بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش محض

پوشش برای گروه های توپولوژیک

از

میکائیل دربندی خراسانی

استاد راهنما

دکتر حسین سهله

فروردین ۸۷

تقدیم به:

شریکم

شادیم

آرام بخشم

همسرم

تقدیر و تشکر:

با سپاس به درگاه خداوند متعال که به من توفیق انجام این پایان نامه را عنایت فرمود.

لازم می دانم از استاد راهنمای گرامی ،دکتر حسین سهله ، بخاطر زحمات فراوان ،راهنماییهای بجا در مراحل تحقیق و نگارش پایان نامه قدردانی نمایم.

همچنین از اساتید محترم ، دکتر اسماعیل انصاری ، دکتر داوود احمدی دستجردی و دکتر هاشمی که در طول این دوره از محضر ایشان بهره بردم ، کمال تشکر را دارم.

فهرست

چکیده:

پوشش برای گروه های توپولوژیک

میکائیل دربندی خراسانی

فرض کنید G یک گروه توپولوژیک باشد. در این پایان نامه ، به کمک گروه های شرایر Schreier groups و حد وارون تئوری گروه پوششی را برای G با مفهومی تعمیم یافته از پوشش ارائه می دهیم و به بیان و اثبات قضایای اساسی مربوط به آنها می پردازیم.

کلید واژه:

پوشش ، گروه توپولوژیک ، پوشش عمومی ، گروه بنیادی توپولوژیکی ، گروه شرایر

Abstract:

Covering group theory for topological groups

Michaeel Darbandi Khorasani

Let G be a topological group.In this thesis , by using Schrier groups and inverse limits we present covering group theory for topological groups with a generalized notion of cover,and prove some essential theorems .

Key words:
Cover,Topological group,Universal cover,Fundamental topological group,Schreier group.

مقدمه

هدف این پایان نامه تعمیم مفهوم گروه پوششی برای خانواده یی از گروههای توپولوژیک هاسدوف است.قبلا این موضوع از جنبه فضاهای توپولوژیک بررسی شده وقضایای مربوط به آن در شرایط توپولوژیک محض مورد بررسی قرار گرفته است.در این پایان نامه شرایط جبری- توپولوژیکی را جایگزین شرایط توپولوژیک محض کرده و از دیدگاه جبری به مسئله می پردازیم.برای این کار مفهوم پوشش را تعمیم می دهیم.

این پایان نامه بر مبنای مقاله [2] است. Berestovskii و Plaut در [2] با تعریف جدیدی از پوشش و معرفی گروه های هم گسسته (Prodiscrete groups) به عنوان حد معکوس گروه های گسسته ابزار مناسبی برای بررسی گروه های توپولوژیک از دیدگاه جبری ارائه می کنند.

گروه شرایر (Schreier groups) که در سال ۱۹۲۵ توسط Schreier [13] مطرح شد ، را معرفی می کنیم.در این ساختار همسایگی متقارن U از عضو پایه ای e به طور یکتا در گروه توپولوژیک G_U نشانده می شود ، که آنرا گروه شرایر G بر حسب U می نامیم .

فرض می کنیم هر هومورفیسم پیوسته است.

یک هومورفیسم $\phi: G \to H$ بین گروه های توپولوژیک یک پوشش نامیده می شود هرگاه ϕ پوشا و باز باشد و هسته اش مرکزی و هم گسسته (حد وارون گروههای گسسته) باشد.

سوال اساسی این است:

برای کدام کاتگوری C از گروههای توپولوژیک عبارتهای زیر برقرار است :

الف) برای هر $G \in C$ و $\phi: \widetilde{G} \to G$ یک پوشش است .

ب) پوشش ها همان مرفیسم ها در C هستند (یعنی ترکیب پوشش ها بین عناصر C یک پوشش است) .

ج) آیا اگر پوشش ها را به عنوان مورفیسم های فضا در نظربگیریم ،پوشش $\phi: \widetilde{G} \to G$ دارای خاصیت پوشش عمومی هست ؟

هدف اصلی این پایان نامه این است که نشان دهد شرایط بالا برای کاتگوری بزرگی از گروه های توپولوژیک یعنی گروههای توپولوژیک پوشش پذیر برقرار است .

