وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه فیزیک

پایان نامه مقطع کارشناسی ارشد

رشته فیزیک نظری

عنوان پایان‌نامه:

مطالعه درهم تنیدگی کوانتومی سیستم های سه کیوبیتی

استاد راهنما:

دکتر یحیی اکبری

استاد مشاور:

دکتر اسفندیار فیضی

پژوهشگر:

مصطفی ابراهیمی محتشم

اسفند ۱۳۹۱

تبریز / ایران

بسم الله الرحمن الرحیم
الحمد لله رب العالمین الرحمن الرحیم مالک یوم الدین
ایاک نعبد و ایاک نستعین اهدنا الصراط المستقیم
صراط الذین انعمت علیهم غیر المغضوب علیهم
ولا الضالین

این مختصر

تقدیم به همسر عزیزم که استاد صبر و بردباری

در طول زندگیم بوده‌اند.

با سپاس از:

- استاد گرانقدر جناب آقای دکتر یحیی اکبری که راهنمایی این پایان‌نامه را به عهده داشته و در طی انجام آن راه گشای مشکلات پژوهشی بودند.
- استاد گرامی جناب آقای دکتر اسفندیار فیضی نیز که مشاوره این پایان نامه را بر عهده داشته‌اند.
- استاد محترم داور جناب آقای دکتر محمد علی فصیحی
- جناب آقای مهندس رضا حضرتی که زحمت تایپ و نشر این پایان نامه را بر عهده داشته‌اند.
- از تمام اساتید و دوستان عزیزی که در دانشگاه تبریز و دانشگاه شهید مدنی آذربایجان در طی این دوره از تحصیلات مشوقم بودند و یاریم کردند.

نام خانوادگی دانشجو: ابراهیمی محتشم **نام**: مصطفی

عنوان پایان نامه: مطالعه درهم تنیدگی کوانتومی سیستم های سه کیوبیتی

استاد راهنما: دکتر یحیی اکبری

استاد مشاور: دکتر اسفندیار فیضی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** فیزیک **گرایش:** نظری

دانشگاه: شهید مدنی آذربایجان **دانشکده:** علوم پایه

تاریخ فارغ التحصیلی: اسفند ماه ۹۱ **تعداد صفحه:** ۱۳٤

کلید واژه ها: درهم تنیدگی ، کیو بیت ، تبدیلات LOCC ، سنجه های درهم تنیدگی ، ۳ تنگل

چکیده: در مورد تشخیص و کاربرد سیستم‌های درهم‌تنیده‌ی دو کیوبیتی مطالعات فراوانی صورت گرفته است اما در مورد سیستم‌های سه کیوبیتی مطالعات هنوز در ابتدای راه است. ما در این پایان نامه به بررسی و مطالعه درهم‌تنیدگی سیستم‌های سه کیوبیتی پرداخته‌ایم. تبدیلات موضعی وارون پذیر یک سیستم سه کیوبیتی برای تعریف کلاس‌های هم‌ارزی مجموعه حالت‌های خالص درهم‌تنیده‌ی سه کیوبیتی استفاده شده اند و نشان داده شده است که در حالت کلی سیستم‌های سه کیوبیتی خالص به شش رده‌ی متمایز شامل یک رده کاملا جداپذیر ، سه رده جداپذیر دوگانه و دو رده W و GHZ با حداکثر درهم‌تنیدگی رده‌بندی می‌شوند. نشان داده می‌شود این شش رده با عملیات $LOCC$ قابل تبدیل به همدیگر نیستند. سنجه‌ی $3-$تنگل برای تمیز قائل شدن بین دو حالت $|W\rangle$ و $|GHZ\rangle$ به کاربرده شده است. محاسبه‌ی سنجه‌ی $3-$تنگل برای حالت $|W\rangle$ مقدار صفر و برای حالت $|GHZ\rangle$ مقداری بزرگتر از صفر را می دهد. علاوه بر این، به بررسی مقاومت حالت‌های درهم‌تنیده در مقابل از دست دادن یکی از کیوبیت‌ها در اثر گرفتن رد جزئی از آنها می‌پردازیم و اثبات می‌کنیم که حالت $|W\rangle$ بیشترین مقدار درهم‌تنیدگی را در مقایسه با هر حالت دیگر سه کیوبیتی حتی حالت GHZ نگه می‌دارد (مقاوم است).

