به نام خـــدا

دانشکده ی علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش محض

کوهمولوژی کراندار دوم از گروه های $hypo-Abelian$

از

زهرا مؤذن لیمو دهی

استاد راهنما

دکتر حسین سهله

شهریور ماه ۸۹

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

با تشکر و قدردانی از:

- **جناب آقای دکتر حسین سهله، استاد گرانمایه به پاس برخورداری از کلاس درس ایشان و نیز به خاطر راهنمایی های ایشان که در زمینه ی تدارک این پایان نامه بسیار یاری بخش و سودمند بوده است.**
- **اساتید گرامی: آقایان دکتر شهاب الدین ابراهیمی، دکتر اسماعیل انصاری و دکتر فرهاد درستکار که از دروس ایشان استفاده نموده ام.**
- **دوست خوبم اشرف صفابخش که مرا در ویرایش این پایان نامه یاری نمود.**

فهرست مطالب

چکیده ی فارسی .... ث

چکیده ی انگلیسی .... ج

مقدمه ۱

فصل صفر – تعاریف، مثال ها و قضایای مورد نیاز

۰-۱. تعاریف و مثال ها ۴

۰-۲. قضایا ۱۰

فصل اول – کوهمولوژی کراندار دوم

۱-۱. کوهمولوژی کراندار ۱۲

۱-۲. چند قضیه ی اساسی.. ۱۴

فصل دوم – کوهمولوژی کراندار دوم از گروه های حل پذیر باقیمانده

۲-۱. بررسی حل پذیری گروه های آزاد ۱۸

۲-۲. چند قضیه درباره ی گروه های حل پذیر.. ۲۲

۲-۳. محاسبه ی کوهمولوژی کراندار دوم از گروه های حل پذیر باقیمانده ۳۴

فصل سوم – کوهمولوژی کراندار دوم از گروه های $hypo-Abelian$

۳-۱. چند قضیه ی دیگر ۴۵

۳-۲. کوهمولوژی کراندار دوم گروه های $hypo-Abelian$. ۵۰

واژه نامه ۵۲

منابع فا رسی ۵۶

منابع انگلیسی.. ۵۷

چکیده

کوهمولوژی کراندار دوم از گروه های $hypo-Abelian$

زهرا مؤذن لیمو دهی

در این پایان نامه کوهمولوژی کراندار دوم یک گروه را تعریف کرده و سپس کوهمولوژی کراندار دوم گروه های $hypo-Abelian$ را بررسی می کنیم. با استفاده از سری مشتق یک گروه، ثابت می کنیم که حدس فوجی وارا برای گروه های $hypo-Abelian$، گروه هایی بدون زیرگروه کامل نابدیهی، درست است.

کلید واژه ها: کوهمولوژی کراندار دوم، گروه های $hypo-Abelian$ ، گروه های میانگین پذیر، گروه های حل پذیر باقیمانده

Abstract:

the Second Bounded Cohomology of a Hypo-Abelian Group

Zahra moazen limoodehi

In this dissertation we define the second bounded cohomology of a group, then the second bounded cohomology of a hypo-Abelian group will be defined.
By using the derived series of a certain group it will be proved that Fujiwara's conjecture for a hypo-Abelian group is true that is for groups without any non-trivial perfect subgroups.

Keywords: second bounded cohomology, hypo-Abelian groups, amenable group, residually solvable group.

