بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه پیام نور واحد شیراز
مجتمع علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

بررسی ایده آلهای حلقه های منظم

استاد راهنما:
دکتر احمد خاکساری

پژوهش و نگارش:
اشرف السادات هاشم پور لاری

شهریور ۸۶

تقديم به :

آنانكه مرا كلمه اي آموختند

ریاضیات نا زیبا در جهان پایدار نیست.

«هیلبرت»

تقدیر و تشکر

در این جا بر خود لازم می دانم از کلیه کسانی که مرا در انجام این پایان نامه یاری و همراهی کرده اند، تشکر نمایم .

در ابتدا از استاد گرامی، جناب آقای دکتر احمد خاکساری تشکر می نمایم.

وظیفه خود می دانم که از تمامی اعضای خانواده ام، مادر مهربانم، برادران و خواهران عزیزم که همواره قوت قلبی برای ادامه راه بوده اند، تشکری ویژه و صمیمانه داشته باشم .

چکیده

هدف از این پایان نامه بررسی در مورد ایده آلهای حلقه های منظم است و چندین مشخصه را برای اینکه ایده آلها در شرط مقایسه پذیری صدق کنند ، ارائه می دهیم . به علاوه نشان می دهیم که اگر I یک ایده آل مینیمال دو طرفه از حلقه منظم R باشد ، آنگاه I در شرط مقایسه پذیری صدق می کند ، اگر و تنها اگر ، جدایی پذیر باشد .

به علاوه برای ایده آلهای با بعد پایای یک ثابت می کنیم که مسأله رز یک جواب دارد . و این نتایج متناظر را بر روی حلقه های واحد – منظم و واحد – منظم یکطرفه تعمیم می دهیم .

«فهرست مندرجات»

فصل اول

مقدمه

تعریف ۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه شرکت پذیر با عنصر همانی باشد . حلقه R را یک حلقه منظم می نامیم ، اگر برای هر $x \in R$ ، عضوی مانند $y \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $x = xyx$.

تعریف ۲.۱.حلقه R را واحد – منظم می نامیم ، اگر برای هر $x \in R$ یک عضو وارون پذیر مانند u وجود داشته باشد که ، $x = xux$.

تعریف ۳.۱. حلقه R واحد – منظم یکطرفه است اگر ، برای هر $x \in R$ یک عضو وارون پذیر راست یا چپ مانند u وجود داشته باشد که ، $x = xux$.

تعریف ۴.۱. فرض کنیم $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ یک مجموعه دار از زیر مدولهای ساده M باشد . اگر M جمع مستقیم از این مجموعه باشد آنگاه $M = \bigoplus_{A} T_\alpha$ یک تجزیه نیمه ساده از M است .

یک مدول M نیمه ساده گفته می شود اگر یک تجزیه نیمه ساده داشته باشد .

هدف اصلی این پایان نامه درک مقایسه پذیری برای حلقه های منظم به ایده آلها بر روی حلقه های منظم است .

در فصل دوم ما چندین مشخصه را برای مقایسه پذیری ایده آلها ارائه می دهیم در فصل سوم نشان داده می شود که اگر I یک ایده آل مینیمال دو طرفه از حلقه منظم R باشد ، آنگاه ، I در شرط مقایسه پذیری صدق می کند اگر و تنها اگر جدایی پذیر باشد .

این نتایج متناظر بر روی حلقه های واحد – منظم یکطرفه تعمیم پیدا می کنند .

در فصل چهارم شرط بعد پایای یک را برای ایده آلها در نظر می گیریم و نشان می دهیم که مسأله رز برای ایده آلها با بعد پایای یک ، یک جواب دارد .

در سراسر این پایان نامه، حلقه ها شرکت پذیر با عضو همانی هستند .

علامت $U<(R)$ مجموعه همه یکه های یکطرفه از حلقه R را نشان می دهد .

برای R – مدول M و N ، $M \lesssim N$ نشان می دهد که M با یک زیر مدول N یکریخت است .

و $M \alpha N$ نشان می دهد که $M \lesssim nN$ برای یک عدد $n \geq ۱$.

فصل دوم

مقایسه پذیری برای ایده آلها

تعریف ۱.۲.یک حلقه در اصل مقایسه پذیری صدق می کند اگر برای R – مدول های راست پروژکتیو متناهیاً تولید شده P و Q داشته باشیم $Q \lesssim P$ یا $P \lesssim Q$.

هر حلقه منظم ، واحد منظم یکطرفه است اگر در اصل مقایسه پذیری صدق کند .

اثبات : رجوع کنید به [۵]

با استفاده از این حقیقت ما مفهوم مقایسه پذیری را برای حلقه های منظم ، به ایده آلهای حلقه های منظم تعمیم می دهیم .

