دانشگاه شیخ بهایی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی

تقریب زیر دیفرانسیل خانواده توابع محدب تعمیم یافته

پژوهشگر

الهه خانی

استاد راهنما

دکتر جعفر زعفرانی

استاد مشاور

دکتر مجید فخار

خرداد ۱۳۹۱

چکیده

در این پژوهش به مطالعه ϵ_Φ_زیردیفرانسیل کلاس توابعΦ_محدب به عنوان نمایندهای ساده از Φ ، خانواده توابع حقیقی مقدار روی مجموعه غیر تهی X، پرداخته و سپس درحالت $\Phi = X^*$ کهXیک فضای باناخ میباشدزیردیفرانسیل توابع زیرخطی و نیم پیوسته پایینی آنالیز میشود. به عنوان نتیجه زیردیفرانسیل توابع همگن مثبت، محدب ونیم پیوسته پایینی و خانوادهای از توابع به نام تقریب- کراندار مورد بررسی قرار میگیرد. با بیان قضیه تقریب نابرابری مقدار میانگین سه نقطهای و معرفی توابع تقریباً محدب، منظم بودن و زیر یکنوای ماکسیمال بودن زیردیفرانسیل کلارک این توابع را مورد مطالعه قرار میدهیم.

فهرست مطالب

مقدمه

ازآنجا که بهینه سازی توابع محدب، یکی از مباحث ویژه در آنالیز به‌شمار می‌آید و در این حالت صفر در زیردیفرانسیل این توابع قرار می‌گیرد، دانستن زیردیفرانسیل خانواده توابع محدب وزیرمجموعه‌های آنهاازاهمیت ویژه‌ای برخوردار است. به همین دلیل افراد زیادی پیرامون این موضوع مقالاتی را ارائه داده‌اند، از جمله این افراد، بوراچیک، [۱] فابین فلورس بازان [۲] در مورد تقریب زیردیفرانسیل تابع حقیقی مقدار f روی فضای باناخ X با شرط اینکه تابع f سره، محدب و نیم‌پیوسته پائینی باشدفرمولی را ارائه و بطور مبسوط در مورد آن بحث کرده‌اند.

این پایان نامه شامل دو فصل می‌باشد: در فصل اول با تعریف توابع Φ_محدب به مطالعه ϵ_Φ_زیردیفرانسیل آنها می‌پردازیم سپس در بخش دوم بادرنظرگرفتن حالت $\Phi = X^*$ که X^* دوگان توپولوژی فضای باناخ X می‌باشد تقریبی برای ϵ_Φ_زیردیفرانسیل توابع زیرخطی و نیم‌پیوسته‌پائینی بدست اورده و به عنوان نتیجه‌ای ازبخش دوم، مشخصه‌های زیردیفرانسیل توابع همگن مثبت، محدب و نیم‌پیوسته‌پائینی را بیان می‌کنیم، در انتهای فصل، به بررسی زیردیفرانسیل توابع تقریب- کراندار می‌پردازیم. در فصل دوم با بیان قضیه تقریب نابرابری مقدار میانگین سه نقطه‌ای و معرفی توابع تقریباً محدب، منظم بودن و زیر یکنوای

[۱] Burachik

[۲] FabianFlores-Bazan

ماکسیمال بودن زیردیفرانسیل کلارک این توابع را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فصل ۱
مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این فصل با توجه به مراجع[۳]،[۱۳]،[۱۷]و[۱۸]برخی مفاهیم اولیه که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته است را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۰.۱. فضای خطی نرم‌دار کامل X را فضای باناخ می‌نامیم، بطور مثال فضای $\mathbb{R}^n$ یک فضای باناخ است.

تعریف ۲.۰.۱. X^*، دوگان توپولوژی فضای باناخ X می‌باشد.

دوگان دوخطی بین X و X^*بصورت $\langle .,. \rangle$ **تعریف می‌شودکه می‌نویسیم** $x \in X$ و $x^* \in X^*$ و $x^*(x) = \langle x^*, x \rangle$.

تعریف ۳.۰.۱. در فضای باناخ X، خط واصل بین x و y را به صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$[x, y] := \{\bar{z} \in X \mid \bar{z} = \lambda x + (1 - \lambda)y \quad \lambda \in [0, 1]\}$$

$[x, y)$ و $(x, y]$ **خطوط واصل نیمه باز و** (x, y) **خط باز واصل بین** xو y می‌باشند.

