بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين الرحمن الرحيم مالك يوم الدين إياك نعبد وإياك نستعين اهدنا الصراط المستقيم صراط الذين أنعمت عليهم غير المغضوب عليهم ولا الضالين

دانشگاه بوعلی سینا

دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض
گرایش جبر

عنوان:

طول کلاس‌های تزویج گروه های متناهی و تاثیر آن بر ساختار این گروه ها

استاد راهنما:
دکتر اشرف دانشخواه

پژوهشگر:
حسن رضا مرآتی

زمستان ۱۳۸۶

دانشگاه بوعلی سینا

دانشکده علوم

گروه ریاضی

جلسه دفاع از پایان‌نامه آقای حسن رضا مرآتی
کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش جبر

تحت عنوان:
طول کلاس‌های تزویج گروه‌های متناهی و تأثیر آن بر ساختار این گروه‌ها

The length of conjugacy classes of finite groups and its influence on the structure of these groups

به ارزش ۴ واحد در روز سه شنبه مورخ ۸۶/۱۱/۹ ساعت ۱۲-۱۰ در محل آمفی تئاتر(۱) و با حضور اعضای هیأت داوران زیر برگزارگردید و با نمره...۱۹/۵...درجه.....عالی........ ارزیابی شد.

ترکیب اعضای هیأت داوران:

ردیف	سمت در هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی ـ گروه/ دانشکده/ دانشگاه	محل امضاء
۱.	استاد راهنما	دکتر اشرف دانشخواه	استادیار- ریاضی- علوم- بوعلی سینا	
۲.	استاد مدعو	دکتر زهره مستقیم	استادیار- ریاضی- ریاضی- علم و صنعت	
۳.	داور داخلی	دکتر کریم سامعی	دانشیار- ریاضی- علوم- بوعلی سینا	
٤.				
٥.				
٦.				
٧.				

به پاس همه زحماتی که

پدر و مادر عزیزم

در این راه کشیده‌اند پایان نامه حاضر را تقدیم ایشان می‌کنم.

قدردانی

سپاس و ستایش خداوند زیبا آفرین راست.

اینک که با عنایت پروردگار توفیق تدوین این مجموعه را یافته‌ام، لازم است از همه عزیزانی که در دوران تحصیل مرا یاری کردند و از راهنمایی‌هایشان بهره‌مند بودم، سپاس‌گزاری کنم.

از استاد راهنمای بزرگوارم سرکار خانم دکتر اشرف دانشخواه، داور خارجی‌ام سرکار خانم دکتر زهره مستقیم و داور داخلی و استاد عزیزم دکتر کریم سامعی که همگی با دانش عمیق و نگاه ریزبینانه مرا راهنمایی کردند، تشکر کرده و بابت درس‌های علمی و اخلاقی که فرا گرفته‌ام ایشان را ارج می‌نهم.

از اساتید گروه ریاضی دانشگاه بوعلی سینا که فراوان به آن‌ها زحمت دادم و افتخار بزرگم شاگردی در کلاس ایشان بوده است، قدردانی می‌کنم.

یاری و تلاش پدر و مادر و برادرانم در این راه فراموش نشدنی است.

در پایان از همه دوستانم، مونسان روزهای خوشی و سختی‌ام، نهایت امتنان را دارم و از خدای مهربان موفقیت و نیکبختی را برای آن‌ها خواستارم.

نام خانوادگی : مرآتی	**نام :** حسن رضا

عنوان پایان نامه : طول کلاس‌های تزویج گروه‌های متناهی و تأثیر آن بر ساختار این گروه‌ها
استاد راهنما : دکتر اشرف دانشخواه

مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد	**رشته :** ریاضی	**گرایش :** جبر	**دانشگاه :** بوعلی سینا
دانشکده : علوم پایه	**تاریخ دفاعیه :** ۸۶/۱۱/۹		**تعداد صفحات :** ۸۳

واژه‌های کلیدی: کلاس‌های تزویج، گروه‌های تجزیه‌پذیر، گروه‌های شبه نرمال و حاصل ضرب‌های جابه‌جا پذیر.