مقدمه:

در این پایان نامه که براساس مرجع [۱۰] بنا شده است، کوهمولوژی کراندار دوم رده ی خاصی از گروه ها بررسی می شود. کوهمولوژی کرانداریعنی $\widehat{H}^*(G)$ اولین بار روی گروه های گسسته تعریف شده است. این تعریف در قضیه ی هرش $(Hirsch)$ و ثرستون $(Thurston)$ ارائه شده است. بعد ها گرومف $(Gromov)$ کوهمولوژی کراندار از فضای توپولوژیک را تعریف کرد وقضیه های مهمی در این باره اثبات نمود. او هم چنین تئوری کوهمولوژی کراندار را برای نمایش اهمیت آن روی هندسه ی ریمانی به کار بست.[۶]

ایوانف در [۷] ثابت کرده است که کوهمولوژی کراندار از یک فضای توپولوژیک مجهز به یک پوشش عمومی و گروههای بنیادی اش، یکسانند. این موضوع مطالعه ی تئوری کوهمولوژی کراندار را به طور همزمان از دو نقطه نظر تئوری گروه و توپولوژی ممکن می سازد.

فوجی وارا نیز حدس زیر را برای کوهمولوژی کراندار گروه دلخواه G بیان کرده است.

فرض کنید G یک گروه باشد. اگر $\widehat{H}^۲(G) \neq ۰$، آنگاه $\widehat{H}^۲(G)$ به عنوان یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ دارای بعد نامتناهی است. [۴]

با این حال گروه هایی وجود دارند که کوهمولوژی کراندار دوم آنها صفر نیست ولی بُعد آنها متناهی است. به طور مثال اگر $Homeo_+(S^۱)$ همه ی هومئورفیسم های روی $S^۱$ رادر نظر بگیریم، آنگاه:

$$\widehat{H}^۲\big(Homeo_+(S^۱)\big) \cong \mathbb{R}$$

یا این که $\widehat{H}^۲(SL(۲,\mathbb{R})) \cong \mathbb{R}$ که در آن $SL(۲,\mathbb{R})$ گروه ماتریس های ۲×۲ روی $\mathbb{R}$ با دترمینان برابر یک است. [۹]

مثال هایی که می توانند حدس فوجی وارا را رد کنند گروه های خطی اند. یک خاصیت مشترک گروه های خطی این است که دارای زیرگروه کامل اند یعنی گروه هایی که با زیر گروه تعویض گرشان یکسان اند.

در این پایان نامه از سری مشتق شده از گروه ها استفاده می کنیم و حدس فوجی وارا را برای گروه هایی که دارای زیرگروه کامل نا بدیهی نیستند اثبات می کنیم. در فصل صفر یک سری از تعاریف و قضایای مورد نیاز بیان شده است.

در فصل اول، تعریف کوهمولوژی کراندار دوم بیان می شود و سپس دو یکریختی بین کوهمولوژی کراندار دوم و زیرگروه نرمال میانگین پذیرش و نیز زیر گروه تعویض گرش ذکر می شود. در فصل دوم ثابت می شود که کوهمولوژی کراندار دوم از یک گروه حل پذیر باقیمانده، صفر یا با بعد نامتناهی است. سپس در فصل سوم ثابت می کنیم که کوهمولوژی کراندار دوم از گروه های $hypo-Abelian$ صفر یا با بعد نامتناهی است.

در این پایان نامه همه جا G یک گروه گسسته و e عنصر همانی آن است. ω عدد ترتیبی نامتناهی است. نماد ■ نشانه ی پایان اثبات قضیه است. نماد c-b-a یعنی فصل a، بخش b و c نمایش دهنده ی شماره ی تعریف یا قضیه است.

فصل صفر

تعاریف، مثال ها وقضایای مورد نیاز

۵-۱. تعاریف و مثال ها

۵-۱-۱ تعریف: فرض کنید F یک میدان باشد و $F^{n\times n}$ مجموعه ی تمام ماتریس های $n \times n$ روی F (یعنی با درایه های متعلق به F) باشد. در این صورت مجموعه ی

$$GL(n,F) = \left\{A \in F^{n\times n} \middle| \ A \text{ وارون پذیر است} \right\}$$