تعریف ۴.۰.۱. تابع $d_{[x,y]} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_{[x,y]}(z) := \min_{\bar{z}\in[x,y]} \|\bar{z}-z\| \quad x,y,z \in X \text{ برای هر }$$

تعریف ۵.۰.۱. برای $x \in X$ و $\lambda > ۰$، $B_\lambda(x)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B(x,\lambda) = B_\lambda(x) = \{z \in X \ : \ \| x - z \| \leq \lambda\}$$

$B(۰,۱)$ را گوی یکه در X در نظر می‌گیریم و با S_X نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۰.۱. برای $x^* \in X^*$ و $\lambda > ۰$، $B(x^*,\lambda)$ رابصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B(x^*,\lambda) = \{z^* \in X^* \ : \ \|x^* - z^*\|_* \leq \lambda\}$$

. که در آن $\|\cdot\|_*$ روی X^* را بصورت زیر داریم:

$$\|x^*\|_* = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq ۰}} \langle x^*, \frac{x}{\|x\|}\rangle$$

$B(۰,۱)$ را گوی یکه در X^* در نظر می‌گیریم و با S_{X^*} نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۰.۱. برای $\lambda > ۰$ و $x,y \in X$، $\lambda-$همسایگی بسته یکنواخت $[x,y]$ را بصورت زیر داریم:

$$B([x,y],\lambda) := \{z \in X \mid d_{[x,y]}(z) \leq \lambda\}.$$

تعریف ۸.۰.۱. برای $C \subseteq X$ که در آن X یک فضای باناخ است، تابع شاخص

$$I_C : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I_C(x) = \begin{cases} ۰ & ۰ \in C \\ +\infty & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

تعریف ۹.۰.۱. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ رادر $x \in X$ نیم‌پیوسته پائینی گوییم، هرگاه $\operatorname{epi} f$ بسته باشد که در آن

$$\operatorname{epi} f = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \ : \ f(x) \leq t\}$$

عبارت $x \longrightarrow_f x'$ به معنای این است که $x \longrightarrow x'$ و $f(x) \longrightarrow f(x')$.

تعریف ۱۰.۰.۱. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ را محدب گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x + (۱ - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (۱ - \lambda) f(y)$$

تعریف ۱۱.۰.۱. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ را شبه محدب گوییم اگربرای هر $x, y \in X$ و $z \in [x, y]$ داشته باشیم:

$$f(z) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

تعریف ۱۲.۰.۱. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ را مقعر گوییم هرگاه $f-$ محدب باشد.

تعریف ۱۳.۰.۱. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ را آفین گوییم هر گاه f محدب و مقعر باشد.

تعریف ۱۴.۰.۱. فرض کنید $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. در این صورت

$$\operatorname{dom} f := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}$$

بیانگر دامنه موثر f می‌باشد.

تعریف ۱۵.۰.۱. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ را سره گوییم هرگاه $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ و $f \not\equiv +\infty$.

تعریف ۱۶.۰.۱. $\Gamma_۰(X)$ مجموعه توابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ بطوریکه f سره، محدب و نیم‌پیوسته پائینی باشد

تعریف ۱۷.۰.۱. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ را لیپ‌شیتز با ثابت لیپ‌شیتز L گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$،

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|.$$

تعریف ۱.۰.۰.۱۸. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$را همگن مثبت از درجه n می‌نامیم هرگاه برای هر$x \in X$ و $t > 0$

$$f(tx) = t^n f(x).$$

تعریف ۱.۰.۰.۱۹. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ را زیرخطی گوییم هرگاه f محدب و همگن مثبت از درجه یک باشد.

تعریف ۱.۰.۰.۲۰. $A \subseteq X$ را مخروط گوییم هرگاه برای هر $a \in A$و $\lambda \geq 0$ داشته باشیم $\lambda a \in A$.

تعریف ۱.۰.۰.۲۱. $A \subseteq X$ را محدب گوییم هرگاه برای هر $x, y \in A$، $[x, y] \subseteq A$.

قضیه ۱.۰.۰.۲۲. اگر $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ زیرخطی باشد، آن‌گاه $\operatorname{dom} f$ مخروط محدب است.

اثبات. رجوع کنید به مرجع[۱۲].

□

قضیه ۱.۰.۰.۲۳. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ زیرخطی است اگر و تنها اگر $\operatorname{epi} f$ مخروط محدب باشد.

اثبات. رجوع کنید به مرجع [۱۸].