تعریف ۲.۲.فرض کنید R یک حلقه منظم باشد در این صورت گوییم که ایده آل دو طرفه I از حلقه R در شرط مقایسه پذیری صدق می کند ، اگر برای هر $x \in 1 + I$ عنصر $u \in U<(R)$ وجود داشته باشد ، به طوریکه $x = xux$.

تعریف ۳.۲.یک ایده آل دو طرفه I از حلقه R دارای بعد پایای یک می باشد ، به شرط اینکه $ax+b=1$ و $a\in 1+I$ و $b\in R$ و x ، نتیجه دهد که $y\in R$ وجود دارد به طوریکه

$a+by\in U(R)$.

که $U(R)$ مجموعه یکه های دو طرفه R می باشد .

به وضوح مقایسه پذیری برای ایده آلها یک تعمیم از این مفهوم می باشد .

قضیه ۴.۲.فرض می کنیم که A یک R– مدول راست باشد و $Q=End_R\,A$ ، اگر A نیمه ساده باشد ، آنگاه Q یک حلقه منظم است .

اثبات : رجوع کنید به [۱]

تعریف ۵.۲. مدول A را مستقیماً متناهی ، می نامیم اگر و تنها اگر $B=0$ تنها مدولی باشد که $A\oplus B\cong A$.

اگر مدول A مستقیماً متناهی نباشد ، آنگاه $B\neq 0$ می باشد .

تعریف ۶.۲. R- مدول راست A ، مستقیماً متناهی است ، اگر و تنها اگر برای هر $x, y\in End_R(A)$ ، $xy=1$ ، نتیجه دهد که $yx=1$.

تعریف ۷.۲.یک حلقه R را مستقیماً متناهی می نامیم اگر برای هر $x, y\in R$ ، $xy=1$ نتیجه دهد که $xy=1$.

قضیه ۸.۲. اگر حلقه ای واحد – منظم باشد ، آنگاه مستقیماً متناهی می باشد .

اثبات : رجوع کنید به [۵]

مثال ۹.۲. فرض کنیم که D یک حلقه تقسیم و V یک فضای برداری با بعد نامتناهی بر روی D باشد و $R=End_DV$ و $S= End (G\oplus H)$ باشند . که G جمع مستقیم از کپیً های Zp و H جمع مستقیم از کپی های Zq می باشد که p و q اعداد اول جدا از هم می باشند . از آنجا که V نیمه ساده است پس R یک حلقه منظم می باشد و از آنجا که G و H نیمه ساده هستند پس $End\ G$ و $End\ H$و در نتیجه $End (G\oplus H)$ منظم می باشد . پس $T = R \oplus S$ حلقه منظم می باشد . و $End (G\oplus H) = End\ G + End\ H$ و از آنجا که $End\ G$ و $End\ H$ هیچکدام مستقیماً متناهی نیستند . رجوع کنید به [۵] پس طبق قضیه ۸.۲ ، S واحد – منظم یکطرفه نیست . پس $T = R \oplus S$ واحد – منظم یکطرفه نیست .

در حالیکه T شامل یک آیده آل می باشد که در شرط مقایسه پذیری صدق می کند .

حال ثابت می کنیم که $(R , ۰)$ یک ایده آل دو طرفه می باشد که در شرط مقایسه پذیری صدق می کند . فرض کنیم $x\in ۱ + (R ,۰)$ پس

$(r , ۱) = (r ,۰) + (۱ , ۱) = x$ و از آنجا که R واحد- منظم است پس $r = rur$ که u عضویکه است پس $(r , ۱) = (r , ۱) (u , ۱) (r , ۱)$.

لم ۱۰.۲. فرض کنیم

$ax + b =۱$ و $a , x , b\in R$ ، آنگاه گزاره های زیر برقرارند :

(۱) اگر $u (a + by) = ۱$ آنگاه

$$[x+(1-xy)ub][a+y(1-xa)]=1$$

اگر $(a+by)u=1$ آنگاه

$$[a+y(1-xa)][x+(1-xy)ub]=1$$

(۲) اگر $(x+zb)v=1$ آنگاه

$$[x+(1-xa)z][a+bv(1-za)]=1$$

اگر $v(x+zb)=1$ آنگاه

$$[a+bv(1-za)][x+(1-xa)z]=1$$

اثبات : رجوع کنید به [۱]

قضیه ۱۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه و I یک ایده آل دو طرفه از R باشد ، آنگاه شرایط زیر با هم معادلند :

(۱) I در شرط مقایسه پذیری صدق می کند .

(۲) هرگاه $ax+b=1$ با $a\in 1+I$ و $x,b\in R$ ، آنگاه $y\in R$ وجود دارد به طوریکه

$$a+by\in U<(R).$$

اثبات :

(۲) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنیم $ax+b=1$ و $a\in 1+I$ و $x,b\in R$ ، از آنجا که I در شرط مقایسه پذیری صدق می کند $u\in U<(R)$ وجود دارد به طوریکه $a=aua$. قرار دهید $ua=e$.