چکیده :

در این پایان نامه تاثیر طول کلاس تزویج گروههای متناهی را روی ساختار این گروهها تحقیق و بررسی کردیم و به شرط لازم و کافی برای اینکه گروه G مساوی با $O_p(G)\times O_{p'}(G)$ باشد، دست یافتیم. ما همچنین ثابت کردیم اگر G یک گروه متناهی باشد و p یک شمارنده اول $|G|$ باشد به طوری که اگر q شمارنده اول دیگری از $|G|$ باشد، q، $p-1$ را نشمارد و فرض کنیم طول هیچ کلاس تزویجی از عناصر گروه G بر p^2 بخش پذیر نباشد، آنگاه G گروهی حلپذیر و p -پوچتوان است.

یکی دیگر از سوالاتی که تحت مطالعه قرار گرفت این بود که وقتی G یک گروه متناهی باشد و برای هر عنصر x از G، $|x^G|$ خالی از مربع باشد، آنگاه G زبرحلپذیر است.

فهرست مندرجات

مقدمه

یک گروه را تجزیه پذیر گوییم هر گاه بتوان آن را به صورت حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های غیربدیهی‌اش نوشت. در غیر این صورت این گروه را تجزیه ناپذیر می‌نامیم. از آنجا که ساختار زیرگروه‌های یک گروه می‌تواند تاثیر مهمی بر ساختار گروه داشته باشد، به ویژه هر گاه G تجزیه پذیر باشد برخی از خواص گروه مستقیماً به خواص زیرگروه‌هایش مربوط می‌شوند، لذا مطالعه گروه‌های تجزیه پذیر نقش مهمی در نظریه گروه‌های متناهی ایفا می‌کند. از طرفی می‌دانیم همواره عدد یا اعداد اولی هستند که مرتبه یک گروه متناهی و یا مرتبه کلاس تزویج عناصر (غیربدیهی) را بشمارند. در این پایان نامه تلاش شده تا با قرار دادن کمترین شرط ممکن روی این شمارنده‌ها به ویژگی‌های مهمی از گروه پی ببریم. در قسمت اول ثابت می‌کنیم که اگر p عددی اول باشد، می‌توان تحت شرایطی گروه را به حاصل ضرب مستقیم pـ عناصر و p'ـ عناصرش تجزیه کرد. یعنی به دو گروه که در یکی همه عناصر از مرتبه توان های p باشند و دیگری عناصری که p مرتبه آنها را نمی‌شمارد.

در قسمت دوم نیز ثابت می‌کنیم با گذاشتن شرطی روی مرتبه کلاس تزویج برخی از عناصر یک گروه، آن گروه زبرحلپذیر می‌شود. در واقع اگر در یک گروه متناهی، عناصر از مرتبه توانی از یک عدد اول، کلاس تزویج خالی از مربع داشته باشند، آن گروه زبرحلپذیر است.

در ضمن در این پایان نامه، گروه‌های پوچتوان و pـ پوچتوان، حلپذیر و زبرحلپذیر، گروه‌های

تجزیه پذیر و p - تجزیه پذیر، حاصل ضرب‌های دو به دو جابه‌جا پذیر و m جابه‌جا پذیر را بررسی کرده و برخی ویژگی‌هایشان را مورد بحث قرار دادیم و در بخشی از فصل دوم به فرمیشن و فرمیشن اشباع شده پرداختیم.

بئر [۱] [۴]، از جمله نخستین کسانی است که مباحثی بنیادی در این زمینه مطرح کرد. وی در سال ۱۹۵۳ مقاله جالبش را در مورد عناصری از گروه که مرتبه کلاس تزویج آن‌ها توانی از یک عدد اول است، مطرح کرد و سپس به بررسی گروه هایی پرداخت که در آن عناصر از مرتبه توانی از یک عدد اول اندیس با توانی از یک عدد اول دارند.

