دانشکده علوم ریاضی و آمار
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض، گرایش هندسه

عنوان

یکتایی چرخه های حدی برای معادلات دیفرانسیل مکعبی

استاد راهنما

دکتر حاجی محمد محمدی نژاد

استاد مشاور

دکتر امید ربیعی مطلق

نگارنده

حسنیه حاجی آبادی

شهریور ۹۲

چکیده

در این پایان‌نامه به مطالعه‌ی چرخه‌های حدی معادلات دیفرانسیل اسکالر

$$x' = \sum_{k=1}^{m} a_k \sin^{i_k}(t) \cos^{j_k}(t) x^{n_k} \tag{1}$$

که در آن $a_k \in \mathbb{R}$ و $i_k, j_k, n_k \in \mathbb{Z}^+$ می‌پردازیم. نشان می‌دهیم معادله(۱) حداکثر دارای یک چرخه حدی است. نتایج به دست آمده را در مورد سیستم‌های مسطح به کار می‌بریم. هم‌چنین $\{i_k\}$ و $\{j_k\}$ را به نوعی تعیین می‌کنیم که مبدا سیستم مسطح یک مرکز برای هر انتخاب $a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}$ باشد و نشان می‌دهیم برای هر انتخاب $a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}$ اطراف مبدا چرخه حدی نداشته باشیم.

واژگان کلیدی: چرخه حدی، معادلات دیفرانسیل اسکالر، میدان برداری مسطح سخت

تعداد صفحات پایان نامه: ۷۸

تقدیم به

پدر بزرگوارم که از نگاهشان صلابت آموختم

مادر مهربانم که از صبرشان ایستادگی آموختم

و

برادر عزیزم که از رفتارش محبت آموختم...

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

من نه آنم که زبونی کشم از دست فلک

چرخ برهم زنم ار غیر مرادم گردد...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

قدردانی و تشکر...

سپاس بی نهایت خداوند یکتا را که، زندگی‌مان بخشید و در راه کسب علم رهنمودمان داد و ما را هم‌نشین رهروان علم و دانش نمود.

تشکر و سپاس بی کران خود را نسبت به استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر حاجی محمد محمدی نژاد ابراز می‌دارم که با راهنمایی‌های بی دریغ خود در تدوین این پایان‌نامه مرا یاری نمودند.

از استاد مشاور محترم جناب آقای دکتر امید ربیعی مطلق که مرا راهنمایی نمودند، بی نهایت سپاسگذارم.

از اساتید داور جناب آقای دکتر امان الله اسدی و جناب آقای دکتر علیرضا جانفدا نهایت تشکر و قدردانی را دارم و هم‌چنین از جناب آقای دکتر اسدالله محمودزاده وزیری که به عنوان نماینده تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاع حضور داشتن کمال تشکر را دارم.

از سرکار خانم آشیانی و سایر دوستان که خالصانه مرا راهنمایی کردند، نهایت تشکر را دارم.

از خانواده عزیزم که در این مدت با راهنمایی‌هایشان مشوق و همراه من بودن بسیار ممنون و سپاسگذارم.

حسنیه حاجی آبادی

شهریور ۹۲

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

یکی از مسائل باز در دنیای ریاضیات، مسئله شانزدهم هیلبرت است. قسمت دوم آن بر روی بیشترین تعداد و موقعیت نسبی چرخه‌های حدی یک سیستم چندجمله‌ای مسطح عمومی به فرم

$$\begin{cases} x' = P_n(x,y) \\ y' = Q_n(x,y) \end{cases}$$

که P_n و Q_n چندجمله‌ای‌های درجه n هستند، بحث می‌کند. تعداد چرخه‌های حدی در یک سیستم چندجمله‌ای از درجه n را با H_n نشان داده و آن را عدد هیلبرت می‌نامند.

از آن‌جا که پیدا کردن کران بالا برای چرخه‌های حدی هنوز یک مسئله حل نشده می‌باشد، اما یک استراتژی برای حل این مسئله، کنترل کران پایین عدد هیلبرت H_n است و بررسی این که کران پایین چرخه‌های حدی تا چه مقدار می‌تواند افزایش یابد.

در این پایان‌نامه در مورد تعداد چرخه‌های حدی معادله دیفرانسیل مکعبی

$$x' = \sum_{k=۱}^{m} a_k \sin^{i_k}(t)\cos^{j_k}(t)x^{n_k},$$

که در آن $i_k, j_k, n_k \in \mathbb{Z}^+$، بحث می‌کنیم، شرایطی روی $\{i_k\}$، $\{j_k\}$ و $\{n_k\}$ به وجود می‌آوریم، تا معادله حداکثر یک چرخه حدی داشته باشد.

