که در آن γ ثابت اولر– ماشرونی[۲] ومقدار آن برابر است با

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(\Sigma_{k=\text{۱}}^{n}\frac{\text{۱}}{k} - log\ n) = \circ.\text{۵۷۷۲۱۵}...$$

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید a, b, c اعداد مختلط و $(c \neq \circ, -\text{۱}, -\text{۲}, ...)$ باشند، تابع

$$F(a,b,c;z) = \text{۱} + \frac{ab}{\text{۱}!c}z + \frac{a(a+\text{۱})b(b+\text{۱})}{\text{۲}!c(c+\text{۱})}z^{\text{۲}} + ... \qquad (\text{۱.۱})$$

تابع فوق هندسی گاوس[۳] نام دارد و این تابع در U (قرص واحد) تحلیلی است.

---
[۲] Euler-mascheroni

[۳] Gouss

تذکر ۱۱.۱.۱ : اگر$(a \neq ۰)$ ،$(a, ۰) = ۱$ نماد پوچهامر به شکل زیر نمایش داده میشود:

$$(a, n) = a(a+۱)...(a+n-۱)$$

تعریف ۱۲.۱.۱ : با استفاده از نماد پوچهامر **تابع فوق هندسی گوس** [۴] را می توان به شکل زیر نمایش داد:

$$F(a,b,c;z) = \sum_{K=۰}^{\infty} \frac{(a,k)(b,k)}{(c,k)k!} z^k$$

ویا

$$F(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{K=۰}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)\Gamma(۱+k)} z^k \qquad (۱.۲)$$

به راحتی می‌توان دید که این سری برای z هایی که $|z| < ۱$، به طور مطلق همگراست وبرای $|z| > ۱$ واگراست. همچنین برای z هایی که $|z| = ۱$ به طور مطلق همگراست، هرگاه $c > a+b$، و برای $z = -۱$ سری همگراست، هرگاه$c > a+b-۱$. لذا تابع فوق هندسی درU تحلیلی است.

با مشتق گیری از رابطهٔ اخیر داریم:

$$F'(a,b,c;z) = \sum_{k=۱}^{\infty} k\frac{(a,k)(b,k)}{(c,k)k!} z^{k-۱} = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{(a,k+۱)(b,k+۱)}{(c,k+۱)} z^k$$

اما چون $(a,k+۱) = a(a+۱,k)$ لذا داریم :

$$F'(a,b,c;z) = \frac{ab}{c} F(a+۱, b+۱, c+۱; z)$$

تذکر ۱۳.۱.۱ : تعداد زیادی ازتوابع مهم و رایج در آنالیز می توانند با مفهوم توابع فوق هندسی بیان شوند.

[۴] Gaussion hyper geometric Function

به طور مثال :

$$(1+z)^n = F(-n,b,b;z)$$

$$log(1+z) = zF(1,1,2;-z)$$

$$e^z = lim_{b\longmapsto 1}F(1,b,-1;\tfrac{z}{b})$$

به آسانی می‌توان نشان داد که اگر$(Rec > Reb > 0)$ آنگاه :

$$\frac{(b,k)}{(c,k)} = \frac{B(b+k,c-b)}{B(b,c-b)} = \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 (1-t)^{a-b-1}t^{b-k-1}dt$$

که در آن $B(.,.)$ تابع بتا می باشد.

در نتیجه:

$$F(a,b,c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 (1-t)^{c-b-1}t^{b-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,k)}{k!}(tz)^k dt$$

حال با توجه به اینکه $\frac{1}{(1-tz)^a} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a,k)}{k!}(tz)^k$ نتیجه می‌شود که اگر $(Rec > Reb > 0)$ آنگاه فرمول انتگرال زیر راخواهیم داشت :

$$F(a,b,c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 (1-t)^{c-b-1}t^{b-1}(1-tz)^{-a}dt = \int_0^1 (1-tz)^{-a}d\mu(t) \qquad (1.3)$$

که در آن t^{b-1} $(1-t)^{c-b-1}$ $d\mu(t) = \frac{1}{B(b,c-b)}$ یک اندازه مثبت روی $[0,1]$ می باشد.

قضیه ۱۴.۱.۱ (گاوس):

فرض کنید a,b,c اعداد مختلطی باشند که $(c \neq 0,-1,-2,...)$, $(c-a-b > 0)$ در این

صورت:

$$F(a,b,c;1) = \frac{\Gamma(c)\ \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\ \Gamma(c-b)}$$

برهان : با میل دادن $|z| \longmapsto 1^-$ در رابطهٔ فوق خواهیم داشت:

$$F(a,b,c;1) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 (1-t)^{c-a-b-1}\ t^{b-1} dt = \frac{B(c,c-b-a)}{B(b,c-b)}$$

که در آن $b > 0$ و $(c-a-b) > 0$.

