دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

بررسی مسأله‌ی معکوس مقدار ویژه برای برخی ماتریس‌های خاص

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

زهره پورشعبان مازندرانی

استاد راهنما

دکتر رضا مختاری

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی (آنالیز عددی) خانم زهره پورشعبان مازندرانی

تحت عنوان

بررسی مسأله‌ی معکوس مقدار ویژه برای برخی ماتریس‌های خاص

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ــ استاد راهنمای پایان‌نامه — دکتر رضا مختاری

۲ــ استاد مشاور پایان‌نامه — دکتر امیر هاشمی

۳ــ استاد داور ۱

()

۴ــ استاد داور ۲

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان‌نامه، مسأله‌ی معکوس مقدار ویژه را برای ماتریس‌های سه قطری متقارن، ژاکوبی و قطری حاشیه‌ای که ماتریس‌هایی متقارن و تنک می‌باشند، مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این راستا پس از جمع آوری شرایط لازم و شرایط کافی دارای اثبات‌های سازنده، به پیاده‌سازی الگوریتم‌ها و برنامه‌های مربوطه به کمک نرم‌افزار Matlab می‌پردازیم.

رده‌بندی موضوعی : ۶۵F۱۸.

کلمات کلیدی : مسأله‌ی معکوس مقدار ویژه، ماتریس سه قطری متقارن، ماتریس ژاکوبی، ماتریس قطری حاشیه‌ای.

پیش‌گفتار

در مدل‌های ریاضی عموماً فرض می‌کنیم بین متغیرهای داخلی سیستم که پارامترهای درونی هستند و متغیرهای خارجی سیستم که رفتار خارجی را نشان می‌دهند تناظر وجود دارد. جریان بررسی و استخراج طیفی از اطلاعات و به دنبال آن هدایت رفتار دینامیکی سیستم با داشتن پارامترهای فیزیکی قبلی آن مثل جرم، طول، کشسانی، مقاومت، ظرفیت و غیره به مسأله‌ی مستقیم[۱] ارجاع داده می‌شود. در حالی که در مسأله‌ی معکوس[۲] به بررسی درستی، تعیین و برآورد پارامترهایی از سیستم، همچنین دریافت یا مشاهده‌ی رفتار سیستم پرداخته می‌شود. در مسأله‌ی مستقیم به بیان رفتار سیستم با توجه به پارامترهای آن پرداخته می‌شود حال آن‌که در مسأله‌ی معکوس، بیان پارامترهای سیستم بر اساس رفتار آن‌ها مورد توجه می‌باشد.

مسأله معکوس مقدار ویژه[۳] (IEP)، نوعی مسأله‌ی معکوس است که به دلیل کاربردهای زیادش مورد توجه قرار گرفته است. از میان کاربردهای متعدد این مسأله، می‌توان به موارد شناسایی سیستم، طراحی کنترل، ژئوفیزیک، طیف نمایی مولکولی، فیزیک ذره‌ای، شبیه‌سازی سیستم‌های مکانیکی و آنالیز

---

۱ Direct prroblem

۲ Inverse problem

۳ Inverse Eigenvalue Problem

ساختاری داده‌ای اشاره کرد. موضوع IEP در مورد ساخت (بازسازی) یک ماتریس با استفاده از داده‌های مشخص طیفی آن ماتریس است. داده‌های طیفی ممکن است کامل یعنی شامل همه‌ی زوج‌های مقدار ویژه و بردا ر ویژه‌ی ماتریس یا فقط اطلاعات جزیی از آن‌ها باشد. در این‌جا دو سوال اساسی وجود دارد. آیا مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی معکوس از دیدگاه نظری حل‌پذیر می‌باشد؟ اگر پاسخ این سوال مثبت است روش ساخت ماتریس مورد نظر از نقطه نظر محاسباتی به چه صورت می‌باشد؟