هم‌چنین در این پایان‌نامه معادلات دیفرانسیل اسکالر مسطح سخت

$$\begin{cases} x' = -y + F(x,y) \\ y' = x + F_n(x,y) \end{cases}$$

را به طوری که $F(x,y) = \sum_{k=۱}^{m} a_k \sin^{i_k}(t)\cos^{j_k}(t)x^{n_k}$، را مورد بحث قرار می‌دهیم و فرض می‌کنیم $H(n)$ نشانگر تعداد ماکزیمم چرخه‌های حدی سیستم‌های مسطح سخت است.

در فصل ۱ تعاریفی که بیشتر مورد استفاده است را بیان می‌کنیم، فصل ۲ اساس کار ما است، چرخه‌های حدی سیستم مکعبی را در شرایط مختلف به دست می‌آوریم و در فصل ۳ نتیجه کلی فصل ۱ و ۲ و هم‌چنین کاربردی از چرخه‌های حدی مکعبی در سیستم‌های مسطح سخت را بیان می‌کنیم.

فصل ۱
پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی

.

۱.۱ روند تاریخی مسئله شانزدهم هیلبرت

در سال ۱۹۰۰ میلادی هیلبرت [۱] در دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات که در شهر پاریس برگزار کرد، فهرستی از ۲۳ مساله حل نشده از شاخه‌های مختلف ریاضی را مطرح نمود که قسمت دوم از مساله ۱۶ هیلبرت به صورت زیر می‌باشد، که هنوز به عنوان یک مساله باز در دنیای ریاضی باقی مانده است. تعداد ماکزیمم چرخه‌های حدی سیستم چندجمله‌ای درجه n

$$\begin{cases} x' = \sum_{i+j=0}^{n} a_{ij}x^i y^j \\ y' = \sum_{i+j=0}^{n} b_{ij}x^i y^j \end{cases}$$

چیست؟

به بیان دیگر مساله ۱۶ هیلبرت به تعیین تعداد ماکزیمم چرخه‌های حدی هریک از سیستم‌های چندجمله‌ای درجه n و موقعیت نسبی آن‌ها در صفحه می‌پردازد، تعداد چرخه‌های حدی در یک سیستم چندجمله‌ای از درجه n را با H_n یا با $H(n)$ نشان می دهند، که به آن عدد هیلبرت می‌گویند. چون میدان‌های برداری خطی چرخه حدی ندارند، پس $H(1) = 0$ ولی برای $n > 1$ هنوز وجود عدد هیلبرت اثبات نشده است. در سال ۱۹۲۳ میلادی دولاک[۲]ادعا کرد که مساله اول را حل کرده است. اما در سال ۱۹۶۰ ادعای او به وسیله‌ی مثال نقض نویکف [۳] رد شد.

در سال ۱۹۷۵ پتروفسکی [۴] و لاندیس [۵]جوابی برای مساله دوم پیدا و ادعا کردند که $H(2) = 2$

[۱]Hilbert
[۲]Dulac
[۳]Nouikov
[۴]Petrofskii

و $H(n) \leq P_{۴}(n)$ که چندجمله‌ای $P_{۴}(n)$ به صورت زیر است:

$$P_{۴}(n) = \begin{cases} ۱/۲(۶n^{۳} - ۷n^{۲} - ۱۱ + ۱۶) \\ ۱/۲(۶n^{۳} - ۷n^{۲} + n + ۴) \end{cases}$$

که اولی برای n زوج و دومی برای n فرد تعریف شده است. اما درسال ۱۹۶۰ ادعای آنها به وسیله مثال نقضی توسط نویکف [۶] رد شد. در سال ۱۹۷۹ ریاضی‌دانان چینی به نام‌های شی، چن و ونگ مثال‌هایی از میدان‌های برداری درجه دوم با ۴ چرخه حدی را ارائه دادند، بدین ترتیب آن‌ها نشان دادند که $H(۲) \geq ۴$. راجع به $H_{۳}$ تا سال ۱۹۸۳ باور بر این بود که یک سیستم چندجمله‌ای از درجه ۳ حداکثر ۸ چرخه حدی موضعی دارد. تا اینکه لیتال [۷] یک مثال از سیستم‌های چندجمله‌ای از درجه ۳ با ۱۱ چرخه حدی ارائه داد. بدین ترتیب نشان داد که $H_{۳} \geq ۱۱$. در سال ۱۹۸۴ ایلیاشنکو [۸] ثابت کرد که میدان‌های برداری چندجمله‌ای با نقاط تکین غیر استثنایی در صفحه تعداد متناهی چرخه حدی دارند. در سال ۱۹۹۱ ایلیاشنکو و در سال ۱۹۹۲ اکال [۹] به طور جداگانه اثبات کردند که نه تنها میدان‌های برداری چندجمله‌ای بلکه میدان‌های برداری تحلیلی نیز در صفحه، تعداد متناهی چرخه حدی دارند.

به این ترتیب بعد از گذشت ۹۲ سال از تاریخ طرح مساله هیلبرت به این سوال که آیا هر میدان برداری چندجمله‌ای در صفحه تعداد متناهی چرخه حدی دارد؟ جواب مثبت گرفت حل شد.