سرانجام، شیوه‌ای برای دسته بندی سیستم‌های درهم‌تنیده‌ی آمیخته براساس بنا کردن شاهدهای درهم‌تنیدگی ارائه می‌دهیم و حدسی را مطرح می کنیم که براساس آن تمام حالت‌های درهم‌تنیده‌ی آمیخته با ترانهاد جزئی مثبت $(PPTES)$ به طبقه‌ی W تعلق دارند.

فهرست مندرجات:

مقدمه..... ۱

فصل اول:

پیشینه پژوهش و بررسی منابع..... ۸

فصل دوم:

تعاریف و مفاهیم اولیه..... ۲۱

۲-۱ کیوبیت..... ۲۱

۲-۲ سیستم دو کیوبیتی..... ۲۲

۲-۳ سیستم N کیوبیتی..... ۲۳

۲-٤ $LOCC$..... ۲٤

۲-٤-۱ توضیحی در مورد عملگرهای موضعی LO..... ۲۵

۲-٤-۱-۱ ترانهاد جزئی..... ۲۵

۲-٤-۱-۲ رد جزئی..... ۲۷

۲-۵ حالت خالص و آمیخته..... ۲۸

۲-۵-۱ معیارهای جداپذیری..... ۲۹

۲-۵-۲ تجزیه اشمیت..... ۳۰

۲-۵-۳ معیار PPT..... ۳۱

۲-٦ شرایط سنجه‌ی درهم‌تنیدگی..... ۳۲

فهرست مطالب

۲-۶-۱ جداپذیری..... ۳۲

۲-۶-۲ یکنواختی..... ۳۳

۲-۶-۳ نرمالیزاسیون..... ۳۳

۲-۶-٤ خاصیت جمعی..... ۳٤

۲-۶-۵ خاصیت زیرجمعی..... ۳٤

۲-۶-٦ منظم سازی..... ۳۵

۲-۶-۷ پیوستگی..... ۳۵

۲-۶-۸ تحدّب..... ۳٦

۲-۷ سنجه‌ی شکل‌یابی..... ۳٦

۲-۸ تلاقی..... ۳۹

۲-۹ تجزیه لونشتاین – سنپرا..... ٤۱

۲-۱۰ شاهد درهم‌تنیدگی و نگاشت‌های مثبت..... ٤۲

۲-۱۰-۱ قضیه هان – باناخ..... ٤٤

۲-۱۰-۲ نگاشت‌های مثبت..... ٤۵

۲-۱۰-۳ هم‌ریختی جامیلکوسکی..... ٤٦

فصل سوم:

