دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه آمار

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته آمار ریاضی

عنوان

تحلیل قابلیت اعتماد یک سیستم منسجم با مؤلفه‌های آماده بکار

استاد راهنما

دکتر محمد خنجری صادق

استاد مشاور

دکتر محسن رضا پور

نگارش

فتانه حیدری

شهریور ۹۲

تقدیم به

آنهایی که دوستشان دارم:

همسر مهربانم، دریای عشق و عاطفه

پدر و مادر بزرگوارم، سرچشمه مهر و محبت و انسانیت

برادر و خواهران عزیزم، گنجینه مهربانی و صمیمیت

خالصانه‌ترین سپاس‌ها و عاشقانه‌ترین عواطف را تقدیم شما می‌کنم.

سپاس گزاری

سپاس بیکران خدای را که توان نوشتن از اوست تا به انجام رسانم هر آنچه را که به یادش آغاز کردم. حمد و ثنا دانای مطلق را که چراغ معرفت در عالم افروخت و توفیق دانش اندوزی و گام نهادن در گذرگاه معرفت را به من ارزانی داشت و سپاس آنان را که روشنایی ردای علمشان نردبان ناجی نادانی است، آنان که معلم میثاق مهرند و شکوفاگر شاخه شباب اندیشه.

از دریچه عشق به بلندای علم خدا می نگرم و در دامنهٔ سرسبز آن، قدردان انسانهای شریفی هستم که مرا بدین جا رسانیده اند و پرسان از مسیری که مرا در راستای رفتن به این بلندا حفظ کند.

چنانچه این مختصر کارم شایسته ارزشی باشد، شایسته تر آن است که یاری ها و راهنمایی های استاد علم و اخلاق جناب آقای دکتر محمد خنجری صادق را ارج نهم که در سایه راهنمایی های عالمانه شان، سعی و تلاش بی حد و حصر شان، دلسوزی های صبورانه و همکاری-های بیدریغ شان این بار گران به منزل رسید.

همچنین بر خود واجب می دانم از زحمات بی شائبه و تلاش های جبران ناپذیر استاد مشاور جناب آقای دکتر محسن رضاپور که در تمام مراحل پایان نامه همراه و همگام من بودند و از راهنمایی های ارزنده ایشان بهره مند گردیدم، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

و باز هم اجازه می خواهم از زیباترین ها در جهان، پدر و مادر، همسر عزیزم که تنها عظمت یاری آنها توان پاهایم، انگیزه کارهایم

و دلخوشی راهم بود و اینک ثمره عشق، محبت و فداکاری آنهاست که در وجودم خلاصه شده است قدردانی نمایم و این رساله را با تمام وجود تقدیمشان نمایم.

تحلیل قابلیت اعتماد یک سیستم منسجم با مؤلفه‌های آماده بکار

چکیده

استفاده از مؤلفه آماده بکار در یک سیستم سبب افزایش قابلیت اعتماد آن می شود. این‌گونه سیستم‌ها طوری طراحی شده‌اند که در صورت خرابی مؤلفه‌ای که منجر به از کار افتادن سیستم می‌شود می‌توان آن را با یک مؤلفه آماده بکار جایگزین کرد. در حالت کلی سه نوع مؤلفه آماده بکار وجود دارد. مؤلفه نوع اول(داغ)، نرخ خرابی این مؤلفه برابر با نرخ خرابی مؤلفه‌های موجود در سیستم است. نوع دوم این نوع مؤلفه‌ها را مؤلفه‌ی آماده بکار سرد می نامند، این نوع مؤلفه‌ها دارای نرخ خرابی صفر می‌باشند و نوع سوم را مؤلفه‌های آماده بکار گرم می‌نامند، این مؤلفه‌ها دارای نرخ خرابی بین صفر و نرخ خرابی مؤلفه‌های موجود در سیستم می باشند.

در این پایان‌نامه برخی خواص قابلیت اعتماد سیستم‌ها از جمله میانگین طول عمر سیستم و میانگین باقیمانده طول عمر سیستم و تعداد مؤلفه‌های سالم در زمان شکست سیستم زمانی که سیستم مجهز به مؤلفه‌های آماده بکار می‌باشد مورد بررسی قرار می‌گیرد. بر روی این مسأله که موضوع نسبتاً جدیدی می‌باشد طی چند سال اخیر تحقیقاتی صورت گرفته است. دانستن اینکه در زمان شکست سیستم چه تعداد مؤلفه هم‌چنان سالم هستند به منظور استفاده‌های بعدی از این نوع مؤلفه‌ها، برای تحلیل‌گران قابلیت اعتماد سیستم‌ها بسیار مهم و ضروری است.