ولی تاکنون به این سوال که آیا چرخه‌های حدی میدان‌های برداری چندجمله‌ای در صفحه کران دارند؟ هنوز جواب داده نشده و برای $n = ۲$ هنوز بی جواب است.

معمولاً برای بررسی چرخه‌های حدی در یک سیستم چندجمله‌ای، سه تقسیم‌بندی به کار می برند. تقسیم‌بندی اول که فقط مربوط به سیستم‌های مرتبه دوم است و بوتین ثابت کرد که در این سیستم‌ها تعداد چرخه‌های حدی که از یک نقطه منشعب می‌شوند برابر سه است . دومین تقسیم‌بندی در مورد چرخه‌های حدی جداکننده است. سومین و کامل‌ترین تقسیم‌بندی مربوط به چرخه‌های حدی چندگانه می‌باشد، یکی از ویژگی‌های تقسیم‌بندی اخیر این است که به سیستم‌های دینامیکی با ابعاد بالاتر تعمیم می‌یابد. با توجه به پیچیدگی مساله شانزدهم هیلبرت، یک راه حل ممکن برای مطالعه این مساله در نظر گرفتن یک مسئله معلوم و بررسی وقوع انواع انشعاب‌های ممکن روی آن است.

[۵] Landis
[۶] Novikov
[۷] J.B.Lietal
[۸] Ilyashenko
[۹] Ecalle

۲.۱ تعاریف مورد نیاز

تعریف ۱.۲.۱. نقطه $x_\circ \in \mathbb{R}^n$ نقطه‌ی تعادل[۱۰] (نقطه ثابت[۱۱])سیستم خودگردان

$$x' = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{۱.۱}$$

نامیده می‌شود، هرگاه $f(x_\circ) = \circ$.

اگر نقطه‌ای به غیر از مبدا نقطه تعادل سیستم(۱.۱) باشد تغییر متغییر $y = x - x_\circ$ را در سیستم(۱.۱) به کار می‌بریم، در این صورت $y' = x'$. بنابراین

$$y' = x' = f(x) = f(x_\circ + y) = f(x_\circ) + \frac{f'(x_\circ)}{۱!}(x_\circ + y - x_\circ) + \ldots.$$

چون $x_\circ$ نقطه‌ی تعادل سیستم(۱.۱) است $f(x_\circ) = \circ$، بنابراین

$$y' = Df(x_\circ)y + O(|y|^۲) = Ay + O(|y|^۲)$$

که در آن $A = Df(x_\circ)$ یک ماتریس $n \times n$ است. سیستم معادلات

$$y' = Ay, \qquad A = Df(x_\circ) \tag{۲.۱}$$

سیستم خطی شده متناظر با سیستم(۱.۱) نامیده می‌شود.

فرض کنید x و y اعداد حقیقی باشند، با اختیار کردن $X = (x,y)^T$ و $f_۱(X) = P(x,y)$ و $f_۲(X) = Q(x,y)$ برای $X \in \mathbb{R}^۲$ سیستم غیر خطی $X' = f(X)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x' = P(x,y), \qquad y' = Q(x,y). \tag{۳.۱}$$

که با تبدیل مختصات قطبی $x = rcos\theta, y = rsin\theta$ برای $r > \circ$ سیستم غیر خطی(۳.۱) نمایشی به صورت زیر خواهد داشت:

$$\begin{aligned} r' &= P(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + Q(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta, \\ r\theta' &= Q(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta - P(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta. \end{aligned}$$

یا به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r[P(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + Q(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta]}{Q(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta - P(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta} \tag{۴.۱}$$

فرض کنید که $(r,\theta) = (r(t,r_\circ,\theta_\circ), \theta(t,r_\circ,\theta_\circ))$، نمایشی از جواب سیستم غیر خطی(۴.۱) باشد که در شرط اولیه $\theta(\circ) = \theta_\circ$ و $r(\circ) = r_\circ$ صدق می‌کند.

[۱۰] equilibrium point
[۱۱] fixed point

تعریف ۲.۲.۱. نقطه تعادل $x_\circ$ نقطه تعادل منزوی سیستم(۱.۱) نامیده می‌شود هرگاه همسایگی‌ای از $x_\circ$ وجود داشته باشد که شامل هیچ نقطه تعادل دیگری از سیستم(۱.۱) نباشد.