نتایج و بحث..... ٤۹

۳-۱ انواع درهم‌تنیدگی حالت‌های دو کیوبیتی تحت *SLOCC*..... ۵۳

فهرست مطالب

۳-۱-۱ عملگرهای موضعی وارون‌پذیر..... ٥٤

۳-۱-۲ درهم‌تنیدگی دوجزئی تحت *SLOCC*..... ٥٥

۳-۲ درهم‌تنیدگی حالت‌های خالص سه کیوبیتی..... ٥٧

۳-۲-۱ حالت‌های غیر درهم‌تنیده و درهم‌تنیده‌ی دو جزئی..... ٥٨

۳-۲-۱-۱ رده *A-B-C* (حالت‌های حاصلضربی) کاملاً جداپذیر..... ٥٩

۳-۲-۱-۲ رده‌های *A-BC*، *AB-C*، *C-AB*.(جداپذیر دوگانه)..... ٥٩

۳-۲-۲ درهم‌تنیدگی سه کیوبیتی کامل..... ٦٠

۳-۲-۲-۱ رده‌ی $|GHZ\rangle$..... ٦٣

۳-۲-۲-۲ رده‌ی $|W\rangle$..... ٦٥

۳-۲-۳ مرتبط‌سازی رده‌های *SLOCC* بوسیله‌ی عملگرهای غیر وارون پذیر..... ٦٧

۳-۲-٤ سنجه‌های درهم‌تنیدگی و کلاس‌های شش گانه‌ی تحت *SLOCC*..... ٦٩

۳-۲-٥ شیوه‌ی عملی تعیین ماهیت یا کلاس یک حالت اختیاری $|\psi\rangle$..... ٨٠

۳-۳ حالت $|W\rangle$ و درهم‌تنیدگی دوجزئی باقیمانده..... ٨١

۳-۳-۱ درهم‌تنیدگی باقیمانده‌ی متوسط..... ٨٤

۳-۳-۲ کمترین جفت درهم‌تنیده..... ٩٠

۳-٤ τ یک مونوتون درهم‌تنیدگی است..... ٩٢

۳-٥ طبقه‌بندی حالت‌های سه کیوبیتی آمیخته..... ١٠٢

مراجع

مقدمه

مقدمه

درهم تنیدگی سیستم های کوانتومی بنا به اظهارات دانشمندان علم اطلاعات کوانتومی (QIT) یکی دیگر از جنبه‌های اعجاب انگیز مکانیک کوانتومی نظیر اصل برهم نهی[۱] حالات، اصل عدم موضعیت[۲]، تکثیر ناپذیری[۳]، تداخل[٤] و عدم موجبیت[٥] است که در پیشرفت نظریه اطلاعات کوانتومی که اساس ساخت و طراحی کامپیوترهای کوانتومی و مخابرات و ارتباطات کوانتومی می باشند، نقش اساسی ایفا می کنند [۱]. علت این امر به زبان ساده این است که اگر دو سیستم کوانتومی A و B در هم تنیده باشند – که معمولا این دو سیستم با متصدیانش آلیس و باب که معمولا وظیفه اندازه گیری[٦] و دستکاری[۷] را در سیستم های مربوط به خودشان بر عهده دارند مشخص می شوند – حتی در صورتی که این دو سیستم در فواصل فضایی بسیار دوری از هم قرار بگیرند می توان با تغییر حالت موضعی یکی از سیستم ها که مثلاً در اثر اندازه گیری آلیس در سیستم A انجام

[1] Superposition
[2] Nonlocality
[3] Nonclonablity
[4] Interfrence
[5] Uncertainity
[6] Measurement
[7] Manipulation

می شود، به طور آنی باب در سیستم B می تواند متوجه تغییر حالت سیستم دیگر بشود. این در حالیست که در مدل های کلاسیکی وجود هرگونه رابطه ای بین اندازه گیری های موضعی روی سیستم های جدا از هم ممنوع است. نامساوی های بل حد و اندازه تاثیرات اندازه گیری دو سیستم را مشخص خواهد کرد و نقض نامساوی بل مستلزم در هم تنیدگی سیستم خواهد بود. حالت های کوانتومی خالص در هم تنیده آنتروپی صفر دارند. اما به نظر می رسد زمانی که شخص به یکی از زیرسیستم ها دسترسی داشته باشد این حالت ها می توانند آنتروپی بیشینه را داشته باشند. تغییر حالت آنی زیرسیستم دوم گرچه در ابتدا ناقض اصل نسبیت و محدودیت انتقال اطلاعات بین دو زیرسیستم با سرعتی بیشتر از سرعت نور به نظر می رسد با این حال قید ارتباطات کلاسیکی در LOCC [1] ، یعنی عملیات موضعی با ارتباطات کلاسیکی این تناقض را برطرف می سازد. به این ترتیب که گرچه هر دستکاری و تغییر (اندازه گیری) در سیستم آلیس آناً سبب بروز تغییر در سیستم باب خواهد شد اما با وجود این هرگونه اطلاع از این دستکاری با ارتباطی کلاسیکی (با محدودیت سرعت نور) توسط آلیس و باب مبادله خواهد شد. با این وجود به دلیل اصل برهم نهی حالات در دو سیستم، انتقال اطلاعات نهفته در یک سیستم به سیستم دیگر هم با امنیت بیشتر و هم با حجم بیشتری انجام خواهد یافت. (بحث مفصل و مبسوط در مورد پارادوکس EPR و نامساوی های بل در مرجع [۱] و [۲] آورده شده است.) با توجه به این امتیاز موجود در سیستم های در هم تنیده بررسی وجود درهمتنیدگی و میزان آن در سیستم های کوانتومی مورد بحث و مداقه دانشمندان این علم قرار گرفته است. ابزار موثری که بتواند شرط در هم تنیدگی یا جداپذیری یک حالت کوانتومی را برای ما معین کند به عنوان معیارهای[2] در هم تنیدگی مشخص شده است.