ساختار این پایان نامه به صورت زیر است :

در فصل صفر تعاریف، قضایا و مثالهای مورد نیاز ارائه می گردد.

در فصل یک گروههای موضعا تولید شده و هم گسسته معرفی می شوند و ویژگیهای آنها مورد بررسی قرار می گیرد .

در فصل دو حدود معکوس معرفی شده و بعضی از قضایای مربوط به آنها بررسی می شود.

در فصل سه گروههای شرایر و قضایا و مثالهای مربوط به آنها بیان می شود.

در فصل چهار $\widetilde{G}$ به عنوان حد معکوس گروه شرایر معرفی خواهد شد.

در فصل پنج به بیان خواص گروه های پوشش پذیر و اثبات قضایای مربوط به آنها می پردازیم.

در این پایان نامه علامت« $\blacksquare$ » پایان اثبات لم یا قضیه را نشان می دهد .برای شماره گذاری قضایا ، مثال ها و تعاریف ، از اعداد، به صورت فارسی استفاده شده است.

نحوه شماره گذاری به صورت زیر است :

ابتدا شماره فصل ،سپس شماره بخش و در نهایت شماره قضیه (تعریف ، مثال)ذکر می شود.به عنوان مثال ۳-۲-۵ یعنی فصل ۳ ،بخش ۲ ،قضیه۵ .

برای رجوع به مراجع از نماد [a,b,c,d] استفاده می شود که یعنی مرجع a ، فصل b بخش c و مورد d .

فصل ۰

۰-۱-تعاریف و مثال ها و قضایای مورد نیاز

۰-۱-۱-**تعریف:** یک سه تایی $(G,0,\tau)$ یک گروه توپولوژیک است هرگاه:

الف) G یک گروه باشد.

ب) G یک فضای توپولوژیک باشد

و توابع $\underset{x\mapsto x^{-1}}{G\to G}$ و $\underset{(x,y)\mapsto x.y}{G\times G\to G}$ پیوسته باشند.

۰-۱-۲-**مثال:** هر گروه با توپولوژی گسسته یک گروه توپولوژیک است.

۰-۱-۳-مثال: گروه GL(n,R) از ماتریسهای n × n وارون پذیر با درایه های حقیقی یک گروه توپولوژیک است

GL(n,R) دارای توپولوژی زیرفضایی حاصل از فضای برداری(R) M_n شامل تمام ماتریسهای n × n با درایه های در R است.

۰-۱-۴-**تعریف**: فرض کنید C یک کاتگوری از گروه های توپولوژیک باشد.گوییم G موضعا تعریف شده است اگر یک پایه توپولوژی در نقطه e (همانی گروه)برای G از مجموعه های باز متقارن U چنان موجود باشد که: برای هر H ∈ C و هومورفیسم موضعی $\psi : U \to H$، به طور منحصر به فرد به هومورفیسم $\phi : G \to H$ تعمیم یابد.

۰-۱-۵-**تعریف**: یک هومورفیسم بین گروه های موضعی U و V یک تابع پیوسته $\phi : U \to V$ است به طوریکه $a, b, ab \in U$, $\phi(a)\phi(b) \in V$ آنگاه داشته باشیم:

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

۰-۱-۶-**توجه**:به آسانی ثابت می شودکه اگردو گروه موضعاً تعریف شده G و H دارای همسایگیهای متقارن یکریخت از e باشند آنگاه G و H یکریخت هستند .

۰-۱-۷- **تعریف**:فضای توپولوژیک X را ناهمبند گوییم هرگاه بتوان آنرا به صورت اجتماع دو مجموعه باز ناتهی مجزا نوشت.در غیر اینصورت فضا را همبند گوییم.

برای اثبات قضایای ۰-۱-۸ تا ۰-۱-۱۵ به مرجع [6] مراجعه کنید.

۰-۱-۸-**گزاره**:فرض کنید A زیرمجموعه فضای توپولوژیک X و f یک تابع پیوسته از X به توی فضای توپولوژیک X' باشد.آنگاه $f(A)$ همبند است.