با جایگذاری فرمول $B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ برای $(m,n > 0)$ در عبارت فوق خواهیم داشت:

$$F(a,b,c;1) = \frac{\Gamma(c)\ \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\ \Gamma(c-b)} \qquad (1.4)$$

■

تذکر ۱۵.۱.۱ : اگر $a = -n$، (n یک عدد صحیح مثبت است)، آنگاه خواهیم داشت:

$$\frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-b)} = (c-b,n) \quad ; \qquad \Gamma(c-a)\ \Gamma(c) = (c,n)$$

بنابراین از قضیه گاوس ، قضیه واندرموند که به صورت زیر است بدست می آید:

$$F(-n,b,c;1) = \frac{(c-b,n)}{(c,n)}$$

با جایگذاری این فرمول در عبارت (۱.۳) داریم:

$$F(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt \qquad (1.5)$$

که عبارت (۱.۵) به عبارت انتگرالی اویلر[5] مشهور است.

[5] Euller

در اینجا برخی از خواص تابع فوق‌هندسی رابه اختصار بیان می‌کنیم.

لم ۱۶.۱.۱ برای پارامترهای مختلط a, b, c که $(c \neq 0, -1, -2, \ldots)$ داریم:

$$F(a,b,c;z) = F(b,a,c;z) \tag{1}$$

$$F(a,b,c;z) = (1-z)^{-a}F(a,c-b;c;\tfrac{z}{z-1}) \tag{2}$$

$$(a+1)F(1,a;a+1;z) = (a+1) + azF(1,a+1;a+2;z) \tag{3}$$

$$F(a,1,1;z) = (1-z)^{-a} \tag{4}$$

$$F(a,b,c;z) = (1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;z) \tag{5}$$

$$cF'(a,b,c;z) = ab\,F(a+1,b+1;c+1;z) \tag{6}$$

$$F(a,b,a+1;z) = (1-z)F(a+1,b+1;a+b+1;z) \tag{7}$$

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{sin\pi a} \tag{8}$$

$$2^{a-2}\Gamma(\tfrac{1-a}{2}) = \Gamma(1-\tfrac{a}{2}) \tag{9}$$

برهان : (مرجع [۸] قضیه[۱.۸.۲]). ■

فصل ۲

معادلات مدولار تعمیم یافته

۱.۲ مفاهیم اساسی معادلات مدولار تعمیم یافته

در سال ۱۹۹۵، برنت [۱] و بارگاوا[۲] و گاروان [۳]، مقالهٔ مهمی را از دست نوشته‌های رومانجوآ[۴]، در مورد معادلات مدولار تعمیم یافته ارائه دادند که در زیر به آن می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۲ معادلات مدولار تعمیم یافته با نشان $\frac{1}{a}$ و درجهٔ P عبارتست از :

$$\frac{F(a,1-a,1;1-s^2)}{F(a,1-a,1;s^2)} = P\frac{F(a,1-a,1;1-r^2)}{F(a,1-a,1;r^2)} \quad ; \quad (0<r<1, 0<s<1, 0<a<1) \qquad (2.1)$$

که در آن F یک تابع فوق هندسی و P یک عدد صحیح می‌باشد.

منظور از تعمیم یافته عبارتست از اینکه پارامتر $a \in (0, 1)$ به صورت دلخواه می‌باشد. در مثالهای کلاسیک و قدیمی، $(a = \frac{1}{2})$ و P را یک عدد صحیح فرض می‌کردند.

---

[۱] Berndet

[۲] Bhargava

[۳] Garvan

[۴] Ramanujan

تذکر ۲.۱.۲ می توان معادلات مدولار را بفرم نسبتاً کوتاه معرفی نمود؛ برای این منظور اگر طرفین رابطهٔ (۲.۱) را در $\frac{\pi}{2sin(\pi\alpha)}$ ضرب کنیم داریم :

$$\frac{\pi}{2sin(\pi\alpha)}\frac{F(a,1-a,1;1-s^2)}{F(a,1-a,1;s^2)} = P\frac{\pi}{2sin(\pi\alpha)}\frac{F(a,1-a,1;1-r^2)}{F(a,1-a,1;r^2)} \qquad (۲.۲)$$

حال تابع $(0,\infty)\longrightarrow(0,1):\mu_a$ را که یک تابع صعودی و هومئومورفیسم است به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\mu_a(r) = \frac{\pi}{2sin(\pi\alpha)}\frac{F(a,1-a,1;1-r^2)}{F(a,1-a,1;r^2)}$$

بنابر رابطهٔ (۲,۲) خواهیم داشت:

$$\mu_a(s) = P\mu_a(r) \qquad (۲.۳)$$

چون $\mu_a(r)$ هومئومورفیسم است لذا دارای معکوس پیوسته می‌باشد، پس با ترکیب طرفین تساوی (۲.۳) با μ_a^{-1} داریم:

$$s=\varphi_k^a(r)=\mu_a^{-1}\left(\frac{\mu_a(r)}{k}\right) ,\left(P = \frac{1}{k}\right)$$

که $\varphi_k^a(r)$ را یک تابع مدولار با نشان $\frac{1}{a}$ و درجهٔ $(P=\frac{1}{k})$ می‌نامند.