نسبت به ضرب ماتریس ها یک گروه است. آن را گروه خطی عمومی از درجه ی n روی میدان F می نامند. هم چنین مجموعه

$$SL(n,F) = \{A \in GL(n,F) |\, det(A) = ۱\}$$

نسبت به ضرب ماتریس ها یک گروه است. این گروه را گروه خطی ویژه از درجه ی n روی میدان F می نامند. [۳]

۵-۱-۲ تعریف: فرض کنید G یک گروه باشد و $U = \{xyx^{-۱}y^{-۱} | x,y \in G\}$. کوچک ترین زیر گروه G حاوی U را با $\acute{G}$ نشان می دهیم و آن را زیر گروه تعویض گر G می نامیم. به آسانی می توان نشان داد که $\acute{G}$ در G نرمال و $G/\acute{G}$ آبلی است.

چون $\acute{G}$ یک گروه است پس می توان درباره ی زیرگروه های تعویض گر آن بحث کرد.

$$G^{(۲)} = \acute{\left(\acute{G}\right)}.$$

$G^{(۲)}$ زیر گروهی است که به وسیله ی همه ی عناصر $\left\{\acute{x}\acute{y}(\acute{x})^{-۱}(\acute{y})^{-۱} \middle| \acute{x},\acute{y} \in \acute{G}\right\}$ تولید شده است.

$G^{(۲)}$ نه تنها یک زیرگروه نرمال $\acute{G}$ است بلکه زیر گروه نرمال G نیز می باشد. کار را به همین شیوه ادامه می دهیم و زیرگروه های تعویض گر مراتب بالاتر $G^{(n)}$ را با قرار دادن $G^{(n)} = \acute{\left(G^{(n-۱)}\right)}$ تعریف می کنیم. هر $G^{(n)}$ یک زیرگروه نرمال G است و $G^{(n)}/G^{(n-۱)}$ یک گروه آبلی است. [۱]

۰-۱-۳ مثال: G را گروه همه ی ماتریس های ۲×۲ حقیقی مانند $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ که در آن $ad - bc \neq ۰$ تحت عمل ضرب ماتریس ها در نظر می گیریم. آنگاه

$$\acute{G} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G \middle| ad - bc = ۱ \right\}$$

به عبارت دیگر $\left(GL(۲, \mathbb{R})\right)' = SL(۲, \mathbb{R})$.

۰-۱-۴ مثال: G را گروه همه ی ماتریس های ۲×۲ حقیقی مانند $\begin{bmatrix} a & b \\ ۰ & d \end{bmatrix}$ که در آن $ad \neq ۰$ تحت عمل ضرب ماتریس ها در نظر بگیرید. در این صورت

$$\acute{G} = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ & x \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}.$$

۰-۱-۵ تعریف (اعداد ترتیبی متناهی و نا متناهی): اعداد ترتیبی متناهی، همان اعداد طبیعی یا همان اعداد شمارشی ۱، ۲، ۳، ... هستند. هم چنانکه اعداد اصلی نامتناهی از مجموعه ی نامتناهی نتیجه می شود، اعداد ترتیبی نامتناهی هم از مجموعه ی خوش ترتیب نامتناهی به وجود می آیند. اعداد ترتیبی متناهی یا نا متناهی را یک مفهوم اولیه فرض می کنیم که

الف) به هر مجموعه ی خوش ترتیب $(A, \leq)$ یک عدد ترتیبی، که آن را با $ord(A, \leq)$ نشان می دهیم، نسبت داده می شود. اگر α یک عدد ترتیبی باشد، یک مجموعه ی خوش ترتیب $(A, \leq)$ وجود دارد به طوری که $ord(A, \leq) = \alpha$.

ب) $ord(A, \leq) = ۰$ اگر و تنها اگر $A = \emptyset$.

پ) اگر مجموعه ی خوش ترتیب $(A, \leq)$ به صورتی باشد که برای عدد ترتیبی k داشته باشیم $A \sim \{۱, ۲, \dots, k\}$ آنگاه $ord(A, \leq) = k$.