واژگان کلیدی: تحلیل قابلیت اعتماد، سیستم منسجم، مؤلفه‌های آماده بکار

پیش گفتار

در این پایان‌نامه برخی خواص قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم که شامل انواع مؤلفه‌های آماده بکار هستند بررسی شده است. در فصل اول، مروری بر مفاهیم پایه و اولیه در ارتباط با قابلیت اعتماد و ترتیب‌های تصادفی انجام شده است. از جمله این مفاهیم می‌توان به تابع قابلیت اعتماد، تابع نرخ مخاطره، تابع میانگین طول عمر باقیمانده، ترتیب از نظر احتمالی، ترتیب از نظر نرخ مخاطره و ترتیب از نظر میانگین باقیمانده و توزیع آماره‌های ترتیبی و همچنین مفاهیم اولیه سیستم‌های منسجم را معرفی کرده و برخی تعاریف مربوط به آن را بیان می‌کنیم. در ادامه مفهوم علامت یک سیستم منسجم را که یک مبنا برای مقایسه سیستم‌ها در شرایط خاص است بیان کرده و به بررسی چند قضیه در این مورد می‌پردازیم و همچنین به توابع توزیع ابرمینیمال و ابرماکسیمال، علامت ماکسیمال و مینیمال اشاره می‌کنیم. آشنایی با این مفاهیم برای مطالعه مطالب ارائه شده درفصول بعدی مفید می‌باشند.

در فصل دوم، ابتدا مؤلفه‌های آماده بکار و انواع آن تعریف می‌شوند. در یک سیستم استفاده از مؤلفه‌های آماده بکار باعث افزایش قابلیت اعتماد آن می‌شود. وقتی مؤلفه‌های خراب باعث از کار افتادن کل سیستم می‌شوند در این صورت می‌توانیم آن را با مؤلفه‌های آماده بکار جایگزین کنیم. در این فصل به بررسی سیستم منسجمی که مجهز به مؤلفه‌های آماده بکار از نوع گرم است پرداخته و متوسط تعداد مؤلفه‌های سالم آماده بکار گرم در هنگام خرابی سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد. در انتهای این فصل یک مسأله بهینه‌سازی در مورد تعداد مؤلفه‌های آماده بکار گرم مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل سوم، ابتدا مفهوم میانگین باقیمانده عمر که یکی از مهم‌ترین مشخصه‌ها در تحلیل قابلیت

اعتماد سیستم‌ها می‌باشد تعریف می‌شود. در ادامه فصل، سه تعریف مختلف از تابع میانگین باقیمانده عمر یک سیستم k از n با یک مؤلفه آماده بکار سرد ارائه می‌شود همچنین بعضی از نتایج ترتیب‌های تصادفی مرتبط با طول عمر سیستم با استفاده از توزیع آماره‌های ترتیبی بدست آمده است. در انتهای پایان‌نامه به طور خلاصه نتیجه‌گیری و آینده تحقیق بیان شده است.

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

نمادها و علائم اختصاری

آماره مرتب iام از یک نمونه n تایی .... $X_{(i)}, X_{i:n}$

بردار وضعیت سیستم منسجم .... $X = (x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$

