بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان :

R-ایده ال های حلقه ارزیابی دوبرووین

استاد راهنما :

دکتر محمد حسین حسینی

استاد مشاور :

دکتر حسین فضایلی مقیمی

تهیه و تنظیم :

خدیجه صانعی طبس

زمستان ۱۳۸۷

به نام خدا

فرم شماره ۵

دانشگاه بیرجند
مدیریت تحصیلات تکمیلی

تاریخ : ....
شماره : ....
پیوست : ....

صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تاییدات خداوند متعال جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی کارشناسی ارشد **خانم خدیجه صانعی طبس**

به شماره دانشجویی: **۸۵۲۳۱۱۲۱۱۴** رشته: **ریاضی** گرایش : **جبر** دانشکده: **علوم** دانشگاه بیرجند

تحت عنوان : R-ایده آلهای حلقه ارزیابی دوبروین

به ارزش: ٦ واحد درساعت: ۱۰ روز: **شنبه** مورخ: ۸۷/۱۱/۱۲

با حضور اعضای محترم جلسه دفاع و نماینده تحصیلات تکمیلی به شرح ذیل تشکیل گردید :

سمت	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
استاد راهنما	آقای دکتر محمد حسین حسینی	استادیار	
استاد مشاور	آقای دکترحسین فضائلی مقیمی	استادیار	
داور اول	آقای دکتر محمد مهدی نصرآبادی	استادیار	
داور دوم	آقای دکتر حسین اقدامی	استادیار	
نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر مسعود امان	استادیار	

نتیجه ارزیابی به شرح زیر مورد تایید قرار گرفت:

☑ قبول (با درجه: عالی و امتیاز ۱۹) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود

۱- عالی (۲۰-۱۸) ۲- بسیار خوب (۱۷/۹۹ - ۱۶) ۳- خوب (۱۵/۹۹ - ۱۴) ۴- قابل قبول (۱۳/۹۹ - ۱۲)

۱۳۸۸/۱۲/۲۶

تقدیم به

روح بلند پدرم ، همو که عمرش را در راه سربلندی فرزندانش، سپری کرد

و مادرم که دعای خیرش همواره بدرقه راهم است

و همسرم که همیشه دلگرمی من برای ادامه راهم بوده است.

سپاس

سپاس و ستایش خداوندی را سزاست که به ما توان اندیشیدن بخشید و قدرت و فرصت آموختن داد. او را سپاس می گویم که همواره نور توکل بر او همچون چراغی فرا رویم بود.

بر خود لازم مي دانم که از راهنماییهای بی شائبه و زحمات استاد ارجمندم جناب آقای دکتر حسینی کمال تشکر را داشته باشم. همچنین از آقای دکتر فضایلی ، مدیر گروه محترم که مشاور بنده در این کار بودند ونیز آقایان دکتر اقدامی و دکتر نصر آبادی که قبول زحمت فرموده و داوری و تصحیح پایان نامه را عهده دار بودند بسیار سپاسگذارم. از همه اساتید گروه ریاضی که در طی دو سال تحصیل از حضورشان بهره بردم و سایر مسوولین و کارمندان به خصوص آقای علی آبادی سپاس ویژه دارم.

تشکر خود را نثار خانواده خودم و خانواده همسرم و نیزدوستانم می کنم که همواره به خصوص در طی این دوره ، بسیار حامی و پشتیبانم بودند و با دعای خیر خود به من دلگرمی بخشیدند.

از همسر مهربانم که در لحظه لحظه کارم در کنارم و پشتیبانم بود و سختی های کارم را به جان خرید، صمیمانه قدردانی می کنم.

باشد تا زحمات همه عزیزان را ارج نهم و با استعانت از پروردگار، گامی در جهت اعتلای علم و دانش بردارم.

چکیده

ترتیب R در حلقه آرتینی ساده Q ، یک حلقه ارزیابی دوبروووین نامیده می شود، اگر R بیزوت و $R/J(R)$ آرتینی ساده باشد که $J(R)$ رادیکال ژاکوبسون حلقه R است.