عدد ترتیبی مجموعه ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$، با رابطه ی کوچکتر یا مساوی معمولی، را به طور معمول با حرف یونانی ω، نشان می دهیم یعنی $\omega = ord\{۱, ۲, ...\}$.

اعداد ترتیبی حدی: λ عدد ترتیبی حدی است اگر و تنها اگر $\lambda > ۰$ و به ازای هر عدد $\beta < \lambda$، عددی ترتیبی چون γ وجود داشته باشد به طوری که $\beta < \gamma < \lambda$. [۲]

۵-۱-۶ تعریف: یک سری مشتق از یک گروه G خانواده ای است از زیرگروه های

$$G = G^{(۰)} \supseteq G^{(۱)} \supseteq G^{(۲)} \supseteq \cdots$$

که در آن به ازای $n \geq ۱$، $G^{(n)}$ زیر گروه تعویض گر از $G^{(n-۱)}$ است. یعنی

$$\left(G^{(n-۱)}\right)' = G^{(n)} = \left[G^{(n-۱)}, G^{(n-۱)}\right]$$

حال سری مشتق شده به طور نامحدود از G، گسترشی از سری مشتق به اعداد ترتیبی بالاتر است که با قانون زیر تعریف می شود.

$$G^{(\alpha)} = \left[G^{(\alpha-۱)}, G^{(\alpha-۱)}\right] \qquad \forall \alpha \geq ۱$$

$$G^{(\lambda)} = \bigcap_{\beta<\lambda} G^{(\beta)}$$

که در آن α یک عدد ترتیبی و λ یک عدد ترتیبی حدی است.

هم چنین داریم:

$$\alpha \leq \beta \implies G^{(\beta)} \trianglelefteq G^{(\alpha)}$$

به ویژه داریم:

$$G^{(\alpha)} \trianglelefteq G = G^{(0)} \qquad \forall\alpha$$

۰-۱-۷ تعریف: گروه G را حل پذیر گویند هر گاه بتوان زنجیری متناهی از زیرگروه ها مانند

$$G = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_k = e$$

که در آن هر N_i یک زیرگروه نرمال N_{i-1} است، چنان یافت که هر گروه خارج قسمتی N_{i-1}/N_i آبلی باشد. [۱]

۰-۱-۸ مثال: هر گروه آبلی حل پذیر است زیرا $N_0 = G$ و $N_1 = e$ در تعریف ۰-۱-۷ صدق می کند.

۰-۱-۹ مثال: S_3 (گروه متقارن از درجه ی ۳) حل پذیر است. با فرض $N_1 = \{e , (1,2,3) , (1,3,2)\}$، N_1 یک زیرگروه نرمال S_3 است و S_3/N_1 و N_1/e هر دو آبلی و به ترتیب از مرتبه های ۲ و ۳ اند.

۰-۱-۱۰ مثال: S_n به ازای $n \geq 5$ حل پذیر نیست. [۱]

۰-۱-۱۱ تعریف: فضای برداری X را نُرم دار گویند اگر برای هر $x \in X$ عدد حقیقی مثبت $\|x\|$ باشد به طوری که در شرایط زیر صدق کند.

$$\forall x, y \in X , \qquad \alpha \in \mathbb{R}: \quad (1) \ \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$(2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$$

$$(3) \quad \|x\| > 0 \qquad if \quad x \neq 0$$

[۱۲]

۰-۱-۱۲ تعریف: فضای X را یک فضای باناخ گویند هرگاه X یک فضای نُرم دار و هر دنباله ی کُشی در آن همگرا باشد. [۱۲]

۰-۱-۱۳ تعریف: یک نیم نرم روی یک فضای برداری X، یک تابع حقیقی مانند p روی X است به طوری که به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

(۱) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

(۲) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ [۱۲]

۰-۱-۱۴ تعریف: فرض کنیم S یک مجموعه باشد. آنگاه $B(S)$ مجموعه ی تمام توابع کراندارخطی روی S است.