تذکر ۳.۱.۲ در معادلات مدولار تعمیم یافته از نمادگذاری رومانجو آ استفاده می کنیم:

$$\alpha\equiv r^2 \qquad , \qquad \beta\equiv\varphi^a_{\frac{1}{P}}(r^2)$$

برای پارامتر $k=\frac{1}{p}$ با اعداد صحیح مثبت p، تابع $\varphi_k^a(r)$ در برخی از اتحادهای

جبری صدق می‌کند که ما در ذیل به برخی از آنها اشاره می‌کنیم.

قضیه ۴.۱.۲ اگر β با درجهٔ ۲ و نشان ۳ باشد، یعنی بازای $a = \frac{1}{3}$ و $\alpha = r^2$ و $\beta \equiv \varphi^a_{\frac{1}{2}}(r^2)$ داریم:

$$(\alpha\beta)^{\frac{1}{3}} + \{(1-\alpha)(1-\beta)\}^{\frac{1}{3}} = 1$$

برهان : (مرجع [٦] قضیه[۷.۱]). ■

قضیه ۵.۱.۲ اگر β با درجهٔ ۵ باشد به‌ازای $a = \frac{1}{3}$ و $\alpha = r^2$ و $\beta = \varphi^a_{\frac{1}{5}}(r^2)$ داریم:

$$(\alpha\beta)^{\frac{1}{3}} + \{(1-\alpha)(1-\beta)\}^{\frac{1}{3}} + 3\{\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)\}^{\frac{1}{6}} = 1$$

برهان : (مرجع [٦] قضیه[۷.٦]). ■

قضیه ٦.۱.۲ اگر β با درجهٔ ۱۱ باشد به‌ازای $a = \frac{1}{3}$ و $\alpha = r^2$ و $\beta = \varphi^a_{\frac{1}{11}}(r^2)$ داریم:

$$(\alpha\beta)^{\frac{1}{3}}+\{(1-\alpha)(1-\beta)\}^{\frac{1}{3}}+6\{\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)\}^{\frac{1}{6}}+$$

$$3\sqrt{3}\{\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)\}^{\frac{1}{12}}\{(\alpha\beta)^{\frac{1}{6}}+\{(1-\alpha)(1-\beta)\}^{\frac{1}{6}}\} = 1$$

برهان : (مرجع [٦] قضیه[۷.۸]). ■

قضایای ۴.۱.۲ و ٦.۱.۲ شگفت‌انگیز هستند زیرا آنها اتحادهای جبری را برای توابع مدولار فراهم می‌سازند که خود این اتحادها بر حسب تابع $\mu_a(r)$ بیان شده‌اند. این یک مسالهٔ باز نشده است که کدامیک از معادلات مدولار را می‌توان بصورت جبری بر حسب توابع مدولار بیان نمود.

۱.۱.۲ انتگرالهای بیضوی تعمیم یافته

تعریف ۷.۱.۲ برای $r \in (0,1)$ و $a \in (0,1)$، انتگرالهای بیضوی تعمیم یافته را با $k_a(r)$ و $\varepsilon_a(r)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$k_a = k_a(r) \equiv \frac{1}{2}\pi F(a, 1-a, 1; r^2)$$

$$k'_a = k'_a(r) = k_a(r') \equiv \frac{\pi}{2} F(a, 1-a, 1; r'^2) \qquad ; r' = \sqrt{1-r^2} \qquad (2.4)$$

$$k_a(0) = \frac{\pi}{2} \qquad ; \qquad k_a(1) = \infty$$

و

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a(r) \equiv \frac{\pi}{2} F(a-1, 1-a, 1; r^2)$$

$$\varepsilon'_a = \varepsilon'_a(r) = \varepsilon_a(r') \equiv \frac{\pi}{2} F(a-1, 1-a, 1; r'^2) \qquad ; r' = \sqrt{1-r^2} \qquad (2.5)$$

$$\varepsilon_a(0) = \frac{\pi}{2} \qquad ; \qquad \varepsilon_a(1) = \frac{sin(\pi a)}{2(1-a)}$$

تذکر ۸.۱.۲ در ادامه خواهیم دید که κ_a روی $(0,1)$ صعودی و ε_a روی $(0,1)$ نزولی است.

حال با توجه به مفاهیم κ_a, ε_a به بیان انتگرالهای بیضوی کامل نوع اول و نوع دوم می‌پردازیم:

در حساب دیفرانسیل و انتگرال، انتگرالهای بیضوی اصولاً در ارتباط با مساله طول کمان بیضی مطرح می‌شوند. این انتگرالها برای اولین بار توسط جیو لیو فاگنانو[5] ولئونهارد اویلر[6] بررسی گردیدند. ریاضیات نوین، انتگرال بیضوی را به عنوان هر تابع f که بتواند به شکل زیر بیان شود، تعریف می‌کند:

$$f(x) = \int_c^x R(t, p(t))dt$$

که در آن R تابع گویای دو متغیره، p ریشهٔ دوم یک چندجمله‌ای درجهٔ سه یا چهار بدون ریشه‌های تکراری و c ثابت است.

[5] (Giulio Fagnano)

[6] (Leonhard Euler)