تعریف ۳.۲.۱. یک سیستم دینامیکی(شار) روی E، نگاشت C^1

$$\varphi : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$$

است، که E یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ است. فرض کنید $\varphi_t(x) = \varphi(t,x)$، در این صورت φ_t در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$
\begin{aligned}
&1)\varphi_\circ(x) = x \qquad \forall x \in E\\
&2)\varphi_s(\varphi_t(x)) = \varphi_{s+t}(x) \qquad \forall s,t \in \mathbb{R}, x \in E\\
&3)\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) = \varphi_t(\varphi_{-t}(x)) = x \quad \forall t \in \mathbb{R}, x \in E.
\end{aligned}
$$

از تعریف بالا نتیجه می‌شود که برای هر $t \in \mathbb{R}$، φ_t یک نگاشت $\mathbb{C}^1$ از E به توی E است. واضح است که اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آن‌گاه $\varphi(t,x) = e^{At}x$، یک سیستم دینامیکی روی $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم و هم‌چنین برای هر $x_\circ \in \mathbb{R}^n$، $\varphi(t,x_\circ)$ جواب مساله مقدار اولیه

$$x' = Ax, \qquad x(\circ) = x_\circ,$$

است. به طور کلی، اگر $\varphi(t,x)$ یک سیستم دینامیکی روی $E \subset \mathbb{R}^n$ باشد آن‌گاه تابع

$$f(x) = \frac{d}{dx}\varphi(t,x)|_{t=\circ}$$

یک میدان برداری C^1 روی E، است و برای هر $x_\circ \in E$، $\varphi(t,x_\circ)$ جواب مساله مقدار اولیه

$$x' = f(x), \qquad x(\circ) = x_\circ,$$

است. به علاوه برای هر $x_\circ \in E$، بازه ماکسیمال وجودی $\varphi(t,x_\circ)$، $I(x_\circ) = (-\infty,\infty)$ است. بنابراین هر سیستم دینامیکی باعث به وجود آمدن میدان برداری C^1، f می‌شود و این سیستم دینامیکی، مجموعه جواب معادله دیفرانسیل تعریف شده توسط این میدان برداری را توصیف می‌کند.

تعریف ۴.۲.۱. برای $x \in E$ تابع $\varphi(.,x) : \mathbb{R} \longrightarrow E$ یک مسیر یا یک منحنی جواب از سیستم(۱.۱) نامیده می‌شود که از نقطه‌ی $x \in E$ عبور می‌کند و مسیری که از نقطه $x_\circ$ می‌گذرد را با $\Gamma_{x_\circ}$ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$\Gamma_{x_\circ} = \{x \in E | x = \varphi(t,x_\circ), t \in \mathbb{R}\}$$

نیم مسیر مثبتی را که از نقطه‌ی $x_\circ \in E$ می‌گذرد، به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\Gamma^+_{x_\circ} = \{x \in E | x = \varphi(t, x_\circ), t \geq \circ\}$$

و نیم مسیر منفی که از نقطه‌ی $x_\circ \in E$ می‌گذرد، را با $\Gamma^-_{x_\circ}$ نمایش داده و به صورت مشابه تعریف می‌شود. واضح است که $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$.

تعریف ۵.۲.۱. نقطه ثابت $x_\circ$ پایدار لیاپانوف[۱۲] نامیده می‌شود اگر به ازای هر $\varepsilon > \circ$، $\delta > \circ$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in N_\delta(x_\circ)$،

$$\{\phi(t, x) \mid t > \circ\} \subseteq N_\varepsilon(x_\circ).$$

یعنی اگر جوابی از نقطه‌ای نزدیک $x_\circ$ شروع شود، برای زمان‌های آینده به آن نزدیک باقی بماند. در غیر این صورت ناپایدار[۱۳] نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۲.۱. نقطه تعادل $x_\circ$ نقطه تعادل هذلولوی سیستم(۱.۱) نامیده می شود، هرگاه ماتریس $Df(x_\circ)$ هیچ مقدار ویژه با قسمت حقیقی صفر نداشته باشد. در غیر این صورت ناهذلولوی نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۲.۱. مبدا یک مرکز[۱۴] برای سیستم(۱.۱) نامیده می‌شود، اگر $\delta > \circ$ وجود داشته باشد به طوری که هر منحنی جواب سیستم غیر خطی(۱.۱) در همسایگی محذوف مبدا $N_\delta(\circ) \sim \{\circ\}$ یک منحنی بسته باشد.