□

تعریف ۱.۰.۰.۲۴. فرض کنید $f \in \Gamma_0(X)$ ، زیردیفرانسیل فنچل f در $x \in \operatorname{dom} f$ مجموعه زیر است:

$$\partial f(x) := \{x^* \in X^* \ : \ \langle x^*, y - x \rangle \leq f(y) - f(x) \quad \forall y \in X\}.$$

تعریف ۲۵.۰.۱. عملگر مجموعه مقدار $T : X \rightrightarrows X^*$، یکنوا نامیده می‌شود. اگربرای هر $y^* \in T(y), x^* \in T(x)$ داشته باشیم:

$$\langle x^* - y^*, x - y\rangle \geq ۰$$

قضیه ۲۶.۰.۱. عملگر مجموعه مقدار $\partial f(x) : X \rightrightarrows X^*$یکنوا می‌باشد.

اثبات. رجوع کنید به مرجع[۱۸]. $\square$

تعریف ۲۷.۰.۱. عملگر مجموعه مقدار $T : X \rightrightarrows X^*$ را یکنوای دوره‌ای گوییم اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $((x_i, x_i^*))_{i=۰}^n \subset \operatorname{gr} T$ داشته باشیم:

$$\sum_{i=۰}^{n} \langle x_{i+۱} - x_i, x_i^*\rangle \leq ۰ \qquad (۱.۱)$$

که $x_{n+۱} := x_۰$.

هر یکنوای دوره‌ای، یکنوا می‌باشد.

اگر تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ سره باشد، ∂f یک عملگر یکنوای دوره‌ای است.

زیرا $n \in \mathbb{N}$ و $((x_i, x_i^*))_{i=۰}^n \subset \operatorname{gr} \partial f$ آن‌گاه $(x_i)_{i=۰}^n \subset \operatorname{dom} f$ و

$$\langle x_{i+۱} - x_i, x_i^*\rangle \leq f(x_{i+۱}) - f(x_i) \quad \forall i, ۰ \leq i \leq n$$

که $x_{n+۱} := x_۰$. با جمع کردن نابرابری های بالا برای$i = ۰, ..., n$داریم:

$$\Sigma_{i=۰}^n \langle x_{i+۱} - x_i, x_i^*\rangle \leq ۰$$

لذا∂fعملگر یکنوای دوره ای می‌باشد.

تعریف ۲۸.۰.۱. عملگر مجموعه مقدار $T : X \rightrightarrows X^*$ ، شبه یکنوا گوییم اگر

$$x^* \in T(x), \quad y^* \in T(y), \quad \langle x^*, y - x\rangle > ۰ \quad \Longrightarrow \quad \langle y^*, y - x\rangle \geq ۰$$

تعریف ۲۹.۰.۱. عملگر مجموعه مقدار $T : X \rightrightarrows X^*$ در $x_۰ \in X$، زیریکنوا نامیده می‌شود. اگر برای هر $\epsilon > ۰$، $\delta > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر

$x,y \in B(x_\circ,\delta)$ و هر $y^* \in T(y), x^* \in T(x)$ داشته باشیم:

$$\langle x^* - y^*, x-y\rangle \geq -\epsilon\|x-y\|$$

تعریف ۳۰.۰.۱. عملگر مجموعه مقدار $T : X \rightrightarrows X^*$ در $x_\circ \in X$ زیریکنوای جهت‌دار نامیده می‌شود. اگر برای هر $d \in S_X$ و $\epsilon > \circ$. $\delta > \circ$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x,y \in B(x_\circ,\delta)$، $x \neq y$ و $\frac{x-y}{\|x-y\|} \in B(d,\delta)$ و هر $y^* \in T(y)$ و $x^* \in T(x)$ داشته باشیم:

$$\langle x^* - y^*, x-y\rangle \geq -\epsilon\|x-y\|$$

تعریف ۳۱.۰.۱. عملگر مجموعه مقدار $T : X \rightrightarrows X^*$ را زیر یکنوای جهت‌دار ماکسیمال در $x_\circ \in X$ گوییم اگر در $x_\circ$، زیر یکنوای جهت‌دار باشد و عملگر زیر یکنوای جهت‌دار دیگری در $x_\circ \in X$ چون $S : X \rightrightarrows X^*$ وجود نداشته باشد بطوری که $T(x) \subset S(x)$ برای xهایی که در همسایگی $x_\circ$ هستند و $T(x_\circ) \neq S(x_\circ)$.