۰-۱-۹-**گزاره**:اجتماع یک خانواده از مجموعه های همبند که اشتراک ناتهی داشته باشند ،همبند است.

۰-۱-۱۰-**گزاره**:حاصلضرب فضاهای همبند،همبند است.به عکس اگر حاصلضرب تعداد دلخواهی از فضاهای ناتهی همبند باشد آنگاه هر کدام از آن فضاها همبند است.

۰-۱-۱۱- **تعریف**:زیر مجموعه های همبند ماکسیمال هرفضای توپولوژیک را مولفه های همبندفضا گوییم.

۰-۱-۱۲-**مثال**: فضای اعداد حقیقی با توپولوزی معمولی همبند است.

۰-۱-۱۳- **تعریف**: فضای X را همبند راهی گوییم هرگاه برای هر دو نقطه x , y یک تابع پیوسته f از $[0,1]$ به X چنان موجود باشد که: $f(0)=x, f(1)=y$

۰-۱-۱۴- **تعریف**: فضای توپولوژیک X را در نقطه $x \in X$ همبند موضعی گوییم اگر هر همسایگی x شامل یک همسایگی باز همبند باشد.

۰-۱-۱۵-**گزاره**: هر فضای خارج قسمتی از یک فضای همبند موضعی،همبند موضعی است.

۰-۱-۱۶-**تعریف**: یک فضا را همبند راهی موضعی گوییم هرگاه در هر نقطه دارای یک پایه از مجموعه های همبند راهی باشد.

۰-۱-۱۷-**تعریف**: فضای توپولوژیک X را همبند ساده گوییم هرگاه همبند راهی باشدو هر تابع پیوسته $f: S^1 \to X$ قابل گسترش به دیسک باشد، به این معنی که یک تابع پیوسته $F: D^2 \to X$ موجود باشد که تحدید آن به S^1 همان f باشد.

۰-۱-۱۸- مثال: صفحه اقلیدسی R^2 همبند ساده است اما $R^2-\{0\}$ چنین نیست.

۰-۱-۱۹-**تعریف**: فضای توپولوژیک X را کلا ناهمبند گوییم هرگاه مولفه های همبند فضا تک نقطه ایها باشند.مانند فضای اعداد گویا و فضای اعداد گنگ و مجموعه کانتور.

۰-۱-۲۰-**لم**: زیرفضاوحاصلضرب فضای کلا ناهمبند خود کلا ناهمبند است.

۰-۱-۲۱-**تعریف**: فرض کنید X یک مجموعه باشد.زیر مجموعه U از $P(X)$ را یک فیلتر گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱)هر زیر مجموعه X که شامل یک مجموعه از U است متعلق به U باشد.

۲)هر اشتراک متناهی از اعضای U به U تعلق داشته باشد.

۳)مجموعه تهی در U نباشد.

۰-۱-۲۲-**مثال**: اگر X یک مجموعه ناتهی باشد ،متمم های زیرمجموعه های متناهی Xعناصر یک فیلتر هستند.فیلتر متمم زیرمجموعه های متناهی مجموعه اعداد طبیعی N فیلتر فرچه (Frechet filter) نامیده می شوند.

۰-۱-۲۳-**تعریف**: فرض کنید $(x_n)_{n\in N}$ یک دنباله نامتناهی از عناصر Xباشد.فیلتر ابتدایی مربوط به دنباله (x_n) فیلتری است که توسط تصاویر فیلتر Frechet با نگاشت $n\mapsto x_n$ از N به توی X تولید می شود.این بدان معنی است که بگوییم فیلتر مربوط به دنباله (x_n)مجموعه ای از زیرمجموعه های Mاز X است به طوریکه $x_n\in M$ برای همه به جز برای تعداد متناهی از مقادیر n.

۰-۱-۲۴-**تعریف**: فرض کنید X یک مجموعه و $U\subseteq P(X)$ باشد.یک یکنواختی روی U ساختاری است که در شرایط زیر صدق کند:

۱)هر زیر مجموعه X که شامل یک مجموعه از U است متعلق به U باشد.

۲)هر اشتراک متناهی از اعضای U مشمول در U باشد.

۳)هر مجموعه مشمول در U شامل قطر Δ باشد.