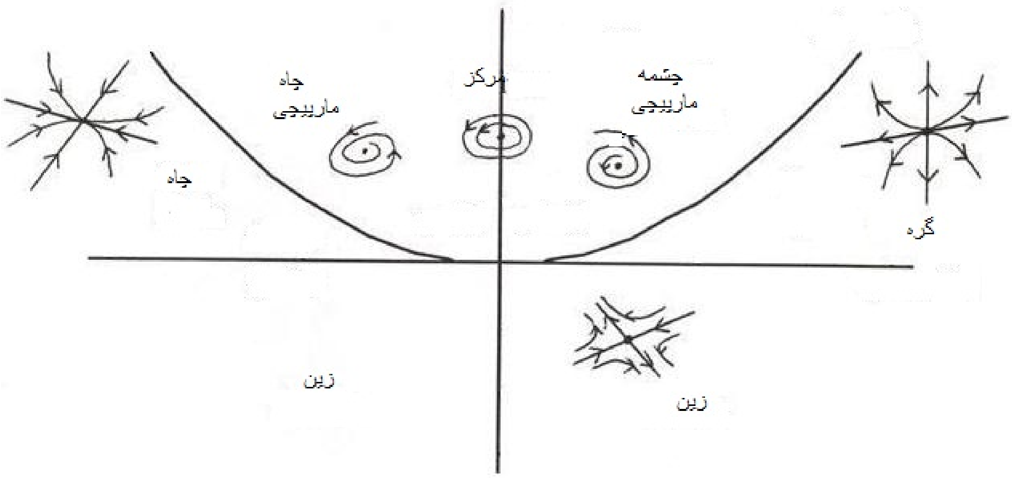
تعریف ۸.۲.۱. مبدا یک مرکز کانونی [۱۵] برای سیستم(۱.۱) نامیده می‌شود، اگر دنباله‌ای از مسیرهای بسته مانند Γ_n حول مبدأ وجود داشته باشد که $\lim_{n\to\infty} \Gamma_n = \circ$ و Γ_{n+1} درون Γ_n باشد و برای هر نقطه درون Γ_n و بیرون Γ_{n+1} جوابی که از آن نقطه می‌گذرد به سمت Γ_n و Γ_{n+1} میل می‌کند وقتی $t \to \pm\infty$.

تعریف ۹.۲.۱. مبدا یک کانون پایدار[۱۶] برای سیستم(۱.۱) نامیده می‌شود، اگر $\delta > \circ$ وجود داشته باشد آن‌گاه به ازای هر $\circ < r_\circ < \delta$ و $\theta_\circ \in \mathbb{R}$، $r(t, r_\circ, \theta_\circ) \to \circ$ و $|\theta(t, r_\circ, \theta_\circ)| \to \infty$ وقتی $t \to \infty$ و یک کانون ناپایدار[۱۷] نامیده می‌شود اگر پایدار نباشد. به بیان دیگر اگر $r(t, r_\circ, \theta_\circ) \to \circ$

[۱۲] Lyapunov stable
[۱۳] unstable
[۱۴] center
[۱۵] Center-Focus
[۱۶] stable focus
[۱۷] unstable focus

و $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \to \infty$ وقتی $t \to -\infty$، در این حالت می‌گوییم جواب‌ها به طور مارپیچی[۱۸] به مبدا میل می‌کند وقتی $t \to \pm\infty$.

تعریف ۱.۲.۱۰. مبدا یک گره‌ی پایدار برای سیستم(۱.۱) نامیده می‌شود، اگر $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $0 < r_0 < \delta$ وقتی $t \to \infty$، $r(t, r_0, \theta_0) \to 0$ و $\lim_{t\to\infty} \theta(t, r_0, \theta_0)$ موجود باشد، یعنی هر مسیر در همسایگی محذوف مبدا در راستای خط مماس کاملا مشخصی به مبدا نزدیک می‌شود و مبدا یک گره‌ی ناپایدار نامیده می شود وقتی $t \to -\infty$، $r(t, r_0, \theta_0) \to 0$ و $\lim_{t\to-\infty} \theta(t, r_0, \theta_0)$ برای همه‌ی $r_0 \in (0, \delta)$ و $\theta_0 \in \mathbb{R}$ موجود باشد. مبدا یک گره‌ی کامل نامیده می‌شود اگر یک گره باشد و در عین حال شعاعی که از مبدا می‌گذرد مماس بر مسیرهای سیستم(۱.۱) باشد.



شکل ۱.۱: مرکز، کانون، گره، چاه، چشمه

قضیه ۱.۲.۱۱. *فرض کنید $\delta = detA$ و $\tau = trA$. سیستم خطی شده زیر را در نظر بگیرید،*

$$x' = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{۱.۵}$$

۱. *اگر $\delta < 0$، آن‌گاه مبدا مختصات یک زینی برای سیستم(۱.۵) است.*

۲. *اگر $\delta > 0$ و $\tau^2 - 4\delta \geq 0$، آن‌گاه مبدا مختصات یک گره برای سیستم(۱.۵) است. چنان‌چه $\tau < 0$، گره پایدار و $\tau > 0$، گره ناپایدار است.*

۳. *اگر $\delta > 0$، $\tau^2 - 4\delta < 0$ و $\tau \neq 0$، آن‌گاه مبدا مختصات یک کانون برای سیستم(۱.۵) است.*

[۱۸] spiral

چنان‌چه $\tau < 0$، کانون پایدار و $\tau > 0$، کانون ناپایدار است.

۴. *اگر $\delta > 0$ و $\tau = 0$، آن‌گاه مبدا مختصات یک مرکز برای سیستم(۵.۱) است.*

برهان. به[۱۰] صفحه ۲۵ مراجعه کنید. □

تعریف ۱۲.۲.۱. نقطه $p \in E$ نقطه‌ی ω-حدی مسیر Γ برای سیستم(۱.۱) نامیده می‌شود، وقتی $t_n \to +\infty$، در این صورت $\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, x_0) = p$. به طور مشابه، $q \in E$ نقطه‌ی α-حدی مسیر Γ برای سیستم(۱.۱) نامیده می‌شود، وقتی $t_n \to -\infty$، در این صورت $\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, x_0) = q$.