قضیه ۳۲.۰.۱. فرض کنید $T : X \rightrightarrows X^*$ یک تابع چند مقدار یکنوای دوره‌ای باشد و $(x_\circ, x^*) \in \operatorname{gr} T$ تابع $f_T : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f_T(x) := \sup(\langle x - x_n, x_n^*\rangle + \sum_{i=\circ}^{n-1}\langle x_{i+1} - x_i, x_i^*\rangle) \qquad (۲.۱)$$

که سوپرمم برای تمام $((x_i,x_i^*))_{i=\circ}^n \subset \operatorname{gr} T$ که $n \in \mathbb{N}$ است اعمال می‌شود. در اینصورت $f_T \in \Gamma_\circ(X)$ و $f_T(x_\circ) = \circ$ و $T(x) \subset \partial f_T(x)$ برای هر $x \in X$.

اثبات. رجوع کنید به مرجع[۱۸]. □

تعریف ۳۳.۰.۱. ϵـزیردیفرانسیل فنچل$f : X \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ در $x \in \operatorname{dom} f$بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\partial_\epsilon f(x) := \{x^* \in X^* \;:\; \langle x^*, y-x\rangle \leq f(y) - f(x) + \epsilon \quad \forall y \in X\}$$

دامنه و گراف زیردیفرانسیل تابع f را بصورت زیر داریم:

$$\operatorname{Dom} \partial f := \{x \in x \mid \partial f(x) \neq \emptyset\}$$

$$\operatorname{graph} \partial f := \{(x, x^*) \in X \times X^* \mid x^* \in \partial f(x)\}$$

$$\operatorname{graph} \partial_\epsilon f := \{(x, x^* \in X \times X^* \mid x^* \in \partial_\epsilon f(x)\}$$

تعریف ۱.۰.۰.۳۴. زیر دیفرانسیل کلارک تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$، عملگر مجموعه مقدار $\partial_C f : X \rightrightarrows X^*$ می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

اگر $x \notin \operatorname{dom} f$، آن‌گاه $\partial_C f(x) := \emptyset$ و برای $x \in \operatorname{dom} f$ داریم:

$$\partial_C f(x) := \Big\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, h\rangle \leq f'_{CR}(x; h), \quad \forall h \in X\Big\} \tag{۳.۱}$$

که در آن $f'_{CR}(x; h)$، زیر مشتق کلارک-راکفلر است و به صورت زیر می‌باشد:

$$f'_{CR}(x; h) := \sup_{\lambda > 0} \limsup_{\substack{t \searrow 0 \\ x' \longrightarrow_f x}} \inf_{h' \in B(h, \lambda)} \frac{f(x' + th') - f(x')}{t} \tag{۴.۱}$$

اگر تابع fلیپ شیتز با ثابت Lروی $B(x, r)$برای هر $r > 0$و $L \geq 0$ آنگاه

$$f'_{CR}(x; h) := \inf_{\delta > 0} \sup_{\|x' - x\| \leq \delta, 0 < t \leq \delta} \frac{f(x' + th) - f(x')}{t}$$

تعریف ۱.۰.۰.۳۵. زیر دیفرانیسل هادامارد و زیردیفرانیسل فرشه تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ در $x \in X$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\partial_H f(x) := \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, h\rangle \leq \liminf_{\substack{t \searrow 0 \\ h' \longrightarrow h}} \frac{f(x + th') - f(x)}{t}, \quad \forall h \in X\} \tag{۵.۱}$$

$$\partial_F f(x) := \{x^* \in X^* \mid \liminf_{\|h\| \longrightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x) - \langle x^*, h\rangle}{\|h\|} \geq 0\} \tag{۶.۱}$$

قضیه ۱.۰.۰.۳۶. برای تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ در $x \in X$ رابطه زیر بین زیردیفرانیسل‌های فرشه، هادامارد و کلارک برقرار است.

$$\partial_F f(x) \subset \partial_H f(x) \subset \partial_C f(x)$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $\partial_F f(x) \subset \partial_H f(x)$.

فرض کنیم $x^* \in \partial_F f(x)$ بنابراین داریم:

$$\liminf_{\|h\| \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle x^*, h\rangle}{\|h\|} \geq 0$$

فرض کنیم $h = tv$ جائیکه $\|v\| = 1$ و $t \longrightarrow 0$. بنابراین:

$$\liminf_{t \searrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x) - \langle x^*, tv\rangle}{|t|} \geq 0$$

از آنجائیکه $\lim_{t \searrow 0} \frac{\langle x^*, tv\rangle}{|t|} = \langle x^*, v\rangle$ لذا داریم:

$$\liminf_{\substack{t \searrow 0 \\ v' \longrightarrow v}} \frac{f(x+tv') - f(x)}{t} \geq \langle x^*, v\rangle$$

بنابراین $x^* \in \partial_H f(x)$.