هدف عمده از دیدگاه نظری قابلیت حل‌پذیر بودن، ارایه و مشخص کردن شرایط لازم و کافی برای رسیدن به جواب است، در صورتی که هدف اصلی از دید محاسباتی، دنبال کردن یک سری عملیات است که با استفاده از آن‌ها، داده‌های طیفی داده شده، شدنی بوده و ماتریس را به صورت عددی مشخص کنند. هر دو مسأله، بسیار پیچیده بوده و نیاز به مطالعه‌ی فراوان دارند. طیف مطالعاتی این مسأله از کاربردهای مهندسی تا نظریه‌های جبری متمرکز شده است، اگر چه نتایج حتی دریک مبحث خاص نیز پراکنده شده‌اند.

در این پایان‌نامه سعی بر آن داریم که IEP را برای ماتریس‌های خاصی هم‌چون سه قطری متقارن، ژاکوبی[۴] و قطری حاشیه‌ای[5] تا حد امکان بررسی نماییم و اطلاعاتی در این مورد جمع‌آوری کنیم. به همین منظور، تعاریف و قضایای مورد نیاز را از مراجع [۳۰,۲۰,۱۹,۱۲,۲] انتخاب کرده و در فصل اول آورده‌ایم. فصل دوم، به بررسی IEP برای ماتریس‌های سه قطری متقارن در حالتی که کمترین و بیشترین مقادیر ویژه‌ی همه‌ی زیرماتریس‌های اصلی آن ماتریس در دسترس است اختصاص داده شده، همچنین شرایط لازم و کافی برای وجود چنین ماتریس‌هایی مطرح می‌شود [۵]. در فصل سوم IEP را برای ماتریس‌های ژاکوبی در سه حالت خاص مطرح کرده، شرایط لازم و کافی را بررسی نموده و الگوریتم‌های مربوطه را بیان می‌کنیم [۲۴,۲۳]. در فصل چهارم IEP برای ماتریس قطری حاشیه‌ای در سه حالت خاص مورد بررسی قرار می‌گیرد [۲۶,۲۲]. در قسمت پیوست نیز برای هر الگوریتم بیان شده، برنامه‌ای کامپیوتری توسط نرم افزار Matlab ارایه شده است.

شایان ذکر است که برای درک بهتر مسایل، بلافاصله بعد از هر الگوریتم، مثال‌هایی اجرا شده توسط نرم افزار Matlab ارایه شده است.

[۴] Jacobi

[5] Bordered diagonal matrices

فصل ۱

مقدمه

در این فصل تعاریف و قضایای مورد نیاز فصل‌های بعدی را مطرح می‌کنیم.

۱—۱ تعاریف مقدماتی

قرارداد ۱.۱ فضای برداری تمام ماتریس‌های m در n روی میدان $\mathbb{F}$ را با $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ و فضای برداری ماتریس‌های مربعی $n\times n$ را به اختصار با $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ نمایش می‌دهیم. در این پایان‌نامه فرض می‌کنیم $\mathbb{F}=\mathbb{R}$.

تعریف ۲.۱ فرض کنیم $A\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. برای مجموعه‌های اندیسی $\alpha\subseteq\{۱,\ldots,m\}$ و $\beta\subseteq\{۱,\ldots,n\}$، زیر ماتریس $A(\alpha,\beta)$، ماتریسی است که از ماتریس A به دست می آید به این صورت که سطرها و ستون‌های آن به ترتیب از مجموعه‌های اندیسی α و β انتخاب می‌شوند. به عنوان مثال

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix},\quad A(\{۱,۳\},\{۱,۲,۳\})=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}.$$

اگر $m = n$ و $\alpha = \beta$، زیر ماتریس $A(\alpha, \alpha)$ را زیر ماتریس اصلی[۱] ماتریس A می‌نامیم. هم‌چنین زیر ماتریس اصلی پیشروی $k \times k$ ماتریس A که آن را با A_k نمایش می‌دهیم ماتریسی است که از حذف $n-k$ سطر و ستون آخر ماتریس A به دست می آید. به عنوان مثال زیر ماتریس‌های اصلی پیشروی ماتریس A عبارتند از

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ٦ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}, \quad [۱].$$

تعریف ۳.۱ حداکثر تعداد ستون‌های (سطرهای) مستقل خطی یک ماتریس، رتبه‌ی[۲] آن ماتریس نامیده می‌شود.