۴)اگر $V\in U$ آنگاه $V^{-1}\in U$

۵) به ازای هر $V \in U$ ، $W \in U$ موجود باشد به طوریکه داشته باشیم : $W \circ W \subset V$

مجموعه U را همسایگی یکنواختی تعریف شده روی X توسط U گوییم.

اگر V یک همسایگی تعریف شده روی X باشد و داشته باشیم $(x,x') \in V$ گوییم x,x' ، V-نزدیک هستند.

یک مجموعه مجهز به یک یکنواختی را یک فضای یکنواخت گوییم.

۰-۱-۲۵-تعریف: سیستم بنیادی از همسایگیهای یک یکنواختی مجموعه ای چون B از همسایگیها است به طوریکه هر همسایگی شامل یک عضو B باشد.

اگر $V = V^{-1}$ آنگاه همسایگی V را متقارن گوییم.

۰-۱-۲۶-لم: مجموعه B از زیر مجموعه های $X \times X$ یک سیستم بنیادی از همسایگیهای یک یکنواختی است اگر و تنها اگر B در شرایط زیر صدق کند:

۱)اشتراک هر دو عضو B شامل یک عضو B باشد.

۲)هر عضو B شامل قطر Δ باشد.

۳)به ازای هر $V \in B$ ، V' ای عضو B موجود باشد به طوریکه $V' \subset V^{-1}$.

۴) به ازای هر $V \in B$، W ای عضو B موجود باشد به طوریکه $W \circ W \subset V$.

۰-۱-۲۷-مثال: روی مجموعه اعداد حقیقی $\Re$ به ترتیب زیر یک یکنواختی به نام یکنواختی جمعی تعریف می کنیم:فرض کنید به ازای هر $\alpha > 0$، V_α زیر مجموعه ای از $\Re \times \Re$ باشد که اعضایش به صورت زوجهای مرتب (x, y) است به طوریکه: $|x - y| < \alpha$.حال برای اعداد حقیقی بزرگتر از صفر V_αها تشکیل یک سیستم بنیادی برای یکنواختی جمعی میدهند.

۰-۱-۲۸-تعریف: فرض کنید X یک فضای یکنواخت و V یک همسایگی روی X باشد .آنگاه $A \subset X$ را V-کوچک گوییم هرگاه هر زوج از نقاط A ، V-نزدیک باشند،یا به عبارت دیگر داشته باشیم: $A \times A \subset V$.

۰-۱-۲۹-گزاره: در فضای یکنواخت X اگر دو مجموعه A,B ، V-کوچک باشند واشتراکشان مخالف تهی باشد آنگاه $A \cup B$ ، V^2-کوچک است.(به طور اختصار $V \circ V$ را با V^2نشان می دهیم)[6.II.3.1.Proposition1].

۰-۱-۳۰-**تعریف**: فیلتر U روی فضای یکنواخت X را فیلتر کوشی (Cauchy filter) گویند هرگاه برای هر همسایگی V از X یک زیرمجموعه V-کوچک از X وجود دارد که متعلق به U است.

۰-۱-۳۱-**تعریف**: دنباله نامتناهی (u_n) از نقاط فضای یکنواخت X یک دنباله کوشی نامیده می شود اگر فیلتر ابتدایی مربوط به دنباله یک فیلتر کوشی باشد.

۰-۱-۳۲-گزاره: روی فضای یکنواخت X هر دنباله همگرا یک فیلتر کوشی است.[6,II.3.1,Proposition2]

۰-۱-۳۳-**تعریف**: فضای X را کامل گویند هرگاه X یکنواخت و هر فیلتر کوشی در آن همگرا باشد.