حال نشان می‌دهیم $\partial_H f(x) \subset \partial_C f(x)$.

فرض کنیم $x^* \in \partial_H f(x)$ لذا داریم:

$$\langle x^*, h\rangle \leq \liminf_{\substack{t \searrow 0 \\ h' \longrightarrow h}} \frac{f(x+th') - f(x)}{t} = \sup_{\lambda > 0} \inf_{\substack{h' \in B(h,\lambda) \\ 0 < t < \lambda}} \frac{f(x+th') - f(x)}{t}$$

$$\Longrightarrow \langle x^*, h\rangle \leq \sup_{\lambda > 0} \limsup_{\substack{t \searrow 0 \\ x' \longrightarrow_f x}} \inf_{h' \in B(h,\lambda)} \frac{f(x'+th') - f(x')}{t}$$

بنابراین $x^* \in \partial_C f(x)$.

در حالت کلی روابط شمول فوق، اکید هستند. □

قضیه ۱.۰.۳۷ (اکلند[۱]). فرض کنید $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ سره ،نیم‌پیوسته پائینی و از پایین کراندار باشد و $\epsilon > 0$ و $x_0 \in X$، $f(x_0) < \inf_X f + \epsilon$. در این صورت برای هر $\lambda > 0$، $\bar{x} \in X$ وجود دارد بطوریکه:

(i) $f(\bar{x}) \leq f(x_0)$

(ii) $d(\bar{x}, x_0) \leq \lambda$

[۱] Ekland

(iii) $f(x) + \left(\frac{\epsilon}{\lambda}\right) d(x, \bar{x}) > f(\bar{x}) \quad \forall x \neq \bar{x}$

اثبات. رجوع شود به[۹].

□

قضیه ۳۸.۰.۱ (برونستد- راکفلر[۲]). فرض کنید X فضای باناخ و $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ سره،محدب و نیم پیوسته‌پایینی باشد. فرض کنید $\epsilon \geq 0$ و $(x_0, x_0^*) \in \operatorname{gr} \partial_\epsilon f$. در این صورت $(x_\epsilon, x_\epsilon^*) \in \operatorname{gr} \partial f$ وجود دارد به طوری که $\|x_\epsilon - x_0\| \leq \sqrt{\epsilon}$ و $\|x_\epsilon^* - x_0^*\| \leq \sqrt{\epsilon}$.
به عبارتی دیگر $\operatorname{dom} f \subset \operatorname{cl}(\operatorname{dom} \partial f)$.

اثبات. رجوع شود به [۱۸].

□

قضیه ۳۹.۰.۱ (اصل بهینگی[۳]). اگر $\bar{x} \in X$ یک مینیمم موضعی متناهی $f + g$باشد که در آن $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ نیم‌پیوسته پائینی و $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ محدب و لیپ‌شیتز است، آن‌گاه $0 \in \partial_C f(\bar{x}) + \partial_C g(\bar{x})$.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم اگر $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ در $\bar{x}$ مینیمم سراسری داشته باشد، آن‌گاه $0 \in \partial_C f(x)$. چون $\bar{x}$، min کننده f است، لذا برای $\lambda, h \in \mathbb{R}$ و $h' \in B(h, \lambda)$ و $t > 0$ داریم:

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{x} + th')$$

بنابراین

$$\frac{f(\bar{x} + th') - f(\bar{x})}{t} \geq 0$$

دراین‌صورت

---

[۲] Brøndst-Rockafellar
[۳] optimality property

$$\sup_{\lambda>0}\limsup_{\substack{t\searrow 0\\ x\longrightarrow_f \bar{x}}}\inf_{h'\in B(h,\lambda)}\frac{f(x+th')-f(x)}{t}\geq 0$$

بنابراین $f'_{CR}(\bar{x},h)\geq 0$، لذا داریم: $0\in\partial_C f(\bar{x})$.

حال نشان می‌دهیم: $(f+g)'(\bar{x},.)\leq f'(\bar{x},.)+g'(\bar{x},.)$.

فرض کنیم $r>0$، بطوریکه g، L، لیپ‌شیتز روی $B(\bar{x},r)$ باشد و $L\geq 1$. فرض کنیم $u\in X$ و $\epsilon>0$ و $\delta>0$ ثابت باشند و $\delta'=\min\left\{\frac{\delta}{2L},\frac{r}{1+\epsilon+\|u\|}\right\}>0$.