$B(S)$ یک فضای باناخ با نرم $\|f\| = sup\{|f(x)|; x \in S\}$ است.

تابع خطی $m: B(S) \longrightarrow \mathbb{R}$ میانگین است اگر به ازای هر $f \in B(S)$ داشته باشیم:

$$inf\{|f(x)|; x \in S\} \leq m(f) \leq sup\{|f(x)|; x \in S\}.$$

فرض کنید گروه گسسته ی G روی S از راست عمل کند آنگاه G از چپ روی $B(S)$ با توجه به فرمول زیر عمل خواهد کرد:

$$g.f(s) = f(sg) \qquad g \in G, f \in B(S), s \in S$$

میانگین m روی $B(S)$ را پایای راست گوییم اگر به ازای هر $g \in G$ و $f \in B(S)$ داشته باشیم:

$$m(g.f) = m(f).$$

اگر یک پایای ثابت راست روی $B(G)$ وجود داشته باشد، G را میانگین پذیر گویند.[۷]

۰-۱-۱۵ مثال: گروه های متناهی، گروه های آبلی، گروه های حل پذیر، زیرگروه ها و تصاویر همو مورفیک از یک گروه میانگین پذیر همگی میانگین پذیرند.

۰-۱-۱۶ تعریف: فرض کنید G یک گروه و V نیز یک G-مدول باشد. V^G را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$V^G = \{v \in V: gv = v \quad \forall g \in G\}.$$

۰-۱-۱۷ تعریف: یک گروه G، کامل است اگر با زیر گروه تعویض گرش برابر باشد یعنی $G = \acute{G}$.

یک زیر گروه کامل ماکزیمال، زیرگروهی کامل است که در هیچ زیرگروه کامل بزرگتری قرار نداشته باشد.

۰-۱-۱۸ مثال: $SL(۲,\mathbb{R})$ گروه کامل است.

۰-۱-۱۹ تعریف: یک گروه G را $hypo - Abelian$ گویند اگر هر زیرگروه کامل ماکزیمال در آن بدیهی باشد. به عبارت دیگر گروه های $hypo - Abelian$ دارای زیرگروه کامل نابدیهی نیستند.

۰-۱-۲۰ مثال: همه ی گروه های آبلی $hypo - Abelian$ هستند.

۰-۱-۲۱ تعریف: یک سری نرمال $G = G_۰ > G_۱ > G_۲ > \cdots > G_n = \{e\}$ را برای یک گروه G یک سری مرکزی برای G گویند اگر به ازای هر i، $G_i/G_{i+۱}$ $(۰\leq i < n)$، در مرکز $G/G_{i+۱}$ باشد. [۳]

۰-۱-۲۲ تعریف: یک گروه G را پوچ توان گویند اگر دارای یک سری مرکزی باشد. [۳]

۰-۱-۲۳ تعریف: فرض کنید G یک گروه و p یک عدد اول باشد. G را یک p-گروه گویند اگر به ازای هر $g \in G$، عدد صحیح نامنفی n_g وجود داشته باشد به نحوی که $o(g) = p^{n_g}$. ($o(g)$ مرتبه ی عنصر g است) [۳]

۰-۱-۲۴ مثال: تمام گروه های متناهی از مرتبه ی توانی از p یک p-گروه هستند.

۰-۲. قضایا

۰-۲-۱. لم: G وقتی و فقط وقتی حل پذیر است که به ازای عدد صحیحی چون k، $G^{(k)} = (e)$. [۱]

۰-۲-۲. قضیه: اگر p یک عدد اول باشد، آنگاه هر p-گروه متناهی پوچ توان است. [۳]

۰-۲-۳. قضیه: هر گروه پوچ توان حل پذیر است. [۳]

۰-۲-۴. قضیه: به ازای هر گروه G، گروه آزاد چون F و زیرگروه نرمالی از آن مانند K هست به قسمی که:

$$G \cong F/K$$

فصل اول

کوهمولوژی کراندار دوم

در این فصل کوهمولوژی کراندار $\widehat{H}^*(G)$ تعریف می شود و چند قضیه ی اساسی در مورد کوهمولوژی کراندار دوم یک گروه و زیر گروه های تعویض گر و میانگین پذیرش بیان و اثبات می شود.