مجموعه نقاط ω-حدی یک مسیر Γ، مجموعه ω-حدی Γ نامیده می‌شود و با $\omega(\Gamma)$ نشان داده می‌شود و مجموعه همه نقاط α-حدی یک مسیر Γ، مجموعه α-حدی Γ نامیده می‌شود و به صورت $\alpha(\Gamma)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱۳.۲.۱. Γ یک منحنی جواب بسته سیستم(۱.۱) نامیده می‌شود در صورتی که برای هر $t \in \mathbb{R}$ و $x_0 \in \Gamma$،

$$\varphi(t+T, x_0) = \varphi(t, x_0), \qquad T > 0.$$

به کوچکترین T که در رابطه فوق صدق می‌کند، دوره تناوب مسیر تناوبی $\varphi(., x_0)$ گویند.

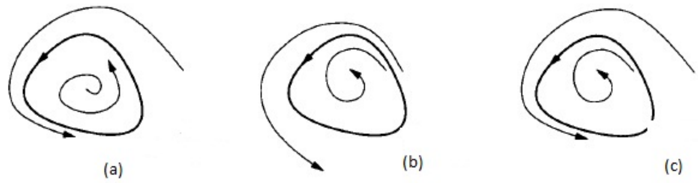
تعریف ۱۴.۲.۱. یک چرخه [۱۹] یا یک مسیر تناوبی از سیستم(۱.۱) هر منحنی جواب بسته‌ای از این سیستم است که نقطه ثابت آن نیست.

تعریف ۱۵.۲.۱. چرخه Γ یک چرخه حدی [۲۰] از یک سیستم مسطح نامیده می‌شود هرگاه Γ مجموعه ω-حدی یا α-حدی مسیرهایی از سیستم بجز خودش باشد. یعنی مسیرها در یک همسایگی از چرخه حدی بسته نیستند بلکه به صورت مارپیچی به این چرخه حدی نزدیک می شوند یا از آن دور می شوند.

تعریف ۱۶.۲.۱. چرخه حدی Γ یک چرخه حدی پایدار [۲۱] نامیده می‌شود هرگاه فقط مجموعه ω-حدی هر مسیری در یک همسایگی از خودش باشد و اگر فقط مجموعه α-حدی هر مسیری در یک همسایگی از خودش باشد، یک چرخه حدی ناپایدار [۲۲] نامیده می شود.

[۱۹] cycle
[۲۰] Limit cycle
[۲۱] Stable limit cycle
[۲۲] Unstble limit cycle

تعریف ۱.۲.۱۷. چرخه حدی Γ یک چرخه حدی شبه پایدار [۲۳] نامیده می‌شود هرگاه هم مجموعه ω-حدی بعضی از مسیرهای سیستم بجز خودش و هم مجموعه α-حدی بعضی از مسیرهای سیستم بجز خودش باشد.



شکل ۱.۲: (a) چرخه حدی پایدار، (b) چرخه حدی ناپایدار و (c) چرخه حدی شبه پایدار

قضیه ۱.۲.۱۸. *فرض کنید $f \in C^1(E)$ و E زیرمجموعه بازی از $\mathbb{R}^n$ شامل مدار متناوب $\gamma(t)$ سیستم(۱.۱) با دوره تناوب T باشد در این صورت $\gamma(t)$ مجانبا پایدار نیست اگر و تنها اگر*

$$\int_0^T \nabla . f(\gamma(t))dt \leq 0.$$

برهان. به[۱۰] صفحه ۲۳۰ مراجعه کنید. □

مثال ۱.۲.۱۹. سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x' = y + x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2) = p(x,y) \\ y' = x + y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2) = q(x,y) \end{cases} \qquad (1.6)$$

با اختیار $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ ملاحظه می‌کنیم که سیستم قطبی شده متناظر با سیستم(۱.۶) به صورت زیر است:

$$\begin{cases} r' = r(r^2-1)(r^2-2) \\ \theta' = -1 \end{cases}$$

جواب‌های تناوبی سیستم(۱.۶) عبارتنداز:

$$(x_1(t), y_1(t)) = (\cos t, -\sin t), \; (x_2(t), y_2(t)) = (\sqrt{2}\cos t, -\sqrt{2}\sin t).$$

واضح است که $(x_1(t), y_1(t)) = (\cos t, -\sin t)$ یک جواب غیر ثابت تناوبی با دوره تناوب 2π برای سیستم(۱.۶) است و مدار بسته این جواب تناوبی در صفحه $(x(t), y(t))$ دایره واحد $c_1 : \; x^2+y^2 = 1$ است. برای این‌که پایداری یا ناپایداری مدار بسته c_1 را نشان دهیم، با استفاده