فرض کنیم t,x,v طوری باشد که

$$\|v-u\|\leq\epsilon, \|x-\bar{x}\|\leq\delta', 0<t\leq\delta',\quad f(x)+g(x)\leq f(\bar{x})+g(\bar{x})+\delta'$$

بنابراین

$$f(x)\leq f(\bar{x})+(g(\bar{x})-g(x))+\delta'$$

از طرفی چون

$$g(\bar{x})-g(x)\leq L\|\bar{x}-x\|=L\delta'$$

لذا داریم:

$$f(x)\leq f(\bar{x})+L\delta'+\delta'=f(\bar{x})+(L+1)\delta'\leq f(\bar{x})+\delta$$

بنابراین

$$\frac{(f+g)(x+tv)-(f+g)(x)}{t}\leq\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}+\frac{g(x+tu)-g(x)}{t}+L\epsilon$$

لذا برای $v\in B(u,\epsilon)$

$$\alpha\leq A_1(\delta)+A_2(\delta)+L\epsilon$$

که

$$\alpha:=\sup_{\substack{\|x-\bar{x}\|\leq\delta', 0<t\leq\delta'\\ (f+g)(x)\leq(f+g)(\bar{x})+\delta'}}\inf_{\|v-u\|\leq\epsilon}\frac{(f+g)(x+tv)-(f+g)(x)}{t}$$

$$A_1(\delta):=\sup_{\substack{\|x-\bar{x}\|\delta', 0<t\leq\delta\\ f(x)\leq f(\bar{x})+\delta}}\inf_{\|v-u\|\leq\epsilon}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$$

$$A_2(\delta):=\sup\left\{t^{-1}(g(x+tu)-g(x))\mid x\in D(\bar{x},\delta)\right\}$$

لذا برای هر $\delta > 0$ $\qquad \beta \leq A_1(\delta) + A_2(\delta) + L\epsilon$

جاییکه

$$\beta := \inf_{\delta' > 0} \sup_{\substack{\|x-\bar{x}\| \leq \delta', 0 < t \leq \delta' \\ (f+g)(x) \leq (f+g)(\bar{x}) + \delta'}} \inf_{\|v-u\| \leq \epsilon} \frac{(f+g)(x+tv) - (f+g)(x)}{t}$$

حد $A_1(\delta) + A_2(\delta)$ را وقتی $\delta \to 0$ در نظر می‌گیریم:

(با توجه به اینکه A_1 و A_2 برای $\delta > 0$ غیرنزولی هستند)

لذا:

$$\begin{aligned}
&\inf_{\delta > 0} \sup_{\substack{\|x-\bar{x}\| \leq \delta, 0 < t \leq \delta \\ (f+g)(x) \leq (f+g)(\bar{x}) + \delta}} \inf_{\|v-u\| \leq \epsilon} \frac{(f+g)(x+tv) - (f+g)(x)}{t} \\
&\leq \inf_{\delta > 0} \sup_{\substack{\|x-\bar{x}\| \leq \delta \\ 0 < t \leq \delta \\ f(x) \leq f(\bar{x}) + \delta}} \inf_{\|v-u\| \leq \epsilon} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \\
&+ \inf_{\delta > 0} \sup_{\|x-\bar{x}\| \leq \delta} \frac{g(x+tu) - g(x)}{t} + L\epsilon
\end{aligned}$$

وقتی $\epsilon \to 0$ داریم:

$$(f+g)'(\bar{x}, 0) \leq f'(\bar{x}, 0) + \leq g'(\bar{x}, 0).$$

$g'(\bar{x}, .)$ پیوسته است بنابراین

$$\partial_C (f+g)(\bar{x}) \in \partial_C f(\bar{x}) + \partial_C g(\bar{x})$$

. $\square$

قضیه ۱.۰۰.۴۰ (اصل تغییراتی زیردیفرانسیل[۴]). فرض کنید $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$، نیم‌پیوسته پائینی و $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ لیپ شیتز محدب باشده $\lambda > 0$، و $\sigma > 0$. اگر $\bar{x} \in X$ بطوریکه

$$(f+\varphi)(\bar{x}) < \inf_{B(\bar{x},\lambda)} (f+\varphi) + \lambda\sigma$$

[۴] subdifferential variational principle

آن‌گاه $x \in X$ و $x^* \in \partial_C f(x)$ و $y^* \in \partial_C \varphi(x)$ وجود دارد بطوریکه

$$\|x - \bar{x}\| < \lambda, \quad (f+\varphi)(x) \leq (f+\varphi)(\bar{x}), \quad \|x^* + y^*\| < \sigma.$$

اثبات. روند اثبات شبیه، قضیه ۷ مرجع [۱۳] می‌باشد.