در این پایان نامه، R - ایده ال هایی چون I که به عنوان R - ایده ال های راست متناهیاً تولید شده نیستند و $O_r(I) = S = O_l(I)$ را توصیف نموده و ثابت خواهیم کرد که عناصر پایدار کننده ای مثل c و ایده ال های $J(S)$ - اولیه ای چون A وجود دارد که $I = cA$.

به عنوان کاربردی از این نتایج، تمام R - ایده ال ها را بر حسب عناصر پایدار کننده و ایده ال های اولیه، در حالتی که Q بر روی مرکزش متناهی البعد است، توصیف خواهیم کرد.

کلمات کلیدی: حلقه ارزیابی دوبروووین، عناصر پایدار کننده، اول گولدی و ایده ال اولیه.

فهرست مطالب

مقدمه

در سال ۱۹۸۴ دوبروووین حلقه های ارزیابی غیر جابجایی از حلقه های آرتینی ساده را با استفاده از نگاشت محل درکتگوری حلقه های آرتینی ساده تعریف کرد و به نتایج مهمی در زمینه حلقه های ارزیابی غیر جابجایی رسید که این حلقه ها بعداً به نام وی نامگذاری شد.

در این پایان نامه با استفاده از مقاله [۹] ، R–ایده ال های حلقه های ارزیابی دوبروووین با استفاده از عناصر پایدار کننده و ایده ال های اولیه توصیف می شوند.

این کار شامل چهار فصل است. فصل اول که از دو بخش تشکیل شده شامل مفاهیم مقدماتی حلقه های آرتینی و ارزیابی است.

فصل دوم شامل سه بخش است. در بخش اول رادیکال ژاکوبسون حلقه R ،حلقه های ساده و نیم ساده، حلقه های موضعی و نیم موضعی و حلقه های اول ونیم اول را تعریف می کنیم. در بخش دوم آن، به معرفی ایده ال های اساسی و یکنواخت پرداخته و بعد یکنواخت (بعد گولدی) R–مدول ها را تعریف می کنیم. در بخش سوم این فصل R–ایده ال های حلقه R را تعریف کرده و خواص آنها را بررسی می کنیم.

در فصل سوم که شامل سه بخش است، حلقه های ارزیابی دوبروووین بر روی حلقه های آرتینی ساده را تعریف وخصوصیات آنها را بررسی می کنیم. همچنین ایده ال های حلقه های ارزیابی دوبروووین و ایده ال های اولیه آن را تعریف می کنیم. در انتهای فصل حلقه های ارزیابی دوبروووین را بر روی حلقه آرتینی ساده Q که برروی مرکزش متناهی البعد است، مورد بحث قرار می دهیم.

فصل چهارم مشتمل بر دو بخش است. در بخش اول قطعه های اول را با استفاده از ایده ال های اول گولدی تعریف و انواع قطعه های اول را بیان می کنیم. در بخش انتهایی نتایج اصلی را می آوریم. به

عبارتی در این بخش R - ایده ال های حلقه ارزیابی دوبروووین را با استفاده از عناصر پایدار کننـده و ایـده ال های اولیه توصیف می کنیم.

فصل اول

مفاهیم مقدماتی

۱-۱ حلقه های آرتینی

تعریف ۱-۱-۱ فرض کنید M یک R-مدول راست باشد که R یک حلقه دلخواه است. یک زنجیر کاهشی از زیر مدول های M دنباله ای مثل

$$\cdots \subseteq M_k \subseteq \cdots \subseteq M_{i+1} \subseteq M_i \subseteq \cdots \subseteq M_1 \subseteq M$$

است که هر M_i یک R-زیر مدول از M است. این دنباله متناهی است هرگاه مجموعه اندیس ها، متناهی باشد. بعلاوه، دنباله ایستاست هرگاه اندیسی مثل h وجود داشته باشد که $M_h = M_{h+j}$ به ازای هر $j \geq 1$.

تعریف ۱-۱-۲ R-مدول M، آرتینی است اگر M در شرایط زنجیر کاهشی صدق کند یا هر زنجیر کاهشی از زیر مدول های M ایستا و یا متناهی باشد.