[۲۳] Semi stable

از قضیه قبل داریم:

$$I=\int_{\circ}^{T}(a_{۱۱}(t)+a_{۲۲}(t))dt$$

که در آن

$$a_{۱۱}=\frac{\partial p}{\partial x}|_{(\cos t,-\sin t)}=-۲\cos^{۲}t,\qquad a_{۲۲}(t)=\frac{\partial q}{\partial y}|_{(\cos t,-\sin t)}=-۲\sin^{۲}t.$$

بنابراین

$$I=\int_{\circ}^{۲\pi}(-۲\cos^{۲}t-۲\sin^{۲}t)dt=-۲|_{\circ}^{۲\pi}=-۴\pi<\circ,$$

نشان می‌دهد که مدار ۱ $c_۱:\ x^{۲}+y^{۲}=۱$ یک چرخه حدی پایدار است.

حال رفتار سایر جواب‌های سیستم غیر خطی(۶.۱) را در مجاورت مدار بسته $c_۱$ تعیین می‌کنیم، رفتار جواب تناوبی $(x_۲(t),y_۲(t))=(\sqrt{۲}\cos t,-\sqrt{۲}\sin t)$ با دوره تناوب ۲π را بررسی می‌کنیم. واضح است که در این حالت

$$a_{۱۱}(t)=\frac{\partial p}{\partial x}|_{(\sqrt{۲}\cos t,-\sqrt{۲}\sin t)}=۴\cos^{۲}t,\ a_{۲۲}(t)=\frac{\partial q}{\partial y}|_{(\sqrt{۲}\cos t,-\sqrt{۲}\sin t)}=۴sin^{۲}t.$$

بنابراین

$$I=\int_{\circ}^{۲\pi}(۴\cos^{۲}t+۲\sin^{۲}t)dt=۴|_{\circ}^{۲\pi}=۸\pi>\circ,$$

نشان می‌دهد که مدار بسته ۲ $c_۲:\ x^{۲}+y^{۲}=۲$ یک چرخه حدی ناپایدار است.

تعریف ۲۰.۲.۱. $S\subseteq\mathbb{R}^n$ نسبت به سیستم $x'=f(x,t)$ پایا نامیده می‌شود، هرگاه به ازای $x_\circ\in S$، $\varphi(t,t_\circ,x_\circ)\in S$.

$S\subseteq R^n$ پایای مثبت نامیده می‌شود هرگاه به ازای $x_\circ\in S$ و $t\geq t_\circ$، $\varphi(t,t_\circ,x_\circ)\in S$ و $S\subseteq R^n$ پایای منفی نامیده می‌شود هرگاه به ازای $x_\circ\in S$ و $t\leq t_\circ$ $\varphi(t,t_\circ,x_\circ)\in S$.

۱.۲.۱ معادلات غیر خطی

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n خودگردان[۲۴] $x'=f(x)$ است که در آن $x\in\mathbb{R}^n$ و $f:E\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ یک تابع و $E\subset\mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای باز است. همچنین صورت کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n غیر خودگردان[۲۵] به صورت $x'=f(x,t)$ است که در آن $x\in\mathbb{R}^n$ و $f:E\times I\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ یک تابع است.

[۲۴] autonomous
[۲۵] non autonomous

منظور از جواب سیستم مرتبه n بر بازه $J \subseteq \mathbb{R}$ تابعی مثل $x(t) : J \longrightarrow E$ است که برای معادلات دیفرانسیل خودگردان $x'(t) = f(x(t))$ و برای معادلات دیفرانسیل ناخودگردان $x'(t) = f(x(t), t)$ است.

شاخه‌ای از معادلات دیفرانسیل که در این تحقیق بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد معادلات دیفرانسیل آبل می‌باشد. اگر $n = ۳$، آن‌گاه معادله

$$\frac{dx}{dt} = a_۳(t)x^۳ + a_۲(t)x^۲ + a_۱(t)x + a_۰(t)$$

که در آن $a_۰, a_۱, a_۲, a_۳ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \in [۰, ۱], x \in \mathbb{R}$، معادله آبل نامیده می‌شود.[۹]

۳.۱ انشعاب میدان های برداری

سیستم‌های که جنبه فیزیکی دارند، اغلب با پارامتر همراه هستند که در معادلات مبین آن‌ها ظاهر می‌شود. وقتی که این پارامترها تغییر می‌کند، ممکن است تغییراتی در ساختار کیفی جواب‌ها رخ دهد، این تغییرات، انشعاب[۲۶] و مقدار پارامتر، مقدار انشعاب نامیده می‌شود. از آن‌جایی که این نوع انشعاب‌ها معمولا در مجاورت نقطه بحرانی رخ می‌دهد انشعاب‌های موضعی[۲۷] نامیده می‌شود.