۰-۱-۳۴-گزاره: هر زیر فضای بسته یک فضای کامل ، کامل است.هر زیرفضای کامل یک فضای یکنواخت هاسدورف(چه کامل باشد یا نه) بسته است.[6,II.3.4,Proposition8]

۰-۱-۳۵-گزاره: حاصلضرب فضاهای کامل یکنواخت کامل است.به عکس اگر حاصلضرب فضاهای یکنواخت کامل باشد ،آنگاه هر کدام از فضاها کامل و یکنوا خت هستند.[6.II.3.5.Proposition10]

۰-۱-۳۶-گزاره: حد معکوس گروههای یکنواخت کامل و هاسدورف خود کامل است.(حد معکوس در فصل ۲ مورد بحث قرار می گیرد)[6.II.3.5.Corollary10]

۰-۱-۳۷-**تعریف**: مجموعه های باز هر فضای متریک $\langle X,\rho\rangle$ تشکیل یک توپولوژی روی فضا می دهند.از این رو به هر فضای متریک $\langle X,\rho\rangle$ می توان یک فضای توپولوژیک $\langle X,\tau\rangle$ وابسته ساخت، که در آن τ خانواده مجموعه های باز $\langle X,\rho\rangle$ است.فضای توپولوژیکی که به این ترتیب به یک فضای متریک وابسته می گردد،متریک پذیر نامیده می شودو ρ را یک متریک این فضای توپولوژیک می نامند.

۰-۱-۳۸-**تعریف**: فرض کنید X یک فضای توپولوژیک با نقطه پایه ای x_0 باشد.مجموعه ی

$$K=\{\alpha: I\to X \mid \alpha(0)=\alpha(1)=x_0, x_0\in X, \alpha \text{ is countinous}\}$$

را در نظر بگیرید.رابطه هم ارزی $\approx$ را روی K به صورت زیر تعریف کنید:

$\alpha_1\approx\alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2$ باهم هموتوپ راهی باشند

حال اگر $\alpha_1,\alpha_2\in K$ آنگاه:

$$\alpha_1 * \alpha_2(t) = \begin{cases} \alpha_1(2t), 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \\ \alpha_2(2t-1), \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

حال مجموعه $\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] : \alpha \in K\}$ را در نظر بگیرید. ((X, x_0) یعنی فضای توپولوژیک X همراه با نقطه پایه ای x_0)

عمل * را روی $\pi_1(X, x_0)$ بصورت زیرتعریف می کنیم:

$$[\alpha_1]*[\alpha_2] = [\alpha_1 * \alpha_2]$$

می توان نشان داد $(\pi_1(X, x_0),*)$ یک گروه است.این گروه را اولین گروه بنیادی فضای توپولوزیک X می نامیم.

۰-۱-۳۹-**تعریف**:فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد.زوج $(\widetilde{X}, p)$ را یک فضای پوششی برای X گویند هرگاه درشرایط زیر صدق کند:

۱) X همبند راهی باشد.

۲)یک پوشش باز مانند $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ برای X موجود باشد به طوریکه برای هر α، $p^{-1}(U_\alpha)$ به صورت اجتماع جدا ازهم مجموعه های باز در $\widetilde{X}$ باشد.یعنی $p^{-1}(U_\alpha) = \cup V_\alpha$ که V_α باز و دو به دو مجزا هستند.

۳) $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \to U_\alpha$ همسان ریختی باشد.

۰-۱-۴۰-مثال: $(R, \exp)$ یک فضای پوششی برای S^1 است که در آن

$$\exp : R \to S^1$$
$$t \mapsto e^{2\pi i t}$$

۰-۱-۴۱-**تعریف**:فرض کنید $(\widetilde{X}, p)$ یک فضای پوشش برای X باشد.آنگاه $\widetilde{X}$ را یک پوشش عمومی برای X گوییم هرگاه $\pi_1(\widetilde{X}, x_0) = 0$ ، ($x_0 \in X$ ، x_0 نقطه پایه ای است) یعنی X همبند ساده باشد.

۰-۱-۴۲-قضیه:فرض کنید (X,p) یک فضای پوشش برای X و $f:(I,0)\to(X,x_0)$ یک راه در X باشد، آنگاه راه منحصر به فرد $\widetilde{f}:(I,0)\to(X,x_0)$ در (X,x_0) که $x\in p^{-1}(x_0)$ موجود است به طوریکه $p\widetilde{f}=f$. [8.1,33].

۰-۱-۴۳- **تعریف**:فرض کنید G یک مجموعه ناتهی باشد. G را با عمل دوتایی $*:G\times G\to G,(x,y)\mapsto x.y$ یک نیم گروه گویند هرگاه در شرط زیر صدق کند:

$$\forall a,b,c\in G \qquad a*(b*c)=(a*b)*c$$

یعنی G شرکت پذیر باشد.