حلقه R، آرتینی راست گفته می شود اگر به عنوان یک مدول راست روی خودش، آرتینی راست باشد و یا معادلاً، هر زنجیر کاهشی از ایده ال های راست R، ایستا و یا متناهی باشد. یک حلقه، آرتینی چپ است اگر به عنوان یک مدول چپ، آرتینی باشد. یک حلقه آرتینی چپ و راست حلقه آرتینی می باشد.

مثال ۱-۱-۳ مدول صفر به وضوح آرتینی است. به عنوان مثالی دیگرمدول های تحویل ناپذیر(R-مدول M تحویل نا پذیر است، در صورتی که M زیر مدول محض نداشته باشد. به عبارتی تنها زیر مدول هایش، صفر و خودش می باشد.) آرتینی هستند.

مثال ۱-۱-٤ یک میدان و یا یک حلقه تقسیم به وضوح آرتینی چپ و راست است. اگر R یک جبر روی میدان K باشد، یعنی K یک زیر حلقه از مرکز R باشد و R به عنوان یک K-فضا دارای بعد متناهی باشد، در این صورت R آرتینی چپ و راست است، زیرا هر ایده ال از R یک زیر فضا از R است.

قضیه ۱-۱-۵ فرض کنید M یک R-مدول راست باشد. در این صورت M آرتینی است اگر و فقط اگر هر زیر مجموعه ناتهی از زیر مدول های M یک عنصر مینیمال داشته باشد.

اثبات: به برهان خلف فرض کنید یک زنجیر کاهشی نامتناهی در M وجود داشته باشد. در این صورت، مجموعه عناصر مجزای زنجیر یک عنصر مینیمال ندارد. برعکس، اگر یک مجموعه از زیر مدول ها بدون عضو مینیمال وجود داشته باشد، به وضوح می توانیم یک زنجیر کاهشی نامتناهی در M، پیدا کنیم. □

تعریف ۱-۱-۶ یک دنباله از R-مدول ها و R-همریختی ها مثلاً

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

یک دنباله دقیق در رأس M_i است هرگاه $\mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1})$.

دنباله دقیق $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ که در آن f یک به یک و g برو است را دنباله دقیق کوتاه گوییم.

قضیه و تعریف ۱-۱-۷ فرض کنیم R یک حلقه و

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

یک دنباله دقیق کوتاه از همریختی R-مدول ها باشد. در این صورت شرایط زیر معادل هستند:

الف) یک همریختی R-مدولی مانند $h : M_2 \longrightarrow N$ وجود دارد که $gh = 1_{M_2}$؛

ب) یک همریختی R-مدولی مانند $k : N \longrightarrow M_1$ وجود دارد که $kf = 1_{M_1}$؛

ج)دنباله داده شده(با نگاشت های همانی بر M_1 و M_2) با دنباله دقیق کوتاه $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\pi} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\gamma} M_2 \longrightarrow 0$ یکریخت است. به خصوص داریم $N \cong M_1 \oplus M_2$.

گوییم یک دنباله دقیق کوتاه تجزیه می شود یا شکافته می شود اگر دریکی از شرایط معادل الف)، ب) یا ج) صدق کند.

اثبات: به [۸] صفحه ۲۷۷ مراجعه شود. □

قضیه ۱-۱-۸ فرض کنید $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ یک دنباله دقیق از R-مدول های راست باشد، آنگاه M آرتینی است اگر و فقط اگر M و M'' هر دو آرتینی باشد.

اثبات: به [۱] صفحه ۷۵ مراجعه شود. □

نتیجه ۱-۱-۹ فرض کنید $\{M_1,\ldots,M_s\}$ یک مجموعه متناهی از R-مدول های راست باشد. دراین صورت جمع مستقیم $M_1 \oplus \ldots \oplus M_s$ نیز آرتینی است.

اثبات: به [۱] صفحه ۷۶ مراجعه شود. □

تعریف ۱-۱-۱۰ R-مدول M نوتری است هر گاه مجموعه زیر مدولهای M در شرط زنجیر افزایشی صدق کند.