میدان برداری پارامتری زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{y} = g(y, \lambda), \qquad y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^p \tag{۷.۱}$$

که در آن g تابعی است که بر یک مجموعه باز چون $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^k است. حال فرض می‌کنیم که میدان برداری (۷.۱) دارای یک نقطه ثابت مثل $(y_۰, \lambda_۰) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ باشد، یعنی $g(y_۰, \lambda_۰) = ۰$.

حال دو سوال اساسی به ذهن می‌رسد:

سوال اول: نقطه ثابت $(y_۰, \lambda_۰)$ از میدان برداری(۷.۱) پایدار است یا ناپایدار؟

سوال دوم: آیا تغییرات λ می‌تواند پایداری یا ناپایداری نقطه ثابت $(y_۰, \lambda_۰)$ را تحت تاثیر قرار دهد؟

برای این‌که بتوانیم به سوال اول پاسخ دهیم باید میدان برداری(۷.۱) را در مجاورت نقطه بحرانی $(y_۰, \lambda_۰)$ خطی‌سازی کنیم. میدان برداری خطی شده متناظر با سیستم(۷.۱) در مجاورت نقطه بحرانی $(y_۰, \lambda_۰)$ عبارتست از:

$$y' = D_y g(y_۰, \lambda_۰), \qquad y \in \mathbb{R}^n \tag{۸.۱}$$

[۲۶] bifurcation
[۲۷] local bifurcation

باید توجه داشت که اگر $D_y g(y_\circ, \lambda_\circ)$ دارای برخی مقادیر ویژه روی محور موهومی باشد، یعنی نقطه ثابت ناهذلولوی سیستم باشد، رفتار دینامیکی جدیدی برای سیستم می‌تواند رخ دهد، یعنی می‌تواند نقاط ثابت جدیدی به وجود آید یا نقاط ثابت از بین برود و یا می‌تواند رفتارهای دینامیکی وابسته به زمان چون حالت متناوب یا شبه متناوب یا حتی رفتار دینامیکی آشوبناکی برای سیستم رخ دهد.

حال اگر $D_y g(y_\circ, \lambda_\circ)$ دارای یک مقدار ویژه صفر و مابقی مقادیر ویژه آن دارای جزء حقیقی مخالف صفر باشند آن‌گاه رفتار دینامیکی سیستم(۷.۱) در مجاورت نقطه بحرانی $(y_\circ, \lambda_\circ)$ متحمل انشعاب از نوع زینی- گره، انشعاب دو شاخه‌ای، انشعاب در راستای نقطه بحرانی خواهد شد و اگر $D_y g(y_\circ, \lambda_\circ)$ دارای یک جفت مقدار ویژه موهومی محض باشد و بقیه مقادیر ویژه آن دارای جزء حقیقی مخالف صفر باشند آن‌گاه سیستم متحمل انشعاب از نوع انشعاب هاف[۲۸] خواهد شد.

۱.۳.۱ انشعاب هاف

در انشعاب هاف ما به این نکته علاقه‌مندیم که بتوانیم ساختار مسیر را برای yهای به قدر کافی کوچک با تغییرات λ تعیین کنیم. برای تجزیه و تحلیل، روند منظمی را دنبال می‌کنیم. به موجب قضیه خمینه مرکزی می‌دانیم که می‌توان ساختار مسیر(۷.۱) را در مجاورت نقطه بحرانی $(y_\circ, \lambda_\circ)$ به کمک میدان برداری P پارامتری روی یک خمینه مرکزی دو بعدی بررسی کرد. بدون آن‌که به کلیت مساله لطمه‌ای وارد شود، فرض کنید که $P = ۱$ یعنی همه پارامترها به جز یک را ثابت نگه داشته و رفتار کیفی سیستم را برآورد می‌کنیم.

در واقع میدان برداری دارای نمایش زیر است:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re\lambda(\mu) & -Im\lambda(\mu) \\ Im\lambda(\mu) & Re\lambda(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f^۱(x, y, \mu) \\ f^۲(x, y, \mu) \end{pmatrix}$$

که در آن $(x, y, \mu) \in \mathbb{R}^۱ \times \mathbb{R}^۱ \times \mathbb{R}^۱$. یعنی روی خمینه مرکز دو بعدی سیستم دارای نمایش به صورت بالا خواهد بود. همچنین

$$\begin{cases} \lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu) \\ \overline{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) - i\omega(\mu) \end{cases} \qquad (۹.۱)$$

که در آن $\alpha(\circ) = \circ$ و $\omega(\circ) \neq \circ$. صورت نرمال میدان برداری فوق به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x' = \alpha(\mu)x - \omega(\mu)y + (a(\mu)x - b(\mu)y)(x^۲ + y^۲) + O(|x|^۵, |y|^۵) \\ y' = \omega(\mu)x + \alpha(\mu)y + (b(\mu)x + a(\mu)y)(x^۲ + y^۲)O(|x|^۵, |y|^۵) \end{cases} \qquad (۱۰.۱)$$

[۲۸] Hopf bifurcation