[1] Local Operation and Classical Communication
[2] Criteria

یکی از معیارهای مهم و مطرح در این ضمینه معیار پرز یا روش ترانهاد پاره ای مثبت (PPT) [1] است که برای سیستم های $2\otimes 2$ و $3\otimes 2$ شرط لازم و کافی را برای جداپذیری می دهد. کارآیی این روش مشروط بر مثبت بودن ترانهاد پاره ای حالت است. در ابعاد بالاتر لازم و کافی بودن شرط ضروری نیست و علاوه بر آن محاسبه ترانهاد پاره ای نیز بسیار دشوار است [۳-۵]. معیار مفید دیگر برای تعیین درهم تنیدگی حالت های PPT ، معیار برد است [۳ و ۵]. در این معیار براساس وجود یک مجموعه حالت های حاصل ضربی خالص $\{|\psi_i\rangle|\Phi_i\rangle\}$ برای هر حالت جداپذیر استوار است که این مجموعه حالت های حاصل ضربی خالص، برد ρ را تشکیل می دهند. در حالی که $\{|\psi_i^*\rangle|\Phi_i\rangle\}$ برد ρ^{T_A} را نشان می دهد. معیار های دیگر که عموما ضعیف تر از معیار پرز هستند، معیار کاهش و معیار بی نظمی و مهادساز می باشند. هیچ یک از این معیارها و حتی ترکیبی از آنها به منظور ارائه یک شاخص کامل برای جداپذیری کافی نیستند.

رهیافت دیگر برای تشخیص درهم تنیده بودن و جداپذیر بودن حالت ها شامل شاهدهای در هم تنیدگی است [٦]. یک شاهد در هم تنیدگی یک مشاهده پذیر مانند w است که مقدار چشمداشتی آن روی حالت های جداپذیر نامنفی است اما مقدار چشمداشتی آن روی یک حالت درهم تنیده ρ منفی است. در این حالت می گوییم شاهد w درهم تنیدگی ρ را تشخیص می دهد. این ایده علاوه بر ارائه ابزار نظری دیگری برای تشخیص حالت های درهم تنیده، پاسخ این سوال را که" آیا یک روش تجربی برای تشخیص مجموعه حالت های کوانتومی و جود دارد یا نه؟" در اختیار ما می گذارد. با مطالعه ساختار هندسی مجموعه حالت های کوانتومی می توان نشان داد که برای هر حالت درهم تنیده ، یک شاهد در هم تنیدگی وجود دارد [۳ و ٤]. بنابراین همواره مشاهده پذیری که می تواند اندازه گیری شود، وجود دارد که نشان خواهد داد که حالت درهم

[1] Positive Partial Transpose

تنیده است. شاهدهای در هم تنیدگی را می توان با استفاده از نگاشت های مثبت به دست آورد که یافتن این نگاشت های مثبت و شاهدهای در هم تنیدگی کاری بسیار سخت و دشوار است.