۰-۱-۴۴- **تعریف**:یک کاتاگوری مانندK متشکل از اشیاء می باشد که آنها را با نماد A,B,C,... نمایش می دهند که دارای ویژگیهای زیر است:

۱)به ازای هر دو شی A,B از کاتاگوری K مجموعه ای چون $Hom_K(A,B)$ موجود است که به هریک از عناصر $Hom_K(A,B)$ یک ریختار $f:A\to B$ گویند به طوریکه اگر $(A,B)\neq(C,D)$ آنگاه:

$$Hom_K(A,B)\cap Hom_K(C,D)=\varnothing$$

۲)به ازای هر سه شی ء A,B,C از کاتاگوری K، تابع(ترکیب) :

$$\bullet:Hom_K(B,C)\times Hom_K(A,B)\to Hom_K(A,C)$$

$$(f,g)\mapsto fg$$

موجود است به طوریکه:

الف:خاصیت شرکت پذیری دارد.

ب: عضو همانی دارد.

۰-۱-۴۵- **مثال**:فرض کنید G یک گروه ضربی باشد و K تنها دارای شی ء G باشد و عمل ترکیب را به صورت زیر تعریف کنیم :

$$\bullet:Hom_K(G,G)\times Hom_K(G,G)\to Hom_K(G,G)$$

$$(a,b)\mapsto ab$$

$$Hom_K(G,G) = \{a : a \in G\} \quad ,$$ و

فصل ۱

گروه های موضعاً تولید شده و گروه های هم گسسته

در این فصل مفهوم گروه های موضعا تولید شده را تعریف می کنیم و به بیان قضایا و نتایج مربوط به آنها می پردازیم .همچنین گروه های هم گسسته (Prodiscrete groups) را به عنوان حد وارون گروه های گسسته معرفی کرده و خواص آنها را بیان می کنیم.

۱-۱-۱- **تعریف:**گروه توپولوژیک Gموضعاً تولید شده نامیده می شود اگر توسط هر همسایگی e تولید شده باشد .

۱-۱-۲-**تذکر:**این سوال که آیا گروه های موضعاً تولید شده کامل باید همبند باشند بیش از ۵۰ سال پیش توسطMazur [12] مطرح شد و توسط Stevens [14] ردشد . برای مثال اعداد گویا موضعاً تولید شده هستند ولی کامل نیستند .

۱-۱-۳- **تعریف:** فرض کنید Gیک گروه و U همسایگی باز e در G باشد . یک U- زنجیر از e به $x \in G$ یک دنباله متناهی $\{x_0 = e, x_1,..., x_n = x\}$ از اعضای G است به طوریکه به ازای هر i ، $x_i^{-1}x_{i+1} \in U$.

یک G- زنجیر به سادگی یک زنجیر است .اگر $\phi : G \to H$هومورفیسم باشد و $C = \{x_0,...,x_n\}$ یک زنجیر در G باشد آنگاه منظور از $\phi(C)$ زنجیر $\{\phi(x_0),...,\phi(x_n)\}$ در H است .

۱-۱-۴-گزاره:فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک باشد.شرایط زیر معادلند :

۱) G موضعاً تولید شده است .

۲) G دارای هیچ زیر گروه محض باز نیست .

۳)برای هر $x \in G$ وهمسایگی Uاز e یک U -زنجیر از e به x موجود است .

برهان :اگر G دارای زیر گروه محض باز H باشد ، آنگاه H نمی تواند G را تولید کند . به عکس فرض کنید G دارای یک همسایگی باز U از عنصر همانی باشد که G را تولید نمی کند. آنگاه زیر گروه تولید شده توسط U که اجتماعی از مجموعه های باز است، باید زیر گروه باز محض از G باشد که این با فرض در تناقض است . پس هم ارزی (۱) و (۲) برقرار است .

G موضعاً تولید شده است اگر و تنها اگر برای هر همسایگی U از e وهر $g \in G$ وجود داشته باشد:

$g_1,\ldots,g_n \in U$ به طوریکه :

$$g = g_1 \cdots g_n .$$

فرض کنید :

$$x_i = g_1 \cdots g_i .$$

می بینیم که $\{x_i = e \ , x_1 ,\ldots, \ x_n = g\}$ یک U-زنجیر به g است .