تابع توزیع .... $F(t)$

تابع توزیع تجمعی .... CDF

تابع چگالی .... $f(t)$

تابع ساختار سیستم منسجم .... φ

تابع قابلیت اعتماد(تابع بقا)، سیستم یا مؤلفه .... $R(t) or \overline{F}(t)$

تابع میانگین طول عمر باقیمانده .... $m(t)$

تابع نرخ مخاطره .... $r(t)$

ترتیب احتمالی .... $\leq_{st}$

ترتیب میانگین طول عمر باقیمانده .... $\leq_{mrl}$

ترتیب نرخ مخاطره .... $\leq_{hr}$

طول عمر باقیمانده مؤلفه در حال کار X بعد از اولین شکست در سیستم .... X_i^*

طول عمر سیستم منسجم .... T

علامت سیستم منسجم .... $\mathbf{p} = (p_۱, p_۲, \cdots, p_n)$

مستقل و هم‌توزیع .... $i.i.d.$

نرخ مخاطره صعودی .... IFR

نرخ مخاطره نزولی .... DFR

فصل ۱
کلیات و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل مروری بر مفاهیم پایه و اولیه در ارتباط با قابلیت اعتماد و ترتیب‌های تصادفی انجام شده است. از جمله این مفاهیم می‌توان به تابع قابلیت اعتماد، تابع نرخ مخاطره، تابع میانگین طول عمر باقیمانده، ترتیب از نظر احتمالی، ترتیب از نظر نرخ مخاطره و ترتیب از نظر میانگین باقیمانده و توزیع آماره‌های ترتیبی و همچنین سیستم‌های منسجم، توابع توزیع ابرمینیمال و ابرماکسیمال، علامت ماکسیمال و مینیمال اشاره کرد، که در فصول بعدی مفید می‌باشند.

۲.۱ تابع قابلیت اعتماد و تابع نرخ مخاطره

اکنون در این قسمت به بیان تابع قابلیت اعتماد سیستم و تابع نرخ مخاطره می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱. تابع قابلیت اعتماد [۱] مؤلفه یا سیستم

فرض کنید متغیر تصادفی T طول عمر یک مؤلفه یا یک سیستم باشد. در این صورت $R(t)$ (تابع قابلیت اعتماد مؤلفه یا سیستم) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(t) = P(T > t), \tag{۱.۱}$$

$R(t)$ در حقیقت احتمال آن است که طول عمر مؤلفه یا سیستم از t بیشتر باشد. به $R(t)$ تابع بقا مؤلفه یا سیستم نیز گفته می‌شود. اگر T مطلقاً پیوسته و دارای چگالی احتمال $f(t)$ باشد داریم:

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(s)ds = ۱ - \int_{۰}^{t} f(s)ds = ۱ - F(t). \tag{۲.۱}$$

تعریف ۲.۲.۱. تابع توزیع مطلقاً پیوسته [۲]

تابع F (در فاصله $(-\infty, \infty)$) با در نظر گرفتن اندازه لبگ) مطلقاً پیوسته است اگر و فقط اگر

[۱] Reliability Function
[۲] Absolutely Continuous Distribution Function

تابع fای در L^{1} (مجموعه توابع انتگرال‌پذیر) وجود داشته به طوری که برای هر $x < x'$ داشته باشیم:

$$F(x') - F(x) = \int_{x}^{x'} f(t)dt \qquad (۳.۱)$$

از یک گزاره خوش‌تعریف در حساب انتگرال نتیجه می‌شود که چنین تابعFای مشتقی برابر با f دارد $(a.e)$. خصوصاً اگر F یک تابع توزیع باشد، آنگاه :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1. \qquad , \qquad a.e \qquad f \geqslant 0. \qquad (۴.۱)$$

بالعکس؛ اگر f ای در L^{1} در شرایط (۱ ۴۰) صدق می‌کند، تابع F را به صورت زیر داریم:

$$\forall x : F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

که به آسانی نتیجه می‌شود که تابع توزیعی مطلقاً پیوسته است.

تعریف ۳.۲.۱. تابع نرخ مخاطره [۳]

اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی با یک تابع توزیع مطلقاً پیوسته F باشد، تابع نرخ مخاطره X در زمان $t \geq 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r(t) = (\frac{d}{dt})(-log(1 - F(t))). \qquad (۵.۱)$$

نرخ مخاطره X می‌تواند به طور معادل به صورت زیر نیز باشد:

$$r(t) = lim_{\triangle t \to 0} \frac{P(t < X \leq t + \triangle t | X > t)}{\triangle t} = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} \qquad , \qquad t \geq 0, \qquad (۶.۱)$$

به طوری که $R(t) = \overline{F}(t) = 1 - F(t) > 0$ تابع بقا و $f(t) = \frac{d}{dt}F(t)$ تابع چگالی متناظر آن می‌باشد. به عبارت دیگر احتمال وقوع خرابی در فاصله $(t, t+x)$ به شرط اینکه تا زمان t هنوز خرابی اتفاق نیفتاده باشد را در نظر بگیرید، این تابع را نرخ مخاطره، تابع مخاطره و یا نرخ خرابی آنی یا اغلب به صورت ساده‌تر، نرخ خرابی می‌خوانند و طبق رابطه $r(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$ بدست می‌آید. تابع مشابهی در حالت گسسته به صورت $r(i) = \frac{P(X = i)}{P(X > i)}$ به طوری که $P(X > i) > 0$ می‌توان در نظر گرفت.