مسئله دیگری که در نظریه اطلاعات کوانتومی مطرح است، تعیین مقدار کمی در هم تنیدگی یک حالت در هم تنیده است. در واقع در هم تنیدگی کوانتومی همانند پتانسیل در فرآیندهای اطلاعات کوانتومی عمل می کند و لذا بایستی بتوان مانند هر پتانسیلی یک مقدار کمی برای آن پیدا کرد. هر تابعی که مقدار در هم تنیدگی کوانتومی را مشخص کند، سنجه [1] در هم تنیدگی نامیده می شود. از مهم ترین سنجه هایی که تا کنون برای تعیین محتوای کمی در هم تنیدگی سیستم های دوذره ای پیشنهاد شده است، در هم تنیدگی شکل یابی[2] است که توسط بنت [3] و همکارانش معرفی شده است [۷] در هم تنیدگی شکل یابی مقدار کمی مقادیر لازم برای تولید یک حالت در هم تنیده را مشخص می کند. هیل[4] و ووترز[5] [۸] نشان دادند که برای سیستم های $2\otimes 2$ در هم تنیدگی شکل یابی، تابع یکنواختی از کمیت دیگری به نام تلاقی[6] است. ووترز در مرجع [۹] روشی جهت محاسبه تلاقی یک حالت دلخواه از سیستم $2\otimes 2$ ارائه داده است. تمامی کارها و مطالعات مذکور در فوق، اغلب در مورد در هم تنیدگی سیستم های دو کیو بیتی انجام یافته اند اما در مورد سیستم های سه کیو بیتی هنوز مطالعات در ابتدای راه است. ما در این پایان نامه بررسی و مطالعه در هم تنیدگی سیستم های سه کیو بیتی را داشته ایم که حاوی سه فصل اساسی است.

[1] Measure
[2] Formation
[3] Bennet
[4] Hill
[5] Wootters
[6] Concurrence

فصل اول به بررسی منابع و تعاریف ضروری مقدماتی در زمینه انواع حالت های کوانتومی، اعم از جداپذیر و در هم تنیده پرداخته و نیز تعریف برخی از عملگرهای موضعی را آورده ایم.

فصل دوم (مواد و روش ها) کلیت روش های به کار گرفته شده برای رده بندی سیستم های در هم تنیده سه کیو بیتی بررسی شده است که در حالت کلی با استفاده از این روش ها می توان نشان داد که سیستم های سه کیو بیتی به شش رده متمایز جداپذیر سه گانه $A-B-C$ $(Separable)$ و جداپذیر دو گانه $(Biseparable)$ $A-BC$ و $B-AC$ و $C-AB$ و دو حالت غیرمعادل با حداکثر در هم تنیدگی یعنی رده های GHZ و W رده بندی می شوند و به طور کلی نشان داده می شود که این شش رده تحت هیچ شرایطی از عملیات $LOCC$ قابل تبدیل به همدیگر نیستند. در این بخش به معرفی $3-Tangle$ سنجه ای که در مورد در هم تنیدگی سیستم های سه کیو بیتی توسط کافمن و همکاران به کار برده شده است خواهیم پرداخت [۱۰] و نیز به بررسی مقاومت حالت های در هم تنیده در مقابل از دست دادن هریک از سه کیو بیت می پردازیم و اثبات می کنیم که بر طبق معیارهای مختلف ، حالت $|W\rangle$ بیشترین مقدار در هم تنیدگی را در مقایسه با هر حالت سه کیو بیتی دیگر حتی $|GHZ\rangle$ نگه می دارد.

محاسبه $3-Tangle$ برای حالت های GHZ مقداری بزرگ تر از صفر و برای حالت $|W\rangle$ مقدار صفر را می دهد و به این ترتیب تفکیک شش رده متمایز برای حالت های در هم تنیده ممکن می شود.