تذکر ۴.۱ رتبه‌ی یک ماتریس تحت سه عمل زیر که به اعمال سطری مقدماتی[۳] معروف می‌باشند ثابت باقی می‌ماند.

. جابجایی دو سطر از ماتریس

. ضرب یک اسکالر ناصفر در سطری از ماتریس

. حاصل جمع مضربی از یک سطر با سطر دیگر

تبصره ۵.۱ برای ماتریس‌های $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ داریم

$$det(A) = det(A^T), \quad det(AB) = det(A)det(B).$$

تعریف ٦.۱ دترمینان زیر ماتریس مربعی ماتریس $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ را یک مینور[۴] از A گوییم. اگر زیر ماتریس، یک زیر ماتریس اصلی A باشد آن گاه مینور را مینور اصلی A می‌نامیم.

[۱] Principal submatrix

[۲] Rank

[۳] Elementary row operations

[۴] Minor

تعریف ۷.۱ ماتریس $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ را نامنفرد[۵] گوییم هر گاه $det(A) \neq 0$. در غیر این صورت A را منفرد [۶] گوییم.

تعریف ۸.۱ ماتریس‌های A و B را متشابه[۷] گوییم هر گاه ماتریس نامنفرد P وجود داشته باشد به گونه ای که داشته باشیم $A = P^{-1}BP$.

تعریف ۹.۱ قاعده‌ی کرامر[۸] روشی جهت نشان دادن جواب یکتای دستگاه خطی $AX = b$ است، وقتی که A یک ماتریس نامنفرد باشد. به این صورت که اگر x_i درایه‌ی iام بردار جواب $X \in \mathbb{R}^n$ باشد آن گاه

$$x_i = \frac{det(A \overset{i}{\leftarrow} b)}{det(A)}, \qquad i = 1, \dots, n$$

و منظور از $A \overset{i}{\leftarrow} b$ این است که بردار معلوم b به جای ستون iام ماتریس A قرار گرفته است.

تعریف ۱۰.۱ فرض کنیم

$$C(A) = \begin{bmatrix} detA_{11} & detA_{12} & \dots & detA_{1n} \\ detA_{21} & detA_{22} & \dots & detA_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ detA_{n1} & detA_{n2} & \dots & detA_{nn} \end{bmatrix}.$$

---
۵ Nonsingular
۶ Singular
۷ Similar
۸ Cramer's rule

آن گاه ماتریس الحاقی[۹] متناظر با A برابر است با $adjA = EC(A)^T E$ که

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & -1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & (-1)^{n-1} \end{bmatrix}.$$

و داریم

$$(adjA)A = A(adjA) = (detA)I, \qquad A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA.$$

۱—۲ برخی ماتریس‌های خاص

در این زیر بخش فرض می‌کنیم $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

۱) **ماتریس قطری :** A را قطری[۱۰] گوییم اگر برای $i \neq j$، داشته باشیم $a_{ij} = 0$. اگر $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$، آن گاه $diag(\Lambda) \in \mathbb{M}_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$diag(\Lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

۲) **ماتریس سه قطری :** A را سه قطری[۱۱] گوییم، اگر برای هر j و i که $|i-j| > 1$، $a_{ij} = 0$.

۳) **ماتریس متعامد :** A را متعامد گوییم، هر گاه $A^T = A^{-1}$.