[۳] Hazard Rate Function

برای توصیف قانون آماری خرابی یک قطعه، چهار تابع مختلف اما هم ارز و مربوط به هم وجود دارند. اگر یکی از توابع $f(t)$، $R(t)$، $F(t)$ یا $r(t)$ معلوم باشد از روابط زیر می‌توان به راحتی سه تابع دیگر را به دست آورد.

$$R(t) = ۱ - F(t) \qquad , \qquad F(t) = \int_{۰}^{t} f(x)dx \qquad , \qquad r(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

اما اگر فقط $r(t)$ معلوم باشد، محاسبه موارد دیگر کار بیشتری را می‌طلبد.

تعریف ۴.۲.۱. نرخ مخاطره صعودی (IFR) [۴]

یک متغیر تصادفی نامنفی X با تابع توزیع F و تابع بقا $\overline{F}$، دارای خاصیت نرخ مخاطره صعودی (IFR) است اگر $-log\overline{F}$ روی $\{t : \overline{F}(t) > ۰\}$ محدب باشد، یعنی $\overline{F}$ مقعر لگاریتمی [۵] باشد. اگر تابع $r(t)$ تابع نرخ مخاطره X باشد آنگاه X، IFR است اگر و فقط اگر $r(t)$ نسبت به t صعودی باشد.

تعریف ۵.۲.۱. نرخ مخاطره نزولی(DFR) [۶]

یک متغیر تصادفی نامنفی X و تابع بقا $\overline{F}$، دارای خاصیت نرخ مخاطره نزولی (DFR) است اگر $-log\overline{F}$ روی $\{t : \overline{F}(t) > ۰\}$ مقعر باشد، یعنی $\overline{F}$ محدب لگاریتمی باشد. اگر تابع $r(t)$ تابع نرخ مخاطره X باشد آنگاه X، DFR است اگر و فقط اگر $r(t)$ نسبت به t نزولی باشد.

تعریف ۶.۲.۱. تابع میانگین باقیمانده طول عمر [۷]

---

[۴] Increasing Failure Rate

[۵] Log Concave

[۶] Decreasing Failure Rate

[۷] Mean Residual Lifetime Function

تابع میانگین طول عمر باقیمانده یک مؤلفه با طول عمر T به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} m(t) = E(T-t|T>t) &= \int_{0}^{\infty} P(T-t \geq x|T>t)dx \\ &= \frac{\int_{0}^{\infty} P(T \geq t+x)dx}{P(T>t)} \\ &= \frac{\int_{0}^{\infty} \overline{F}(t+x)dx}{\overline{F}(t)} \\ &= \frac{\int_{t}^{\infty} \overline{F}(x)dx}{\overline{F}(t)}, \end{aligned}$$

در صورتی که $\overline{F}(t) > 0$ باشد که در آن f و $\overline{F} = 1 - F$ به ترتیب تابع چگالی و تابع قابلیت اعتماد طول عمر مؤلفه را نشان می‌دهند.

۳.۱ چند ترتیب تصادفی

در این بخش ۳ نوع از مهم‌ترین ترتیب‌های تصادفی بین متغیرهای تصادفی که عبارتند از ترتیب احتمالی معمول، [۸] ترتیب نرخ مخاطره [۹] و ترتیب میانگین طول عمر باقیمانده [۱۰] تعریف می‌کنیم.

۱.۳.۱ ترتیب احتمالی معمول

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی‌اند به طوری که برای تمام مقادیر $u \in (-\infty, \infty)$ داشته باشیم:

$$P(X > u) \leq P(Y > u) \tag{۷.۱}$$

آنگاه گفته می شود که X از نظر احتمالی کوچکتر از Y است و با نماد $X \leq_{st} Y$ نشان داده می‌شود. در واقع می‌توان گفت که تعریف بیان می‌کند X از Y مقادیر بزرگ را با احتمال کوچکتر اختیار می‌کند. به طوری که مقادیر «بزرگ » به مفهوم هر مقدار بزرگتر از u می‌باشد و این برای تمام u ها برقرار است.