در ادامه فصل ۳ نشان داده ایم که $3-Tangle$ یک مونوتون در هم تنیدگی می باشد و نهایتا در آخر فصل ۳ به طبقه بندی حالت های سه کیو بیتی آمیخته که عمدتاً با بنا کردن شاهدهای در هم تنیدگی انجام می شود پرداخته و در انتهای فصل حدس و گمانی را مطرح می سازیم که مطابق آن گفته می شود که تمام حالت های در هم تنیده با ترانهاد جزئی مثبت $(PPTES)$ به طبقه W تعلق دارند.

فصل اول:

پیشینه پژوهش و بررسی منابع

فصل اول:

پیشینه پژوهش و بررسی منابع

درهم تنیدگی کوانتومی یکی از شگفت‌انگیزترین جنبه‌های مکانیک کوانتومی است. این پدیده‌ی غیرکلاسیکی که اولین بار در سال ۱۹۳۵ توسط اینشتین در مقاله معروف EPR[1] [۱] و شرودینگر [۱۱] معرفی شد، سالیان درازی توجه زیادی را به خود جلب نمود. اینشتین و پیروانش بر این عقیده بودند که وجود چنین پدیده‌هایی در مکانیک کوانتومی دلیل بر نقص آن است[2]. لذا معتقد بودند که برای این که اصل موضعیت یا جایگزیدگی ذرات نقض نشود، می‌بایست نظریه‌ی کاملی را با استفاده از وارد کردن پارامتری بنام متغیر نهانی[3] بوجود آورد. در این راستا تلاش‌های زیادی برای توسعه مفهوم متغیر نهانی صورت گرفت که برجسته‌ترین آنها توسط بوهم[4] بود [۱۲]. از سوی دیگر بل[5] در سال ۱۹٦٤ نشان دادکه تمامی تلاش‌ها برای توسعه نظریه‌ی متغیر متغیر پنهان محکوم به شکست است، چرا که نامساوی بل که بر پایه متغیرهای پنهان بدست آمده بود، قادر به

[1] Einstein Pudolsky Rosen
[2] اینشتین برای مسخره کردن درهم تنیدگی تعبیر «تاثیر از راه دور شبح‌گونه» را بکار برد!
[3] Hidden Variable
[4] Bohm
[5] Bell

توصیف بعضی از حالت‌های کوانتومی نبود. لذا نقض این نامساوی توسط این حالت‌ها وجود اثر غیر موضعیت یا عدم جایگزیدگی را در کوانتوم تقویت نمود. تقریباً از سال ۱۹۹۰ به بعد پس از انتشار نتایج تجربی این مقاله، مباحث مربوط به درهم‌تنیدگی کوانتومی به طور دقیق‌تر مورد توجه علاقه‌مندان مبانی کوانتومی قرار گرفت.

در سال‌های اخیر با ظهور شاخه‌ای جدید از فیزیک و مخابرات به نام اطلاعات کوانتومی و با توجه به نقش درهم‌تنیدگی‌های کوانتومی در فرآیندهای این نظریه مانند انتقال از راه دور[1]، کدگذاری‌های فشرده[2] و رمزنگاری[3]، تعیین جداپذیری سیستم‌های کوانتومی و بررسی میزان در هم تنیدگی آنها در حالت‌های خالص و آمیخته از اهمیت بالایی برخوردار گردید.