[۹] Adjoint
[۱۰] Diagonal
[۱۱] Tridiagonal

۴) **ماتریس قطری بلوکی** : A را قطری بلوکی[۱۲] گوییم، هر گاه A به شکل

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{kk} \end{bmatrix}.$$

باشد، که به ازای $i = 1, 2, \dots, k$، $A_{ii} \in \mathbb{M}_{n_i}(\mathbb{F})$ و $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. در این حالت ماتریس A را به صورت $A = A_{11} \oplus A_{22} \oplus \dots \oplus A_{kk}$ یا $\oplus_{i=1}^{k} A_{ii}$ نشان می‌دهیم. $\oplus_{i=1}^{k} A_{ii}$ را جمع مستقیم ماتریس‌های $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{kk}$ می‌نامیم.

۵) **ماتریس جایگشتی** : ماتریس A را جایگشتی[۱۳] گوییم، هر گاه A از جابجایی سطرهای ماتریس همانی حاصل شود.

۶) **ماتریس نامنفی** : ماتریس A را نامنفی[۱۴] گوییم، هر گاه برای $i = 1, 2, \dots, n$، داشته باشیم $a_{ij} \geq 0$.

۷) **ماتریس تصادفی** : ماتریس نامنفی A را تصادفی[۱۵] (تصادفی سطری) گوییم، هر گاه مجموع درایه‌های هر سطر آن برابر یک شود.

۸) **ماتریس تصادفی دوگانه** : ماتریس A را تصادفی دوگانه[۱۶] گوییم، هر گاه مجموع درایه‌های هر سطر و هر ستون آن برابر یک شود.

۹) **ماتریس ژاکوبی** : ماتریس متقارن و سه قطری

$$J = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & o & \\ & b_2 & a_3 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & o & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

که در آن $b_i > 0$، را یک ماتریس ژاکوبی می‌نامیم.

---
[۱۲] Block diagonal
[۱۳] Permutation
[۱۴] Nonnegative
[۱۵] Stochastic
[۱۶] Doubly stochastic

۱۰) **ماتریس قطری حاشیه‌ای** : ماتریس متقارن به شکل زیر را یک ماتریس قطری حاشیه‌ای می‌نامیم.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ b_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & 0 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

۱۱) **ماتریس تحویل پذیر و تحویل ناپذیر** :ماتریس A را تحویل پذیر[۱۷] گوییم، به گونه‌ای که اگر $n = 1$، آن گاه $A = 0$،

و اگر $n \geq 2$، آن گاه ماتریس جایگشتی مانند $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ و عدد طبیعی r با $1 \leq r \leq n-1$ موجود باشند به طوری که

$$P^T AP = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

که در آن $B \in \mathbb{M}_r(\mathbb{R})$، $D \in \mathbb{M}_{n-r}(\mathbb{R})$، $C \in \mathbb{M}_{r\times n-r}(\mathbb{R})$ و $0 \in \mathbb{M}_{n-r\times r}(\mathbb{R})$. A را تحویل ناپذیر[۱۸] گوییم، هرگاه A تحویل پذیر نباشد.

۱۲) **ماتریس معین مثبت** : ماتریس متقارن A را معین مثبت[۱۹] گوییم، هر گاه برای هر بردار نا صفر X داشته باشیم $X^T AX > 0$. به همین ترتیب A معین منفی است اگر $X^T AX < 0$.

۱۳) **ماتریس تنک** : ماتریس A را تنک[۲۰] گوییم، هر گاه اکثر مؤلفه‌های آن صفر باشند.

۱۴) **ماتریس پر** : ماتریس A را پر[۲۱] گوییم، هر گاه بیشتر مؤلفه‌های آن ناصفر باشند.

۱۵) **ماتریس تئوپلیتز** : یک ماتریس به شکل

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_1 & & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_{n-1} & & & a_1 & a_2 \\ a_n & a_{n-1} & & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

[۱۷] Reducible
[۱۸] Irreducible
[۱۹] Positive definite
[۲۰] Sparse
[۲۱] Dense

را ماتریس تئوپلیتز[۲۲] می‌گوییم.

تبصره **۱۱.۱** اگر ماتریس A با یک ماتریس قطری متشابه باشد، آن گاه A را قطری شدنی[۲۳] می‌نامیم.