مثال ۱-۱-۱۱ Z به عنوان یک Z-مدول نوتری است.

تبصره ۱-۱-۱۲ توجه شود که هر حلقه آرتینی جابجایی، نوتری است ولی عکس آن برقرار نیست.

مثال ۱-۱-۱۳ حلقه $K[x]$، بنا به قضیه پایه ای هیلبرت نوتری است ولی آرتینی نیست. قضیه پایه ای هیلبرت را در [۳] قضیه ۵-۷ ببینید.

مثال ۱-۱-۱۴ حلقه چندجمله ای های $K[x_1,x_2,\ldots]$ با تعداد نامتناهی متغیر، نه نوتری است ونه آرتینی. زیرا زنجیرهای زیر از ایده ال های آن وجود دارد که نه درشرط زنجیر افزایشی ونه در شرط زنجیر کاهشی صدق می کند.

$$(x_1) \subset (x_1,x_2) \subset (x_1,x_2,x_3) \subset \ldots$$

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) \supseteq (x_2, x_3, \ldots) \supseteq (x_3, x_4, \ldots) \supseteq \ldots.$$

تعریف ۱-۱-۱۵ R-مدول چپ P تصویری است اگر برای هر R-همریختی پوشای $f : A \to B$ و هر R-همریختی $g : P \to B$، همریختی مثل $h : P \to A$ وجود داشته باشد که $foh = g$.

۱-۲ ارزیابی

فرض کنید K یک میدان باشد و K' مجموعه تمام عناصر غیرصفر K باشد و Γ گروه جمعی آبلی کلاً مرتب باشد. سمبل ∞ را به Γ اضافه می کنیم به طوری که برای هر $\alpha \in \Gamma$ داشته باشیم

$$\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty + \infty = \infty.$$

تعریف ۱-۲-۱ یک ارزیابی از K نگاشتی مثل υ از K' به توی $\Gamma \cup \infty$ است به طوری که شرایط زیر برای هر $x, y \in K'$ برقرار باشند:

۱) $\upsilon(xy) = \upsilon(x) + \upsilon(y)$؛

۲) $\upsilon(x+y) \geq \min\{\upsilon(x), \upsilon(y)\}$.

برای هر x در K'، عنصر متناظر $\upsilon(x)$ از Γ ارزش x در ارزیابی داده شده نامیده می شود. مجموعه تمام عناصری از Γ که ارزش های عناصر K' هستند، به وضوح یک زیرگروه از Γ است و گروه ارزیاب υ نامیده می شود. عناصری از Γ که متعلق به گروه ارزیابی نیستند چندان مورد توجه ما نیستند. بنابراین فرض می کنیم که Γ خودش گروه ارزیاب υ است. یعنی υ نگاشتی از K' بروی Γ است.

اگر $a \in K'$ طوری وجود داشته باشد که $\upsilon(a) \neq 0$، ارزیابی υ، نابدیهی است. در غیر این صورت گفته می شود υ ارزیابی بدیهی است.

تبصره ۱-۲-۲ شرط (۱) در بالا به این معنی است که υ یک همریختی از گروه ضربی K' به گروه جمعی Γ است. از اینرو

$$\upsilon(1)=0 \quad ، \quad \upsilon(-1)+\upsilon(-1)=\upsilon(-1\times -1)=\upsilon(1)=0$$

بنابراین $\upsilon(-1)=0$.

به طور کلی، اگر عنصر w از K' ریشه یکانی باشد. یعنی اگر $w^n=1$ در این صورت

$$0=\upsilon(1)=\upsilon(w^n)=n\upsilon(w)\Rightarrow n\upsilon(w)=0 \ .$$

از اینرو $\upsilon(w)=0$.