درهم‌تنیدگی کوانتومی معمولاً از هم‌بستگی کوانتومی بین زیرسیستم‌های جدا از هم ناشی می‌شود. این هم‌بستگی کوانتومی که نمی‌توان آن را توسط عملیات محلی بر روی زیرسیستم‌های جدا از هم بوجود آورد، معمولاً در زیرسیستم‌هایی وجود دارد که تنها در گذشته با یکدیگر برهم‌کنش داشته و اکنون هیچ برهم‌کنشی با یکدیگر ندارند. بنابراین اگر دو سیستم در گذشته برهم‌کنش داشته باشند، عموماً این امکان وجود ندارد که حالت هریک از زیرسیستم‌ها را مستقل از یکدیگر تعیین نمود. این همان تعبیر کپنهاکی از مکانیک کوانتومی است که بیان می‌کند حالت دو ذره‌ی جفت شده تا زمان مشاهده، نامعین باقی می‌ماند. با انجام اندازه‌گیری روی یکی از ذرات، یکی از کمیت‌های جفت شده‌ی ذره‌ی اول تعیین می‌شود. این امر موجب می‌شود که بی‌درنگ مقدار متناظر در ذره‌ی دوم مشخص شود. به عبارت دیگر اگر دو ذره در یک سیستم یک بار با هم اندرکنش داشته‌باشند و سپس از هم جدا شوند، اندازه‌گیری روی یکی از آنها تاثیر آنی در حالت دیگری ایجاد می‌کند، حتی اگر دو ذره خیلی از هم دور شده باشند. بطور مثال اگر اسپین یکی از ذرات مشخص شود که ساعتگرد

[1] Teleportation
[2] Dense Coding
[3] Cryptography

است، اسپین ذره‌ی دوم بی‌درنگ به حالت پادساعتگرد می‌رود. تعیین مقدار کمی درهم‌تنیدگی یک حالت درهم‌تنیده مسئله مهمی در نظریه اطلاعات کوانتومی است. هر تابعی که مقدار کمی درهم‌تنیدگی کوانتومی را مشخص می‌کند، سنجه[1] درهم‌تنیدگی نامیده می‌شود.

برای حالات خالص دو قسمتی فقط یک سنجه وجود دارد که برای تعیین درهم‌تنیدگی متقاعدکننده است و آن آنتروپی فون نویمن[2] برای ماتریس چگالی کاهش یافته می‌باشد [۱۳]. اگر حالت جدا پذیر باشد (که می‌تواند به صورت حاصلضرب مستقیم زیرسیستم‌ها نوشته شود) برای تمام منظورها این حالت غیر درهم‌تنیده است [۷]. پس اگر چنین حالت‌هایی هم‌بستگی داشته باشند از نوع کلاسیکی است که می‌توان آن را به صورت ترکیبی از حاصلضرب‌ها با ضرایب مثبت نوشت. ولی اگر نتوان ماتریس چگالی این زیرسیستم‌ها را به شکل ترکیبی از حاصلضرب‌ها با ضرایب مثبت نوشت در این صورت آن را درهم‌تنیده گویند.

در زیر ما تعدادی از سنجه‌های درهم‌تنیدگی را معرفی می‌کنیم:

۱. تقطیر[3] درهم‌تنیدگی (D): این سنجه فقط به این سوال پاسخ می‌دهد که حالت مرکب درهم‌تنیده ما چقدر برای انتقال آنی کوانتومی مناسب است [۷] که در آن کلاسی از عملگرهای کوانتومی به نام اعمال محلی کوانتومی همراه با ارتباط کلاسیکی ($LOCC$) معرفی شده‌اند. تلاش برای محاسبه مقدار صریح تقطیر درهم‌تنیدگی مشکل است ولی می‌توان ارتباط بین معیار ترانهاد پاره‌ای مثبت و تقطیر درهم‌تنیدگی را برقرار نمود [۱٤] [۵].

[1] Measure
[2] Von Neumann Entropy
[3] Distillation

۲. درهم‌تنیدگی شکل‌یابی (EOF):اولین بار توسط بنت[1] و همکارانش [۷] معرفی شد. درهم‌تنیدگی شکل‌یابی در واقع مقدار کمّی منابع برای تولید یک حالت درهم‌تنیده را مشخص می‌کند. درهم‌تنیدگی شکل‌یابی یک کران بالایی از تقطیر درهم‌تنیدگی است و مقدار آن برای تمام حالات جداپذیر صفر می‌باشد، در حالی که مقدار تقطیر درهم‌تنیدگی برای تمام حالات جداپذیر صفر نبود. هیل[2] و ووترز[3] نشان دادند [۸] که برای سیستم‌های $2\otimes2$ درهم‌تنیدگی شکل‌یابی تابع یکنواختی از کمیت دیگری بنام تلاقی[4] است. ووترز [۹] روشی را برای محاسبه‌ی تلاقی یک حالت دلخواه از سیستم $2\otimes2$ ارائه داده‌است.