تابع $\psi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ را بصورت زیر درنظرمی‌گیریم:

$$\psi = f + \varphi$$

ψ نیم‌پیوسته پائینی است. تابع $g : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g = \psi + I_C \quad s.t. \quad C = \bar{x} + \lambda S_X$$

و

$$g(\bar{x}) = \psi(\bar{x}) \leq \inf_{B(\bar{x},\lambda)} \psi + \lambda\sigma$$

لذا تابع g در$\bar{x}$ مینیمم دارد. بنابراین طبق قضیه اکلند داریم، برای $\lambda > ۰$، $x \in X$ وجود داردبطوریکه $g(x) \leq g(\bar{x})$ (لذا $\psi(x) \leq \psi(\bar{x})$)، $\|x - \bar{x}\| \leq \lambda$ و

$$g(y) \geq g(x) - \sigma\|y - x\| \quad \forall y \in E$$

قرار می‌دهیم $h(y) = \sigma\|y - x\|$. بنابراین

$$(h+g)(y) \geq (g+h)(x) \quad \forall y \in E$$

لذا x، مینمم سراسری تابع $h + g$ می‌باشد. فرض کنیم $x \in \operatorname{int} C$در اینصورت تابع g، حول x منطبق بر تابع ψ است. بنابراین x، مینمم موضعی تابع $\psi + h$ می‌باشد. لذا طبق اصل بهینگی

$$۰ \in \partial(\psi + h)(x) \subset \partial\psi(x) + \partial h(x) = \partial\psi(x) + \sigma S_{X^*}$$

بنابراین $z^* \in \partial_C \psi(x)$ وجود دارد بطوریکه $\|z^*\| \leq \sigma$. به عبارت دیگر $x^* \in \partial_C f(x)$ و $y^* \in \partial_C \varphi(y)$ وجود دارد بطوریکه $z^* = x^* + y^*$ و $\|x^* + y^*\| \leq \sigma$. □

قضیه ۴۱.۰.۱. فرض کنید $f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ سره و نیم‌پیوسته پائینی باشد و $\mathrm{Dom}\, f$ فشرده، در این صورت $x_\circ \in X$ وجود دارد بطوریکه

$$f(x_\circ) = \inf_{x \in \mathrm{Dom}\, f} f(x)$$

قضیه ۴۲.۰.۱. فرض کنید$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ سره،نیم‌پیوسته‌پائینی باشدو$a, b \in X$ بطوریکه $[a, b] \cap \mathrm{dom}\, f \neq \emptyset$ و c، مینمم f روی $[a, b]$ باشد،دراینصورت $x_n \longrightarrow_f c$ و $x_n^* \in \partial f(x_n)$ وجود دارد بطوریکه

برای هر $x \in [a, b]$، $\liminf_{n \longrightarrow +\infty} \langle x_n^*, x - x_n \rangle \geq \circ$

و اگر $c \neq b$، آن‌گاه $\liminf_{n \longrightarrow +\infty} \langle x_n^*, b - a \rangle \geq \circ$.

اگر $c = a$ یا $c = b$، آن‌گاه $\liminf_{n \longrightarrow +\infty} \langle x_n^*, b - a \rangle = \circ$.

اثبات. رجوع کنید به مرجع[۲] $\square$

قضیه ۴۳.۰.۱ (نابرابری مقدار میانگین[۵]). فرض کنید$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ نیم‌پیوسته‌پایینی و $a, b \in X$و $a \in \mathrm{dom}\, f$ و $a \neq b$ و $r \in \mathbb{R}$ بطوریکه $r \leq f(b)$. آن‌گاه $c \in [a, b]$ ، $c \neq b$ و دنباله‌های $x_n \longrightarrow_f c$ و $x_n^* \in \partial f(x_n)$ وجود دارد بطوریکه:

(i) $\quad \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \langle x_n^*, c - x_n \rangle \geq \circ$

(ii) $\quad \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \langle x_n^*, b - a \rangle \geq r - f(a)$

اثبات. فرض کنید $\alpha \in X^*$ بطوریکه $\langle \alpha, a - b \rangle = r - f(a)$. تابع $g : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g := f + \alpha$$

g نیم‌پیوسته پائینی است و $g(a) = r + \langle \alpha, b \rangle \leq g(b)$ بنابراین $c \in [a, b]$ و $c \neq b$ وجود دارد بطوریکه $g(c) = \min_{[a,b]} g$.