و از اینکه $\upsilon(-1)=0$ بدست می آید که $\upsilon(-x)=\upsilon(x)$. لذا با توجه به ۱)

$$\upsilon(x-y)\geq \min\{\upsilon(x),\upsilon(y)\}. \qquad (۲'$$

مثال ۱-۲-۳ فرض کنید $\mathbf{Z}$ مجموعه اعداد صحیح و p یک عدد اول دلخواه و ثابت باشد. همچنین $\Gamma=\mathbf{Z}$ گروه مرتب جابجایی اعداد صحیح باشد. نگاشت υ روی $\mathbf{Z}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$\upsilon:\mathbf{Z}\longrightarrow \mathbf{Z}\cup\infty$ به طوری که $\upsilon(0)=\infty$ و $\upsilon(x)=n$. که n توان عدد p در تجزیه x به عوامل اول می باشد. ادعا می کنیم υ یک ارزیابی روی $\mathbf{Z}$ است.

بررسی شرایط ارزیابی:

فرض کنیم $x,y\in\mathbf{Z}$ و $x=p^mQ_1$ و $y=p^nQ_2$ و $m\leq n$. داریم

$$\upsilon(x)=m \quad , \quad \upsilon(y)=n$$

$$\upsilon(xy)=\upsilon(p^mQ_1.p^nQ_2)=\upsilon(p^{m+n}Q_1Q_2)=m+n=\upsilon(x)+\upsilon(y)$$

$$\upsilon(x+y)=\upsilon(p^mQ_1+p^nQ_2)=\upsilon(p^m(Q_1+p^{m-n}Q_2))=m$$

پس داریم $m=\upsilon(x+y)\geq\min\{m,n\}=m$. لذا υ یک ارزیابی روی $\mathbf{Z}$ می باشد. □

همچنین نتایج زیر از ۱) و۲) و۲َ) بدست می آید.

لم ۱-۲-٤ فرض کنید υ یک ارزیابی از K' بروی Γ باشد. در این صورت برای هر $x, y \in K'$ عبارات زیر برقرارند:

الف) $x \neq 0$, $\upsilon(1/x) = -\upsilon(x)$؛

ب) $x \neq 0$, $\upsilon(y/x) = \upsilon(y) - \upsilon(x)$؛

ج) $\upsilon(x) < \upsilon(y) \Rightarrow \upsilon(x+y) = \upsilon(x)$؛

د) $\forall x_i \in K$, $\upsilon\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geq \min\{\upsilon(x_1),\dots,\upsilon(x_n)\}$؛

ه) $\forall x_i \in K$, $\upsilon\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \min\{\upsilon(x_1),\dots,\upsilon(x_n)\}$ اگر مقدار مینیمم توسط یکی از $\upsilon(x_i)$ ها به دست آید.

اثبات: برای هر $x.y \in K'$ داریم:

الف) $0 = \upsilon(1) = \upsilon(x.1/x) = \upsilon(x) + \upsilon(1/x) \Rightarrow \upsilon(1/x) = -\upsilon(x)$.

ب) $\upsilon(y/x) = \upsilon(y.1/x) = \upsilon(y) + \upsilon(1/x) = \upsilon(y) - \upsilon(x)$.

ج) از قسمت ۲) داریم $\upsilon(x+y) \geq \upsilon(x)$. حال اگر x را به فرم $x = (x+y) - y$ بنویسیم و۲َ) را به کار بریم داریم $\upsilon(x) \geq \min\{\upsilon(x+y), \upsilon(y)\}$. چون طبق فرض $\upsilon(x) < \upsilon(y)$، پس $\upsilon(x) \geq \upsilon(x+y)$. بنابراین $\upsilon(x) = \upsilon(x+y)$.

حکم د) به سادگی از استقرا بدست می آید.

برای اثبات ه) فرض کنید i ، ارزش یکتای اندیس j باشد ، که $\upsilon(x_j)$ به مقدار مینیممش می رسد. داریم

$$\upsilon\left(\sum_{i \neq j} x_i\right) \geq \min\{\upsilon(x_j)\} > \upsilon(x_i).$$

حال از ج) داریم

$$\sum \upsilon(x_i)=\upsilon(x_i)=\min\{\upsilon(x_1),...,\upsilon(x_n)\}. \qquad \square$$

تعریف ۱-۲-۵ فرض کنید υ,υ' دو ارزیابی از K به ترتیب با گروههای ارزیاب Γ ، Γ' باشند. گوئیم υ,υ' ارزیابی های هم ارزند اگر یک نگاشت حافظ ترتیب φ از Γ به Γ' وجود داشته باشد به طوریکه برای تمام xها در K' داشته باشیم $\upsilon'(x)=[\upsilon(x)]\varphi$.