سنجه‌ی شکل‌یابی از اهمیت بالایی برخوردار است. این سنجه برای حالت‌های خالص به صورتی است که با گرفتن رد روی هریک از زیرسیستم‌های ماتریس چگالی موردنظر و محاسبه‌ی ویژه مقادیر آن و سپس بدست آوردن آنتروپی می‌توان میزان درهم‌تنیدگی این حالت‌ها را محاسبه نمود. اما برای حالت‌های آمیخته به علت وجود درهم‌تنیدگی کلاسیکی، این روش معیار خوبی برای اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی نیست. لذا برای حالت‌های آمیخته سنجه‌ی شکل‌یابی به صورت مینیمم متوسط آنتروپی رو ی تمامی تجزیه‌های ماتریس چگالی آمیخته به حالت‌های خالص می‌باشد که محاسبه‌ی آن به صورت تحلیلی مشکل می‌باشد. برای ابعاد دلخواه و سیستم‌های بیشتر از یک جفت کیوبیت هنوز راه حل‌های تحلیلی دقیقی بدست نیامده‌است. در مرجع [۱۵] چن و همکارانش توانستند با تجزیه به یک ماتریس چگالی آمیخته $2\otimes n$ به حالت‌های خالص $2\otimes2$ یک مرز پایینی سنجه‌ی شکل‌یابی را برای این حالت‌ها بدست آوردند. در مراجع [۱۶] و [۱۷] فی و همکارانش در ابعاد بالا سنجه‌ی شکل‌یابی را برای حالت‌های آمیخته مطالعه کردند و نشان دادند که برای حالت خالص سنجه‌ی

[1] Benett
[2] Hill
[3] Wotters
[4] Concurrence

شکل‌یابی یک تابع افزایشی از تلاقی تعمیم یافته[1] است. در مرجع [۱۸] چن و همکارانش یک مرز پایین تلاقی را با استفاده معیار ترانهاد جزئی و معیار (realignment) معرفی کردند که با استفاده از آن مقدار دقیق تلاقی را برای حالت‌های ایزوتوپ بدست آوردند.

۳. ارزش درهم‌تنیدگی (EC): معرف کمترین تعداد زوج‌های EPR است که جهت نشان دادن کپی‌های یک حالت مرکب حاصل از اعمال محلی همراه با ارتباط کوانتومی ($LOQC$) لازم است. این سنجه ممکن است با درهم‌تنیدگی شکل‌یابی یکسان باشد [۱۹].

٤. آنتروپی نسبی درهم‌تنیدگی: این سنجه‌ی درهم‌تنیدگی توسط ودرال[2] ارائه شد که در آن کمیتی به نام فاصله، کمینه‌سازی می‌شود [۲۰] [۲۱]. در این زمینه نشان داده شد که آنتروپی نسبی فون نویمن شرایط لازم برای فاصله‌ی معرفی شده در این سنجه را داراست. اگرچه شکل این سنجه آسان به نظر می‌رسد ولی محاسبه‌ی آن بدلیل وجود کمینه‌سازی کاری دشوار است. بطوری که آنتروپی مذکور فقط برای حالات خاصی مانند حالات بل به طور صریح محاسبه شده‌است.

۵. قدرت درهم‌تنیدگی[3]: مینیمم حالات جداپذیری که برای حذف تمامی حالات درهم‌تنیده لازم است معرف قدرت درهم‌تنیدگی می‌باشد. دوو و همکارانش [۲۲] با ارائه یک تعبیر هندسی از قدرت درهم‌تنیدگی نشان

[1] Generalized Concurrence
[2] Vederal
[3] Robustness of entanglement