[۸] Usual Stochastic Order
[۹] Hazard Rate Order
[۱۰] Mean Residual Lifetime Order

توجه کنید که تعریف فوق معادل است با اینکه برای تمام مقادیر $u \in (-\infty, \infty)$ داشته باشیم:

$$P(X \leq u) \geq P(Y \leq u) \qquad (۸.۱)$$

۲.۳.۱ ترتیب نرخ مخاطره

در بخش قبل تابع نرخ مخاطره X را تعریف کردیم. اکنون ترتیب تصادفی نرخ مخاطره را تعریف می کنیم.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع توزیع مطلقاً پیوسته و به ترتیب توابع نرخ خطر r و q باشند، اگر:

$$r(t) \geq q(t) \qquad , \qquad t \geq ۰, \qquad (۹.۱)$$

آنگاه گفته می‌شود X از Y از نظر ترتیب نرخ مخاطره کوچکتر است و با نماد $X \leq_{hr} Y$ نمایش داده می‌شود.

ساده است نشان دهیم تعریف فوق برقرار است اگر و تنها اگر:

$$\frac{\overline{G}(t)}{\overline{F}(t)} \qquad (۱۰.۱)$$

نسبت به $t \in (-\infty, max(u_x, u_y))$ صعودی باشد. که در آن u_y, u_x به ترتیب نشان دهنده کران بالای تکیه گاه X و Y می‌باشند.

زیرا:

$$\begin{aligned}
d/dt(\frac{\overline{G}(t)}{\overline{F}(t)}) &= \frac{-g(t)(\overline{F}(t)) + f(t)\overline{G}(t)}{\overline{F}(t)^۲} > ۰ \\
&\iff -g(t)\overline{F}(t) + f(t)\overline{G}(t) \geq ۰ \\
&\iff f(t)\overline{G}(t) \geq g(t)(\overline{F}(t)) \\
&\iff \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} \geq \frac{g(t)}{\overline{G}(t)} \\
&\iff r(t) \geq q(t)
\end{aligned}$$

به طور معادل می توان برای تمام $u \le v$ نوشت.

$$\overline{F}(u)\overline{G}(v) \ge \overline{F}(v)\overline{G}(u) \qquad (۱۱.۱)$$

در اینجا F بیانگر تابع توزیع X و G بیانگر تابع توزیع Y می‌باشد. (به مرجع [۲۳] مراجعه کنید).

و همچنین می‌توان رابطه (۱ ۰ ۱۱) را برای تمام $s \ge ۰$ و تمام t به صورت زیر نوشت.

$$\frac{\overline{F}(t+s)}{\overline{F}(t)} \le \frac{\overline{G}(t+s)}{\overline{G}(t)}$$

نامساوی بالا را برای تمام $s \ge ۰$ و تمام t می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$P\{X-t>s|X>t\} \le P\{Y-t>s|Y>t\}. \qquad (۱۲.۱)$$

یعنی اگر و تنها اگر باقیمانده طول عمر X و Y در زمان t برای تمام مقادیر t از نظر احتمالی $(\le_{st})$ مرتب باشند. به طور معادل رابطه (۱ ۰ ۱۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$[X|X>t] \le_{st} [Y|Y>t],$$

برای تمام مقادیر t.

تعریف ۳.۳.۱. $(X_۱, \cdots, X_n) \le_{st} (Y_۱, \cdots, Y_n)$ به ازای هر تابع حقیقی و صعودی φ

$$E(\varphi(X_۱, \cdots, X_n)) \le E(\varphi(Y_۱, \cdots, Y_n)),$$

برای جاهایی که امید ریاضی وجود داشته باشد. (در حالتی که φ تابع برداری باشد، صعودی یا نزولی بودن به مفهوم مؤلفه‌ای است) برای توضیح بیشتر به مرجع [۲۳] مراجعه کنید.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید X یک بردار m - بعدی باشد آنگاه X را مرتبط نامند اگر رابطه

$$E\big(g_۱(X)g_۲(X)\big) \ge E(g_۱(X))E(g_۲(X))$$

برای تمام توابع حقیقی صعودی $g_۱$ و $g_۲$ که امید ریاضی آنها موجود باشد برقرار باشد.

تعریف ۵.۳.۱. طول عمرهای $X_۱, \cdots, X_n$ تعویض‌پذیرند اگر به ازای هر n داشته باشیم:

$$P\{X_۱ \le x_۱, \cdots, X_n \le x_n\} = P\{X_{\pi(۱)} \le x_۱, \cdots, X_{\pi(n)} \le x_n\}$$