۱-۱. کوهمولوژی کراندار

در این بخش کوهمولوژی کراندار را برای گروه دلخواه G تعریف می کنیم.

به ازای عدد صحیح و مثبت $n \geq ۱$ فرض کنید:

$$C^n(G) = \left\{ f: G^n \longrightarrow \mathbb{R} \middle| G^n = \underbrace{G \times G \times \dots G}_{n \text{ بار}} \text{ , } f \text{یک تابع است} \right\}.$$

کوهمولوژی معمولی $H^*(G)$ به کمک دنباله ی کمپلکس زیر تعریف می شود:

$$\circ \xrightarrow{\partial_{-۱}=\circ} \mathbb{R} \xrightarrow{\partial_\circ=\circ} C(G) \xrightarrow{\partial_۱} C^۲(G) \xrightarrow{\partial_۲} C^۳(G) \longrightarrow \dots$$

که به ازای هر $n \geq ۱$:

$$\partial_n(f)(g_۱, \dots, g_{n+۱}) = f(g_۲, \dots, g_{n+۱}) + \sum_{i=۱}^{n} (-۱)^i f(g_۱, \dots, g_i g_{i+۱}, \dots, g_{n+۱}) + (-۱)^{n+۱} f(g_۱, \dots, g_n) \qquad (۱-۱)$$

و کوهمولوژی مرتبه ی n ام برابر $H^n(G) = \frac{\ker \partial_n}{\mathrm{Im}\partial_{n-۱}}$ است.

۱-۱-۱. تعریف: فرض کنید $B^n(G) = \{f: G^n \longrightarrow \mathbb{R} | \|f\| < \infty\}$.

$$\|f\| = sup\{|f(g_۱, \dots, g_n)|: (g_۱, \dots, g_n) \in G^n\}.$$

دنباله ی کمپلکس زیر را در نظر می گیریم:

$$\circ \xrightarrow{d_{-1}=\circ} \mathbb{R} \xrightarrow{d_\circ=\circ} B(G) \xrightarrow{d_1} B^2(G) \xrightarrow{d_2} B^3(G) \longrightarrow \ldots \qquad (2-1)$$

که در آن:

$$d_n(f)(g_1, \ldots, g_{n+1}) = f(g_2, \ldots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1, \ldots, g_n)$$

n اُمین کوهمولوژی از کمپلکس $(1-2)$ را n اُمین کوهمولوژی کراندار از G با ضریب بدیهی $\mathbb{R}$ می نامیم و با $\widehat{H}^n(G) = \frac{\ker d_n}{\mathrm{Im} d_{n-1}}$ نمایش می دهیم. حال داریم $\widehat{H}^\circ(G) = \ker(d_\circ) = \mathbb{R}$. هم چنین:

$$\begin{aligned} \widehat{H}^1(G) = \ker(d_1) &= \{f \in B(G) | d_1(f) = \circ\} \\ &= \{f \in B(G) | f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1) = \circ\} \\ &= \{f \in B(G) | f(g_1 g_2) = f(g_1) + f(g_2)\}. \end{aligned}$$

بنابراین $\widehat{H}^1(G)$ فضایی از همه ی همومورفیسم های کراندار از G به $\mathbb{R}$ است. اگر همومورفیسم کراندار از G به $\mathbb{R}$ موجود نباشد آنگاه

$$\widehat{H}^1(G) = ker(d_1) = \circ.$$