ویلانت [۲] در سال ۱۹۵۱ ثابت کرد که عناصری که مرتبه و اندیس آنها توانی از یک عدد اول مانند p است، حتماً در یک p - زیرگروه نرمال G قرار دارند.

برنساید [۳] نیز پیش از آن و در سال ۱۹۱۱ فقدان عناصر غیر بدیهی از مرتبه توانی از یک عدد اول را در گروه های ساده ثابت کرده بود.

کامینا [۴] [٦]، نیز از جمله کسانی است که در زمینه کلاس تزویج گروه های متناهی، مطالعات فراوانی انجام داد و مقالات مختلف و نظام‌مندی را در سال های ۱۹۷۲، ۱۹۷۳، ۱۹۷۴ و ۱۹۹۸ منتشر کرد و به روابطی بین طول کلاس تزویج و طبقه بندی گروه‌های بئر دست یافت که البته در این پایان نامه به بررسی آن‌ها پرداخته نشده است.

از جمله ریاضی‌دانانی که بیشترین و موثرترین مطالعات را در بحث فوق داشتند، چایلاگ [۵] و هرزوگ [٦] [۷] می‌باشند. این دو در مقاله مشهورشان در سال ۱۹۹۰ تحت عنوان طول کلاس

---

[۱] Baer
[۲] Wielandt
[۳] Burnside
[۴] Camina
[۵] Chillag
[٦] Herzog

تزویج گروه‌های متناهی، توانستند با قرار دادن شرایطی روی کلاس تزویج، گروه‌های زبرحلپذیر را مطالعه کنند.

ضمن اینکه پیش تر هرزوگ با همکاری استاوی [۷] در همین راستا مقالاتی منتشر کرده بود. در سال ۱۹۹۹، همکاری جان کاسی [۸] و یانمینگ وانگ [۹] [۸]، منجر به چاپ مقاله ای قوی در بحث طول کلاس تزویج گروه های متناهی شد. در سال ۲۰۰۱ نیز جان کاسی و پدرازا — آگوئیلرا [۱۰] [۵]، در مقاله خود تحت عنوان حاصل ضرب گروه‌های زبرحلپذیر متناهی، قضایایی را در مورد این گروه‌ها ثابت کرده و به نتایجی دست یافتند و ضمن معرفی حاصل ضرب‌های دو به دو جابه‌جا پذیر و m ـ جابه‌جا پذیر، با شرایطی روی گروه‌هایی با خواص فوق گروه‌های زبرحلپذیر و حلپذیر را بررسی کردند که در فصل دوم به مختصری از کارهای این ریاضی‌دانان اشاره شده است.

از جمله آخرین کارها در این زمینه مقاله سه ریاضی دان چینی به نام های اگزیاو لی لیو [۱۱]، و یانمینگ وانگ، و هواکیوان وی [۱۲] [۱۷] است که در سال ۲۰۰۵ و تحت عنوان نکاتی در مورد طول کلاس تزویج گروه‌های متناهی منتشر شد. لازم به ذکر است که این مقاله مرجع اصلی اینجانب می‌باشد. در ضمن در سراسر این پایان نامه منظور از گروه، گروه متناهی است.

---

[۷] Stavi
[۸] John Cossey
[۹] Yanming Wang
[۱۰] Pedraza-Aguilera
[۱۱] Xiaolei Liu
[۱۲] Huaquan Wei

فصل ۱

مقدمه‌ای بر نظریه گروه‌های متناهی

در این فصل مباحثی از نظریه گروه‌ها همراه با قضایا و تعاریف مورد نیاز را ارائه می‌کنیم

۱—۱ پیشنیازها

۱—۱ **تعریف.** فرض کنیم m یک عدد طبیعی بزرگ تر از یک باشد. در این صورت مجموعه همه اعداد طبیعی کم تر از m که نسبت به m اول اند را با $U(m)$ نمایش می‌دهیم. مجموعه $U(m)$ با عمل ضرب اعداد طبیعی به پیمانه m یک گروه آبلی تشکیل می‌دهد.