۱—۳ نرم برداری و نرم ماتریسی

تعریف **۱۲.۱** تابع $\|.\|: \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,+\infty)$ را یک نرم برداری[۲۴] گوییم، هر گاه به ازای هر بردار $X = (x_1,\ldots,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ و $Y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ و هر $a \in \mathbb{R}$، دارای خواص زیر باشد

(i) $\| X \| = 0 \Leftrightarrow X = 0$،

(ii) $\| aX \| = |a| \, \| X \|$،

(iii) $\| X + Y \| \leq \| X \| + \| Y \|$.

مثال **۱۳.۱** فرض کنیم $X = (x_1,\ldots,x_n)^T$ آن گاه هر یک از توابع زیر یک نرم برداری می‌باشند

i) $\| . \|_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,+\infty)$

$\| X \|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ برای $p \geq 1$،

ii) $\| . \|_\infty : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,+\infty)$

$\| X \|_\infty = max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

---

[۲۲] Teoplitz

[۲۳] Diagonalizable

[۲۴] Vector norm

تعریف ۱۴.۱ تابع $\|\cdot\|: \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,+\infty)$ را یک نرم ماتریسی[۲۵] گوییم، هر گاه به ازای هر ماتریس A و B و هر $a \in \mathbb{R}$، دارای خواص زیر باشد

(i) $\| A \| = 0 \Leftrightarrow A = 0$،

(ii) $\| aA \| = |a| \, \| A \|$،

(iii) $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$،

مثال ۱۵.۱ فرض کنیم $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. آن گاه هر یک از توابع زیر از $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ به توی $[0,+\infty)$ یک نرم ماتریسی می‌باشند.

(i $\| A \| = \sup\{\| Av \| / \| v \| : v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0\}$،

(ii $\| A \|_p = \max\limits_{\|X\|_p=1} \| AX \|_p$،

(iii $\| A \|_\infty = \max\limits_{\|X\|_\infty=1} \| AX \|_\infty$.

به سادگی می‌توان نشان داد که

$$\| A \|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad \| A \|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

۱—۴ مسأله‌ی مقدار ویژه

مسأله‌ی مقدار ویژه[۲۶]، نقش مهمی را در بسیاری از مسایل نظری و کاربردی ایفا می‌کند. این گونه مسایل در عرصه‌های مختلف علوم، مهندسی و اقتصاد به چشم می‌خورند. برخی از نمونه‌های این گونه مسایل در شاخه‌های مختلف علوم عبارتند از: در حل معادله‌ی شرودینگر[۲۷] در مکانیک کوانتمی، که مقادیر ویژه تعیین کننده‌ی سطوح انرژی هستند، پایداری یک هواپیما با مکان مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس

[۲۵] Matrix norm
[۲۶] Eigenvalue problem
[۲۷] Shrodinger

در صفحه‌ی مختلط مشخص می‌گردد، بسامد طبیعی ارتعاشات یک باریکه‌ی نور، مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس متناهی هستند، همچنین مطالعه‌ی ارتعاشات سیستم‌های دینامیکی و سازه‌ای و تحلیل پایداری طرح‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات پاره‌ای با مقادیر ویژه سر و کار دارند، هر دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی معمولی مرتبه اول با ضرایب ثابت می‌تواند بر حسب مقادیر ویژه‌ی ماتریس ضرایب آن حل شود و همچنین بررسی رفتار دنباله‌ی توان‌های $A, A^۲, A^۳, \ldots$ از یک ماتریس A بر حسب مقادیر ویژه‌ی آن خیلی آسان‌تر مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. این گونه دنباله‌ها در حل دستگاه‌های معادلات خطی و غیر خطی پدید می‌آیند. مقادیر ویژه در مسائل مهندسی مکانیک، مکانیک فضایی، ارتجاعی، سیالات، مهندسی برق و مهندسی هسته‌ای نیز کاربرد فراوان دارند[۱۹,۳۰].