لم و تعریف ۱-۲-۶ فرض کنید یک υ ارزیابی از میدان K باشد. در این صورت مجموعه عناصری از K مانند x که $\upsilon(x)\geq 0$ ، یک حلقه است. این حلقه را با R_υ نشان می دهیم و حلقه ارزیابی υ می نامیم.

اثبات: برای هر $x,y\in R_\upsilon$ داریم

$$\upsilon(x+y)\geq \min\{\upsilon(x),\upsilon(y)\}\geq 0$$

در نتیجه $\upsilon(x+y)\geq 0$. یعنی $x+y\in R_\upsilon$.

بعلاوه $\upsilon(xy)=\upsilon(x)+\upsilon(y)\geq 0$. بنابراین $xy\in R_\upsilon$. پس R_υ یک حلقه است. $\square$

تبصره ۱-۲-۷ چون برای هر x در K داریم $\upsilon(x)\geq 0$ یا $\upsilon(x)<0$. (یعنی برای هر x در K داریم $\upsilon(x)\geq 0$ یا $\upsilon(1/x)\geq 0$) پس ازلم ۱-۲-۴ (ب) نتیجه می شود که یا x و یا $1/x$ متعلق به حلقه ارزیابی اند.

همچنین شرط لازم و کافی برای اینکه هر دوی x و $1/x$ در R_υ باشند این است که $\upsilon(x)\geq 0$ و $-\upsilon(x)\geq 0$. یعنی $\upsilon(x)=0$ به عبارت دیگر گروه ضربی یکه ها در R_υ منطبق برهسته همورفیسم υ از K' بروی Γ است. یعنی $U(R_\upsilon)=\ker\upsilon$.

بنابراین عناصر غیر یکه در R_υ ، عناصری مثل y در K هستند که $\upsilon(y)>0$. مستقیماً از ۱) و ۲) بدست می آید که مجموعه غیر یکه های R_υ یک ایده ال اول است. ما این ایده ال اول را با m_υ نشان می دهیم

و آن را ایده ال اول ارزیابی υ در نظر می گیریم. همچنین هر عنصر از K که متعلق به R_υ نیست معکوس عنصری از m_υ است. چون m_υ مجموعه تمام عناصر غیریکه در R_υ است، پس ایده ال ماکسیمال R_υ است. در واقع بزرگترین ایده ال محض در R_υ است. اگر υ ارزیابی غیربدیهی باشد، m_υ ایده ال صفر نیست و R_υ یک زیر حلقه محض از K است و اگر υ ارزیابی بدیهی باشد ، داریم $R_\upsilon = K$ و $m_\upsilon = 0$.

تبصره ۱-۲-۸ ارزیابی های هم ارز از K ، حلقه های ارزیابی یکسان دارند و برعکس اگر دو ارزیابی υ و υ' از K حلقه ارزیابی یکسان داشته باشند، آنگاه هم ارزند. زیرا:

فرض کنید Γ و Γ' به ترتیب گروههای ارزیاب υ و υ' باشند و فرض کنید که $R = R_\upsilon = R_{\upsilon'}$. دو ارزیابی υ و υ' به ترتیب هم ریختی هایی از K' به روی Γ و Γ' هستند که طبق فرض هسته های یکسان دارند .(یعنی مجموعه یکه ها در R) . از اینرو $\upsilon^{-1}\upsilon$ ایزومورفیسمی مثل φ از Γ بروی Γ' است. عناصری که دارای ارزش مثبت هستند، یعنی عناصر غیر یکه از R، در هر دو ارزیابی یکسان اند. بنابراین φ مجموعه عناصر مثبت Γ را بروی مجموعه عناصر مثبت Γ' تصویر می کند. و بنابراین حافظ ترتیب است . چون $\upsilon' = \upsilon\varphi$. پس حکم اثبات می شود. □

فصل دوم

حلقه های گولدی