۱—۲ **نکته.** با مفروضات فوق داریم: $|U(m)| = \phi(m)$ جایی که در آن ϕ تابع اویلر [۱] است.

۱—۳ **قضیه.** فرض کنیم G یک گروه دوری غیربدیهی از مرتبه m باشد، در این صورت $Aut(G) \cong U(m)$.

اثبات. [۱، قضیه ۶—۵—۱]. ■

[۱] Euler

۱—۴ قضیه. به ازای هر عدد اول p، گروه $U(p)$ دوری از مرتبه $p-1$ است.

اثبات. [۱، قضیه ٦—۵—۳]. ■

۱—۵ تعریف. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت $\pi(G)$ عبارت است از مجموعه همه اعداد اولی که مرتبه G را می‌شمارند.

۱—٦ تعریف. عدد صحیح m را خالی از مربع گوییم، هر گاه هیچ عدد اولی موجود نباشد که مجذورش m را بشمارد. یعنی برای هر عدد اول p، $p^2 \nmid m$.

۱—۷ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. زیرگروه نرمال غیربدیهی H را زیرگروه نرمال مینیمال G گوییم، هر گاه H حاوی هیچ زیرگروه نرمال G به جز خود H و ۱ نباشد. به عبارت دیگر اگر $N \trianglelefteq G$ و $N \subseteq H$، آنگاه $N = H$ یا $N = 1$.

۱—۸ تعریف. در صورتی که زیرگروه نرمال مینیمال یک گروه منحصر به فرد باشد، آن را زیرگروه مینیمم نرمال آن گروه گوییم.

۱—۹ نکته. زیرگروه نرمال مینیمال هر گروه ساده متناهی G همان G است.

۱—۱۰ نکته. اگر G گروهی غیربدیهی باشد، دارای زیرگروه نرمال مینیمال است.

۱—۱۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه غیربدیهی و M زیرگروه سره‌ای از G باشد. M را زیرگروه ماکسیمال G نامیم هر گاه برای هر $M \leq H \leq G$ نتیجه شود که $H = G$ یا $H = M$.

۱—۱۲ نکته. گروه متناهی غیربدیهی G همواره دارای زیرگروه ماکسیمال است.

۱—۱۳ تعریف. فرض کنیم G یک گروه و H یک زیرگروه سره و نرمال در G باشد. گوییم H نرمال ماکسیمال است، اگر برای هر $L \trianglelefteq G$ که $H \leq L \leq G$ داشته باشیم $H = L$ یا $G = L$.

مثال ۱. A_3 زیرگروه نرمال مینیمال S_3 است. A_3 زیرگروه نرمال ماکسیمال S_3 نیز هست.

۱—۱۴ قضیه. فرض کنیم $K \trianglelefteq G$. آنگاه K یک زیرگروه ماکسیمال از G است اگر و تنها اگر $|\frac{G}{K}| = p$ که p عددی اول است.

اثبات. [۲۰، لم ۱۱—۲] ■

۱—۱۵ قضیه. اگر $H, K \leq G$ و $H \trianglelefteq G$، آنگاه $KH = H \vee K = HK$ که $H \vee K = < H \cup K >$.

اثبات. [۲۱، لم ۲—۲۵] ■

۱—۱۶ قضیه. اگر $A \trianglelefteq H$ و $B \trianglelefteq K$ آنگاه $A \times B \trianglelefteq H \times K$.

اثبات. [۲۱، قضیه ۲—۳۰] ■

۱—۱۷ قضیه. اگر $H, K \trianglelefteq G$، آنگاه $HK \trianglelefteq G$.