بنابراین $uax+ub=u$ پس $ex+ub=u$ در نتیجه

$$e(x+ub)+(1-e)ub=u.$$

از آنجا که حلقهR منظم است ما می توانیم $c\in R$ را پیدا کنیم که

$$(1-e)ub=(1-e)ubc(1-e)ub$$

پس

$$e(x+ub)+(1-e)ubc(1-e)ub=u$$

فرض کنیم

$$f=(1-e)ubc(1-e)$$

پس

$$e(x+ub)+fub=u$$

لذا $ex+eub+fub=u$ و از آنجا که $fe=0$ در نتیجه

$$eex+fex+eub+fub=u$$

در نتیجه

$$(e+f)(ex+ub)=u$$

بنابراین

$$(e+f)u=u$$

لذا

$$u[a+bc(1-e)(1+eubc(1-e))](1-eubc(1-e))u$$

$$=[ua+ubc(1-e)+ubc(1-e)eubc(1-e)](1-eubc(1-e))u$$

از آنجا که $(1-e)e=0$ می باشد پس

$$=[(e+ubc(1-e)(1-eubc(1-e))]u$$

$$=[e+ubc(1-e)-eubc(1-e)-ubc(1-e)eubc(1-e)]u$$

$$=[e(1-eubc(1-e))+ubc(1-e)]u$$

$$=[e-eubc(1-e)+ubc(1-e)]u$$

$$=[e+(1-e)ubc(1-e)]u$$

$$=(e+f)u=u$$

پس

$$a+bc(1-e)(1+eubc(1-e))\in U<(R)$$

زیرا $u\in U<(R)$

قرار می دهیم

$$y=c(1-e)(1+eubc(1-e))$$

بنابراین

$$a + by \in U^{<}(R)$$

و این اثبات را تمام می کند.

(۱) $\Rightarrow$ (۲) فرض کنیم $x \in 1 + I$ از آنجا که R منظم است یک $y \in R$ وجود دارد به طوریکه

$x = xyx$ از اینکه $xy + (1 - xy) = 1$ و $x \in 1 + I$ لذا $s \in R$ وجود دارد به طوریکه

$$x + (1 - xy)s \in U^{<}(R)$$

از لم قبل $t \in R$ وجود دارد به طوریکه

$$y + t(1 - xy) = u \in U^{<}(R)$$

در نتیجه

$$x = xyx = x(y + t(1 - xy))x = xyx$$

و این اثبات را تمام می کند .

نتیجه ۱۲.۲. فرض کنید R یک حلقه منظم و I یک ایده آل دو طرفه از حلقه R باشد ، آنگاه شرایط زیر با هم معادلند :

(۱) I در شرط مقایسه پذیری صدق می کند .

(۲) هر عضوی در $I + 1$ حاصلضرب یک عضو خود توان و یک عضو وارون پذیر یکطرفه از R می باشد .

اثبات :

(۲) $\Rightarrow$ (۱) فرض کنیم $x \in 1 + I$ در این صورت برای یک $y \in R$ داریم $x = xyx$ بوضوح $xy + (1 - xy) = 1$ با استفاده از قضیه ۱۱.۲ ، $s \in R$ وجود دارد بطوریکه

$$.x + (1 - xy)s = u \in U^{<}(R)$$

بنابراین

$$. x = xyx = xy (x + (١ - xy) s) = xyu$$

که $xy = (xy)^{٢}$.

(١) $\Rightarrow$ (٢) فرض کنیم $ax + b = ١$ و $a \in ١ + I$ و $x , b \in R$ ، فرض کنیم $a = eu$ که $e = e^{٢} \in R$ و $u \in U < (R)$ پس $eux + b = ١$ و لذا

$$a + b (١ - e) u = eu + b (١ - e) u = (e + b (١ - e)) u$$

$$= (١ - ١ + e + b (١ - e)) u = (١ - (١ - b) (١ - e))u$$

$$= (١ - eux (١ - e)) u$$

$$= (١ - (١ - e) + b (١ - e)) u$$

$$= (١ + eux (١ -e))^{-١} \ u \in U < (R)$$

با استفاده از قضیه ١١.٢ ، I در شرط مقایسه پذیری صدق می کند .

نتیجه ١٣.٢. فرض کنید R یک حلقه منظم باشد و I یک ایده آل دو طرفه از R باشد آنگاه شرایط زیر با هم معادلند :

(١) I در شرط مقایسه پذیری صدق می کند .

(٢) برای هر $x \in ١ + I$ ، $u \in U < (R)$ وجود دارد به طوریکه ux یک عضو خودتوان از R است.