به طور کلی تمامی این مسایل عملی پس از مدل سازی منجر به مسایل مقدار ویژه می‌شوند که به صورت $n+۱$ معادله و n مجهول $\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_n$ است و آن ها را به شکل زیر بیان می‌کنیم

$$F(X;\lambda) :\equiv \begin{bmatrix} f_۱(\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_n, \lambda) \\ \vdots \\ f_{n+۱}(\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_n, \lambda) \end{bmatrix} = ۰, \tag{۱}$$

که توابع f_i علاوه بر η_i ها به پارامتر λ نیز وابسته‌اند. به ازای مقادیر خاصی از پارامتر $\lambda = \lambda_i$، دستگاه (۱) دارای جوابی به صورت $X = [\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_n]^T$ است. این λ_iها را مقادیر ویژه‌ی (۱) نامیده و جواب $X = X(\lambda_i)$، بردار ویژه‌ی (۱) متناظر با مقدار ویژه‌ی λ_i نامیده می‌شود. مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی جبری یک رده‌ی خاص از مسایل مقدار ویژه است که در حالت کلی به شکل (۱) بوده و در آن f_i ها به جز یکی نسبت به λ و $X = [\eta_۱, \eta_۲, \ldots, \eta_n]^T$ خطی‌اند و به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۱۶ فرض کنیم ماتریس‌های $n \times n$ حقیقی A و B داده شده باشند، اسکالر $\lambda \in \mathbb{C}$ را طوری بیابید که دستگاه $n+۱$ معادله‌ای

$$\begin{cases} (A - \lambda B)X = ۰, \\ X^T X = ۱ \end{cases}$$

دارای جوابی مانند $۰ \neq X \in \mathbb{C}^n$ باشد. این مسأله با پیدا کردن مقدار λ به طوری که یک بردار غیر صفر X موجود باشد به گونه‌ای که $AX = \lambda BX$، معادل است. این مسأله برای A و B دلخواه بسیار کلی است و در حالت خاص با قرار دادن $B = I$ مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی جبری به این صورت بررسی می‌شود که، فرض کنید ماتریس $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ داده شده باشد، اسکالر λ را به گونه‌ای بیابید که برای بردار غیر صفر X

داشته باشیم

$$AX = \lambda X. \qquad (۲)$$

(λ, X) را جفت ویژه‌ی ماتریس A می نامیم.

تعریف ۱.۱۷ مجموعه‌ی تمام λهایی که مقادیر ویژه‌ی ماتریس A می‌باشند را طیف[۲۸] ماتریس A نامیده و با $\sigma(A)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱۸ زیر فضای خطی $L(\lambda)$ از $\mathbb{C}^n$، با بعد $n - Rank(A - \lambda I)$، تعریف شده به صورت

$$L(\lambda) := \{X \neq 0 | (A - \lambda I)X = 0\}, \qquad (۳)$$

را فضای پوچی متناظر با مقدار ویژه‌ی λ می‌نامیم. واضح است که λ مقدار ویژه‌ی A است هر گاه $L(\lambda) \neq \{\}$. یعنی $n - Rank(A - \lambda I) > 0$ و $A - \lambda I$ منفرد باشد پس $det(A - \lambda I) = 0$.

تعریف ۱.۱۹ چندجمله‌ای $P(\lambda)$ تعریف شده به صورت

$$P(\lambda) := det(A - \lambda I) \qquad (۴)$$

را چند جمله‌ای مشخصه‌ی[۲۹] ماتریس A گوییم. واضح است که چندجمله‌ای مشخصه‌ی یک ماتریس $n \times n$ از درجه n می‌باشد.

تبصره ۱.۲۰ صفرهای چندجمله‌ای مشخصه‌ی $P(\lambda)$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس A هستند. پس به طور نظری، مقادیر ویژه‌ی ماتریس دلخواه A را با قرار دادن $P(\lambda) = 0$ می‌توان به دست آورد.