اثبات. برای هر $g \in G$ و $x \in HK$، $x = hk$ که $h \in H, k \in K$،

$$g^{-1}xg = g^{-1}hkg = g^{-1}h(gg^{-1})kg = (g^{-1}hg)(g^{-1}kg) = h_1k_1 \in HK$$

بنابراین $HK \trianglelefteq G$. ■

۱—۱۸ قضیه. (قاعده ددکیند[۲]) فرض کنیم A, B, C زیرگروه‌هایی از گروه G باشند که در آن $B \leq A$. در این صورت $A \cap (BC) = B(A \cap C)$.

اثبات. [۲۰، قضیه ۷—۳]. ■

۱—۱۹ تعریف. فرض کنیم G یک گروه متناهی و p عددی اول باشد و $|G| = p^m n$ که $(p, n) = 1$. در این صورت هر زیرگروه G از مرتبه p^m را یک p-زیرگروه سیلوی G می‌نامیم و مجموعه همه p-زیرگروه‌های سیلوی G را با $Syl_p(G)$ نمایش می‌دهیم. به علاوه تعداد p-سیلو زیرگروه‌های گروه G را با $n_p(G)$ نمایش می‌دهیم.

۱—۲۰ قضیه. فرض کنیم G یک گروه باشد و p شمارنده اولی از $|G|$ باشد. فرض کنیم $P \in Syl_p(G)$. در این صورت $n_p(G) = |G : N_G(P)|$.

اثبات. [۱، قضیه ۴—۱—۱۰]. ■

۱—۲۱ قضیه. اگر p - زیرگروه سیلوی G، منحصر به فرد باشد در G نرمال است.

اثبات. بنا به قضیه دوم سیلو، p - سیلو ها مزدوج اند. حال چون تعداد p - سیلو ها یکی است، پس p - سیلوی مذکور با مزدوج هایش برابر است. و در نتیجه در G نرمال است. ■

۱—۲۲ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد و $U \leq G$. در این صورت مرکزساز U در G که با $C_G(U)$ نشان داده می‌شود را چنین تعریف می‌کنیم: $\{g \in G | ug = gu,$ برای هر $u \in U\}$.

---

[۲] Dedekind's Rule

۱—۲۳ نکته. $C_G(G)$ را مرکز گروه G نامیم و آن را با $C(G)$ یا $Z(G)$ نمایش می‌دهیم.

۱—۲۴ تعریف. $N_G(H)=\{g\in G : g^{-1}Hg=H\}$. این زیرگروه بزرگ ترین زیرگروه G است که H در آن نرمال است و آن را نرمال ساز H در G می‌گوییم. به ویژه $H\trianglelefteq G$ اگر و تنها اگر $G=N_G(H)$.

۱—۲۵ تعریف. اگر G یک گروه و $H\leq G$، زیرگروه H را خودنرمالگر گوییم هر گاه $N(H)=H$.

۱—۲۶ قضیه. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $H\leq G$ و $P\in Syl_p(H)$. در این صورت اگر $N(P)\leq H$ آنگاه H خودنرمالگر است.

اثبات. [۱، قضیه ۴—۱—۱۳]. ■

۱—۲۷ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد و $H\leq G$. در این صورت برای هر $g\in G$، H^g را چنین تعریف می‌کنیم: $H^g=g^{-1}Hg=\{g^{-1}hg : h\in H\}$.

۱—۲۸ تعریف. اگر G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد، H_G را چنین تعریف می‌کنیم: $H_G=\cap_{g\in G}g^{-1}Hg$.

۱—۲۹ نکته. $H_G\trianglelefteq G$

۱—۳۰ نکته. فرض کنیم G یک گروه و $H,K\leq G$ به قسمی که $K\leq H$ و $K\trianglelefteq G$. در این صورت $K\leq H_G$.

اثبات. فرض کنیم $g \in G$ عنصری دلخواه باشد داریم: $H \geq K = g^{-1}Kg$ بنابراین $K \leq H_G$. ■

۱—۳۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد و $H \leq G$. در این صورت H_G بزرگ ترین زیرگروه نرمال و منحصر به فرد از G است که مشمول در H است. این زیرگروه مغز H در G نامیده می‌شود.