به عکس ، به ازای هر U -زنجیر داده شده $\{e , x_1 ,\ldots, \ x_n\}$ قرار می دهیم $g_i = x_{i-1}^{-1} x_i$ و مشاهده می کنیم که G موضعاً تولید شده است ، در نتیجه ۱و۳ معادلند . $\square$

اگر گروه توپولوژیک G یک همسایگی همبند U از e داشته باشد ، آنگاه زیر گروه G که توسط U تولید می شود یک زیر گروه باز همبند از G است . نتیجه می گیریم :

۱-۱-۵-نتیجه: اگر G موضعاً تولید شده باشد آنگاه Gهمبند است اگر و تنها اگر G دارای یک همسایگی همبند برای e باشد .

برهان:فرض کنید U یک همسایگی همبند برای e باشد .بنا به قضیه ۱-۱-۴ باید داشته باشیم $U = G$ و در نتیجه G همبند است.

به عکس ، فرض کنید G همبند نباشد آنگاه G را می توان به صورت اجتماع دو مجموعه جدا از هم نوشت ودر نتیجه G توسط همسایگی e تولید نمی شود که این با موضعاً تولید شده بودن G در تناقض است. $\square$

۱-۱-۶-نتیجه: اگر G گروه توپولوژیک همبند موضعی باشد آنگاه همبند است اگر و تنها اگر G موضعاً تولید شده باشد .

برهان:از نتیجه ۱-۱-۵ به آسانی بدست می آید. $\square$

۱-۱-۷-**لم**:فرض کنید G یک گروه و H زیر گروه موضعاً تولید شده آن باشد. آنگاه بستار H یعنی $\overline{H}$ در G موضعاً تولید شده است .

برهان : فرض کنید V یک همسایگی e در G باشد . آنگاه $V \cap \overline{H}$ یک زیر گروه باز و در نتیجه بسته K از $\overline{H}$ را تولید می کند اما چون $V \cap H$ مشمول در $V \cap \overline{H}$ است و H را تولید می کند داریم : $H \subset K \subset \overline{H}$ و بنابراین $K = \overline{H}$. □

۱-۱-۸-**نتیجه**: کامل شده ی یک گروه موضعاً تولید شده خود موضعاً تولید شده است .

۱-۱-۹-**گزاره** : اگر H یک زیر گروه چگال گروه توپولوژیک G باشد . آنگاه H موضعاً تولید شده است اگر و تنها اگر G موضعاً تولید شده باشد .

برهان : فرض کنید H یک زیر گروه چگال گروه موضعاً تولید شده G ، و U یک همسایگی باز e در G و $h \in H$ باشد . فرض کنید $\{x_0, \dots, x_n\}$ یک U - زنجیر از e به h و G باشد . با توجه به پیوستگی ضرب و چگال بودن H وجود دارد $y_1, \dots, y_{n-1} \in H$ به طوریکه y_i آنقدر به x_i نزدیک است که $y_i^{-1} y_{i+1} \in U$. (همچنین قرار دهیم $y_0 = e, y_n = h$) پس $\{y_1, \dots, y_n\}$ نیز یک U - زنجیر به h در H است . حالت عکس از لم ۱-۱-۷ به راحتی نتیجه می شود . □

۱-۱-۱۰-**لم**: اگر $\phi : G \to H$ یک هomomorفیسم پوشا باشد و G موضعاً تولید شده آنگاه H موضعاً تولید شده است.

برهان:فرض کنید H موضعاً تولید شده نباشد . U را زیر گروه محض باز H در نظر می گیریم.چون ϕ پیوسته است در نتیجه $\phi^{-1}(U)$ زیر مجموعه باز G است و در نتیجه بنا به گزاره ۱-۱-۴ باید داشته باشیم:

$$\phi^{-1}(U) = G$$

و از اینکه ϕ پوشا است داریم:

$$U = \phi(\phi^{-1}(U)) = \phi(G) = H$$

و این با فرض در تناقض است. □