[۲۸] Spectrum
[۲۹] Characteristic polynomial

تعریف **۲۱.۱** فرض کنیم $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A باشد. شعاع طیفی[۳۰] A که با $\rho(A)$ نمایش داده می‌شود را به صورت $\rho(A) = max_{\lambda\in\Lambda}|\lambda|$ تعریف می‌کنیم.

۱−۵ برخی ویژگی‌های مقادیر ویژه

در این بخش برای رعایت اختصار، از آوردن اثبات قضایا و نتایج خودداری می‌شود.

قضیه **۲۲.۱** ماتریس‌های متشابه مقادیر ویژه‌ی یکسانی دارند.

قضیه **۲۳.۱** مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های قطری، بالا مثلثی و پایین مثلثی درایه‌های روی قطر می‌باشند.

قضیه **۲۴.۱** فرض کنیم $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$، مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ باشند، آن گاه

$$trac(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \tag{5}$$

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i. \tag{6}$$

نتیجه **۲۵.۱** ماتریس A معکوس پذیر است اگر و فقط اگر مقادیر ویژه‌ی A مخالف صفر باشند.

قضیه **۲۶.۱** مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های متقارن حقیقی می‌باشند.

قضیه **۲۷.۱** اگر A یک ماتریس معین مثبت باشد آن گاه داریم

(i) تمامی زیر ماتریس‌های اصلی آن معین مثبت می‌باشند،

(ii) مقادیر ویژه‌ی A همگی مثبت می‌باشند (عکس این مطلب نیز صحیح است)،

(iii) دترمینان، اثر و تمامی مینورهای اصلی ماتریس A مقادیری مثبت می‌باشند،

(iv) تمامی توان‌های A معین مثبت می‌باشند.

[۳۰] Spectral radius

قضیه ۲۸.۱ فرض کنیم A_k زیر ماتریس اصلی پیشرو مرتبه k ماتریس معین منفی A باشد. آن گاه $(-1)^k det(A_k) > 0$.

قضیه ۲۹.۱ بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه‌ی متمایز، مستقل خطی می‌باشند.

قضیه ۳۰.۱ اگر A ماتریسی با مقادیر ویژه‌ی متمایز $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ باشد، آن گاه A با ماتریس قطری $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ متشابه است.

لم ۳۱.۱ اگر $X \neq 0$ بردار ویژه‌ی ماتریس A متناظر با λ باشد، آن گاه cX نیز برای هر c حقیقی مخالف صفر، بردار ویژه‌ی ماتریس A متناظر با λ می‌باشد.

لم ۳۲.۱ اگر λ مقدار ویژه‌ی A باشد، آن گاه $k\lambda$، برای هر $0 \neq k \in \mathbb{R}$، مقدار ویژه‌ی ماتریس kA می‌باشد.

قضیه ۳۳.۱ بردارهای ویژه‌ی متناظر با مقادیر ویژه‌ی متمایز از یک ماتریس متقارن متعامد هستند. یعنی اگر V_1 و V_2 بردارهای ویژه‌ی متناظر با مقدارهای ویژه‌ی متمایز λ_1 و λ_2 از ماتریس متقارن A باشند، آن گاه داریم $V_1^T V_2 = 0$.

قضیه ۳۴.۱ مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های A و A^T یکسان است و بردارهای ویژه‌ی آن ها در حالت کلی متفاوت هستند.

قضیه ۳۵.۱ فرض کنیم λ یک مقدار ویژه‌ی ماتریس A و X بردار ویژه‌ی نظیر آن باشد، اگر A^{-1} موجود باشد، آن گاه $1/\lambda$ مقدار ویژه‌ی A^{-1} است و بردار ویژه‌ی آن همان X است.

لم ۳۶.۱ فرض کنیم $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ آن گاه احکام زیر معادل هستند.

- A معکوس پذیر است.
- $rank(A) = n$.
- $det A \neq 0$.