[۵] approximate mean value inequality

لذا طبق قضیه ۴۲.۰.۱، دنباله‌های $x_n \longrightarrow_g c$ و $y_n^* \in \partial g(x_n)$ وجود دارد بطوریکه

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty}\langle y_n^*, b-a\rangle \geq 0 \quad \text{و} \quad \liminf_{n\longrightarrow\infty}\langle y_n^*, c-x_n\rangle \geq 0$$

از آنجائیکه $y_n^* \in \partial g(x_n)$ و $\partial g \subseteq \partial f + \alpha$ لذا $x_n^* \in \partial f(x_n)$ وجود دارد بطوریکه $y_n^* = x_n^* + \alpha$. لذا داریم:

$$0 \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty}\langle y_n^*, c-x_n\rangle = \liminf_{n\longrightarrow\infty}\langle x_n^*+\alpha, c-x_n\rangle = \liminf_{n\longrightarrow\infty}\langle x_n^*, c-x_n\rangle$$

و

$$0 \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty}\langle x_n^*+\alpha, b-a\rangle = \liminf_{n\longrightarrow\infty}\langle x_n^*, b-a\rangle + \lim_{n\longrightarrow\infty}\langle \alpha, b-a\rangle$$

بنابراین

$$\liminf_{n}\langle x_n^*, b-a\rangle \geq \langle \alpha, a-b\rangle = r - f(a).$$

□

قضیه ۴۴.۰.۱. فرض کنید $C \subseteq X$ فشرده باشد اگر دنباله (x_k) در X در رابطه زیر صدق کند

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} d_C(x_k) = 0$$

آن‌گاه زیردنباله (x_{k_n}) از (x_k) وجود دارد بطوریکه به $c \in C$ همگراست.

اثبات. رجوع کنید به مرجع[۱۷] □

قضیه ۴۵.۰.۱. اگر $d_{[a,b]}(x) \leq \|x-b\|$ آن‌گاه $d'_{CR[a,b]}(x; b-a) \leq 0$

اثبات. رجوع کنید به مرجع[۱۷] □

لم ۴۶.۰.۱. اگر $f : X \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ نیم‌پیوسته پائینی باشد، آن‌گاه $\epsilon > 0$ وجود دارد بطوریکه تابع f روی مجموعه $B([a,b],\epsilon)$ از پائین کراندار است.

اثبات. رجوع کنید به مرجع[۱۷] $\square$

قضیه ۴۷.۰.۱ (نابرابری مقدار میانگین زاگرودنی). فرض کنید $a, b \in X$ و b و $a \neq b$ و تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ نیم‌پیوسته پائینی و در b, a متناهی باشد. در اینصورت برای هر $x \in [a, b]$ که $x \neq b$ و نابرابری

$$f(x) + \frac{f(b) - f(a)}{\|b - a\|}\|x - b\| \leq f(y) + \frac{f(b) - f(a)}{\|b - a\|}\|y - b\| \qquad (۷.۱)$$

برای هر $y \in [a, b]$ برقرار باشد. دنباله‌های $(x_k) \subseteq X$ و $(x_k^*) \subseteq X^*$ وجود دارند بطوریکه

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} x_k = x \qquad (۸.۱)$$

$$\limsup_{k \longrightarrow \infty} f(x_k) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{\|b - a\|}\|x - a\| \qquad (۹.۱)$$

$$x_k^* \in \partial f(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{R} \qquad (۱۰.۱)$$

$$\liminf_{k \longrightarrow \infty} \langle x_k^*, b - x_k \rangle \geq \frac{f(b) - f(a)}{\|b - a\|}\|b - x\|, \qquad (۱۱.۱)$$

$$\liminf \langle x_k^*, b - a \rangle \geq f(b) - f(a) \qquad (۱۲.۱)$$

اگر $x \neq a$ آن‌گاه

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \langle x_k^*, b - a \rangle = f(b) - f(a) \qquad (۱۳.۱)$$

اثبات. از لم ۴۶.۰.۱ که می‌گوید $\epsilon > 0$ وجود دارد بطوریکه تابع f روی مجموعه $B([a, b], \epsilon)$ از پائین کراندار است پیروی می‌کند.

تابع g را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g(y) = f(y) + \frac{f(b) - f(a)}{\|b - a\|}\|y - b\| \quad \forall y \in X$$

فرض کنیم $x \in [a, b]$ که در رابطه (۷.۱) صدق می‌کند در اینصورت

$$g(x) \leq g(y) \quad \forall y \in [a, b]$$