اثبات :

(٢) $\Rightarrow$ (١) برای هر $x \in ١ + I$ یک $u \in U < (R)$ وجود دارد که $x = xux$ پس $ux = uxux$ بنابراین $ux = (ux)^{٢}$.

(۱) $\Rightarrow$ (۲) فرض کنیم $ax + b = 1$ و $a \in 1 + I$ و $x , b \in R$

فرض کنیم $ua = e$ یک عضو خود توان برای $u \in U < (R)$ باشد پس $ex + ub = u$. بنابراین

$$e (x + ub) + (1 - e) ub = u$$

از آنجا که برای یک $c \in R$ ،

$$(1 - e) ub = (1 - e) ubc (1 - e) ub.$$

فرض کنیم

$$g = (1 - e) ubc (1 - e).$$

پس ما داریم :

$$u [a + b (1 - e) (1 + eubc (1 - e))] (1 - eubc (1 - e)) u =$$

$$[e (1 - eubc (1 - e) + ubc (1 - e))] u =$$

$$(e + g) u = u$$

حال قرار می دهیم

$$y = c (1 - e) (1 + eubc (1 - e)).$$

پس $a + by \in U < (R)$ با استفاده از قضیه ۱۱.۲ ما نتیجه می گیریم که I در شرط مقایسه پذیری صدق می کند .

گزاره ۲. ۱۴ .فرض کنید R یک حلقه منظم باشد و I یک ایده آل دو طرفه از R باشد. آنگاه عبارتهای زیر با هم معادلند :

(۱) I در شرط مقایسه پذیری صدق می کند .

(۲) هرگاه $aR + bR = R$ و $a\in 1 + I$ و $b\in R$ آنگاه $y\in R$ وجود دارد بطوری که

$a + by\in U < (R)$.

اثبات :

(۲)⇐ (۱) فرض کنیم $aR + bR = R$ و $a\in 1 + I$ و $b \in R$ ، در این صورت برای

$x , y\in R$ داریم $ax + by = 1$

پس طبق قضیه ۲. ۱۱ ، $z\in R$ وجود دارد بطوری که $a + byz\in U < (R)$ ، و این اثبات را تمام می کند .

(۱) ⇐ (۲) : فرض کنیم $ax + b =1$ و $a\in 1 + I$ و $x , b\in R$ ما داریم $aR + bR = R$ با استفاده از فرض برای $y\in R$ داریم $a + by\in U < (R)$ پس با استفاده از قضیه ۱۱.۲ ، I در شرط مقایسه پذیری صدق می کند .

تعریف ۱۵.۲. حلقه $(S ,*)$ را حلقه متضاد $(R , \cdot)$ می نامیم در صورتی که $a*b = b. a$ تعریف کنیم و آن را با R^{OP} نشان می دهیم .

نتیجه ۱۶.۲ . فرض کنید R یک حلقه منظم باشد و I یک ایده آل دو طرفه R باشد. آنگاه شرایط زیر با هم معادلند :

(۱) I در شرط مقایسه پذیری صدق می کند .

(۲) هرگاه $Ra + Rb = R$ و $a \in R$ و $b \in 1 + I$ آنگاه $y \in R$ وجود دارد به طوریکه

$$a + yb \in U^{<}(R)$$

(۳) هرگاه $Ra + Rb = R$ و $a \in 1 + I$ و $b \in R$ آنگاه $y \in R$ وجود دارد به طوریکه

$$a + yb \in U^{<}(R)$$

اثبات : بوضوح I^{op} یک ایده آل دو طرفه از حلقه متضاد (R^{op}) از R است . با استفاده از تعریف ۲.۲ ، I در شرط مقایسه پذیری صدق می کند اگر و تنها اگر R^{op} در شرط مقایسه پذیری صدق کند . زیرا

$$x = x \cdot u \cdot x = (u * x) \cdot x = x * u * x$$

با استفاده از قضیه ۳.۲ و ۶.۲ در مورد I^{op} از حلقه R^{op} اثبات کامل می شود .

گزاره ۱۷.۲. اگر R یک حلقه منظم باشد و I یک ایده آل دو طرفه از R باشد . آنگاه شرایط زیر با هم معادلند :

(۱) I به عنوان یک ایده آل از R در شرط مقایسه پذیری صدق می کند .

(۲) برای هر $e = e^2 \in R$ ، eIe به عنوان یک ایده آل از eRe در شرط مقایسه پذیری صدق می کند .

اثبات:

(۱) $\Rightarrow$ (۲) با در نظر گرفتن $e = 1$ اثبات کامل می شود .

(۲) $\Rightarrow$ (۱) فرض کنیم $e = e^2 \in R$ و $ax + b = e$ و $a \in e + eIe$ و $x , b \in eRe$ ، ما داریم

$$(a + 1 - e)(x + 1 - e) + b$$

$$= ax + a - ae + x + 1 - e - ex - e + e^2 + b$$