۱—۳۲ تعریف. عنصر $x \in G$ را p ـ عنصر گوییم هر گاه مرتبه آن توانی از عدد اول p باشد.

۱—۳۳ تعریف. عنصر $x \in G$ را p' ـ عنصر گوییم هر گاه مرتبه آن نسبت به p اول باشد.

۱—۳۴ تعریف. گروهی (زیرگروهی) را که مرتبه هر عنصر آن توانی از عدد اول p باشد p ـ گروه (p ـ زیرگروه) گوییم.

مثال ۲.

الف) D_8 یک p ـ گروه است که در آن $p = 2$.

ب) هر زیرگروه سیلوی گروه G، یک p ـ زیرگروه G است.

۱—۳۵ تعریف. گروهی (زیرگروهی) را که مرتبه آن نسبت به p اول باشد p' ـ گروه(p' ـ زیرگروه) گوییم.

۱—۳۶ تعریف. زیرگروه تولیدشده توسط همه p - زیرگروه های نرمال گروه متناهی G را $O_p(G)$ گوییم. لذا $O_p(G)$، بزرگ ترین p - زیرگروه نرمال G است.

مثال ۳. $O_۳(S_۳) = A_۳$ و $O_۲(S_۳) = ۱$.

۱—۳۷ تعریف. $O_p'(G)$، بزرگ ترین p' - زیرگروه نرمال G است.

۱—۳۸ قضیه. (کشی [۳]) اگر G یک گروه باشد که عدد اول p مرتبه آن را بشمارد، آنگاه G عنصری از مرتبه p دارد.

اثبات. [۲۱، قضیه ۴—۲]. ■

۱—۳۹ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت زیرگروه مشتق G که با G' نمایش داده می‌شود چنین تعریف می‌شود:

$$G' = [G,G] = < x^{-۱}y^{-۱}xy : x, y \in G >$$

این زیرگروه، زیرگروه جابه‌جاگر نیز گفته می‌شود و به طور کلی مشتق مرتبه nام G را چنین تعریف می‌کنیم: $G^{(\circ)} = G$ و $G^{(n)} = [G^{(n-۱)}, G^{(n-۱)}]$ که در آن $n \geq ۱$.

۱—۴۰ تعریف. در تعریف فوق اگر $G' = G$، گروه G را تام گوییم.

۱—۴۱ قضیه. G' زیرگروه نرمال G است و اگر $H \trianglelefteq G$، در این صورت، $\frac{G}{H}$ آبلی است اگر و تنها اگر $G' \leq H$.

[۳] Cauchy

اثبات. [٢١، قضیه ٢—٢٣]. ■

١—٤٢ نکته. اگر f یک همریختی باشد، $f[G,G] = [f(G), f(G)]$.

اثبات. فرض کنیم $x \in f[G,G]$. پس $x = f(s)$ که $s \in [G,G]$. بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $s = a^{-1}b^{-1}ab$ لذا داریم:

$$x = f(a^{-1}b^{-1}ab) = f(a^{-1})f(b^{-1})f(a)f(b) = f(a)^{-1}f(b)^{-1}f(a)f(b) \in [f(G), f(G)]$$

عکس مطلب نیز به همین ترتیب اثبات می‌شود. ■

١—٤٣ تعریف. اگر $H \leq G$، اندیس H در G که با $[G:H]$ نمایش داده می‌شود، همان مرتبه‌ی مجموعه هم مجموعه های راست (چپ) متمایز H در G است.

١—٤٤ قضیه. (لاگرانژ[۴]): اگر H زیرگروهی از G باشد، آنگاه $|G| = [G:H]|H|$. به خصوص مرتبه زیرگروه، مرتبه گروه را می‌شمارد.

اثبات. [٢١، قضیه ٢—١١]. ■

[۴] Lagrange