دانشکده علوم

گروه ریاضی

مشخص سازی همریختی ها در جبرهای باناخ

برای دریافت کارشناسی ارشد ریاضی محض

نگارنده:

سکینه داودی

استاد راهنما:

دکتر ثریا طالبی

استاد مشاور:

دکتر صدیقه شادکام

بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

درود بی پایان وتحیات پیاپی به رسول وفرستاده گرامی حق، حضرت محمد(ص) و خاندانش که سراسر عمر خویش را جهت تعلیم، ارشاد و هدایت جوامع بشری صرف نمودند.

تقدیم به:

پدرم که بی نیازیم آموخت ومادرم که به من درس محبت داد،

و همواره تکیه گاهم بودند و پلکانم برای صعود

همسر مهربانم که در مراحل تحصیل همواره مشوق و پشتیبان برایم بوده

و با رهنمود های ارزنده خودراهگشای اینجانب بوده است

و بهار زندگیم زهرا جان

تقدیر و تشکر

شایسته است از زحمات استاد ارجمند سرکار خانم دکتر ثریا طالبی که در انجام این پایان نامه همواره از راهنمایی های ارزنده، صمیمانه و توام با صبر و شکیبایی ایشان بهره برده ام، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

از استاد بزرگوار سرکار خانم دکتر صدیقه شادکام که در این مدت از مشاوره و راهنمایی ایشان بهره مند بودم سپاسگزارم.

از استاد محترم جناب آقای دکتر هادی خدابخشیان که به عنوان استاد داور قبول زحمت فرموده اند کمال تشکر را دارم.

در نهایت دست همه کسانی را که در تمام مراحل تحصیل و تحقیق به نوعی سمت استادی بنده راداشته و در محضر آنان شاگردی نموده ام را صمیمانه می بوسم.

به امید اینکه در گستره علم و دانش و تحقیق بتوانم زحمات آنان را هر چند ناچیز جبران نمایم.

چکیده

در این پایان نامه نشان داده شده است که هر نگاشت خطی یکانی حافظ وارون پذیری از یک جبر فون نویمان به یک جبر باناخ نیم ساده یک همریختی جردن است.

برای یک نگاشت خطی یکانی φ از یک جبر باناخ مختلط نیم ساده به جبر باناخ مختلط نیم ساده دیگر نشان داده شده است که عبارات زیر هم ارزند :

i) φ همریختی است.

ii) φ به طور کامل حافظ وارون پذیری است.

iii) φ 2- حافظ وارون پذیری است.

برای یک نگاشت خطی یکانی و دو سویی $\varphi: B(X) \to B(Y)$ که X , Y فضاهای باناخ روی میدان مختلط می باشند نشان داده شده است که شرایط زیر معادلند :

1) φ حافظ وارون پذیر است .

2) φ یکریختی جردن است .

3) φ یکریختی یا پاد ریختی است .

4) Y با X یکریخت است و $\varphi(T) = A^{-1}TA$ است.

یا Y با X^* یکریخت است و $\varphi(T) = B^{-1}T^*B$ است.

فهرست

مقدمه

مسئله مشخص سازی همریختی ها در سال 1970 توسط کاپلانسکی(Kaplansky)با سوال زیر در مورد نگاشت های خطی آغاز شد،آیا هر نگاشت خطی وارون پذیر یکانی از یک جبر به جبر دیگر یک همریختی جردن است؟

در مورد ابعاد نامتناهی ا.گلیسون [16] ج . کاهانه (J.Kahane) و و.زلاسکو(W.Zelazko) [20] نشان دادند که هر نگاشت خطی یکانی حافظ وارون پذیر از یک جبر باناخ به یک جبر باناخ جابجایی نیم ساده همیشه ضربی است یعنی همریختی است.

در نتیجه این منتهی شد به اصل زیر که به اصل کاپلانسکی معروف می باشد.

- یک نگاشت خطی حافظ وارون پذیری، پوشا و یکانی از یک جبر باناخ نیم ساده به جبر باناخ نیم ساده دیگر همیشه همریختی جردن است.

چوی(Choi)، هادوین(Hadwin) و... نشان داد در [12] که هر نگاشت خطی خودالحاقی یکانی معکوس پذیر از یک C^*_ جبر به C^*_ جبر دیگر همریختی جردن است.

جعفریان(Jafarian) و سرور(Sourour) در [18] ثابت کردند که هر نگاشت خطی پوشا حافظ طیف از B(x) به B(y) یکریختی یا پاد یکریختی است. سرور در [27] ثابت کرد که هر نگاشت خطی یکانی دوسویی حافظ وارون پذیری از B(x) به B(y) یکریختی یا پاد یکریختی است.

در مقاله مورد مطالعه در این پایان نامه نشان داده شده است . هر نگاشت خطی یکانی وحافظ وارون پذیری از یک جبر فون نویمان به هر جبر باناخ نیم ساده الزاما همریختی جردن است .

یکی از نتایج مهم این است که هر نگاشت خطی ویکانی از یک جبر باناخ نیم ساده به روی یک جبر دیگر همریختی است اگر و تنها اگر نگاشت ،به طور کامل حافظ طیف باشد .

۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

1-1 جبرهای باناخ و C^*- جبرها

تعریف 1-1-1

A را یک جبر روی $\mathbb{C}$ گوییم ، هرگاه فضای برداری بوده همراه با یک عمل دوتایی ضرب

$$A^2 \to A \qquad (a,b) \to ab$$

بطوریکه به ازای هر $a,b,c \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم :

1. $a(bc) = (ab)c$
2. $a(b+c) = ab+ac$
3. $(a+b)c = ac + bc$
4. $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$

تعریف 1-1-2

تابع $\|\|: X \to R$ را روی فضای خطی (حقیقی یا مختلط) نرم گوییم هرگاه

1. به ازای هر $x \in X$ ، $\|x\| \geq 0$.
2. به ازای هر $x \in X$ و هر $\lambda \in \mathbb{C}$ ، $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
3. به ازای هر $x \in X$ ، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
4. به ازای هر $x \in X$ ، $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

تعریف 1-1-3

یک جبرنرمدار A جبری است با یک نرم $\|.\|$ بطوری که به ازای هر $a,b \in A$

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$$

اگر A شامل عضو واحد 1 باشد و $\|1\| = 1$ ، A را جبر نرمدار یکه می نامیم.

تعریف1-1-4

اگر جبر نرمدارA کامل باشد یعنی هر دنباله کوشی در A به نقطه ای از A همگرا باشد ، A را یک جبر باناخ گوییم .

تعریف1-1-5

فرض کنیم A یک جبر باناخ و a عضو A باشد . طیف[1] a ، که با $sp_A(a)$ یا $Sp(a)$ نمایش داده می شود ، مجموعه تمام اعداد مختلطی مانند λ است که $\lambda I - a$ در A وارون پذیر نباشد.

$$Sp(a) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \ \ | \ \ \lambda I - a \notin G(A)\}$$

بطوریکه $G(A)$ مجموعه عناصر وارون پذیر در A است .

تعریف 1-1- 6

فرض کنید A یک فضای نرمدار و دنباله $\{x_n\}$ در A باشد . می گوییم سری $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ همگرا به x در A است ، اگر دنباله $\{s_i\}$ که $s_i = \sum_{n=1}^{i} X_n$ ، همگرا به x باشد.

قضیه 1-1-1

هر سری همگرای مطلق در یک فضای باناخ همگراست.

اثبات :[2]

1.Spectrum

قضیه 1-1-2

اگر A جبر باناخ و x در A باشد با $\|x\| < 1$ ، آنگاه $1-x$ در $G(A)$ است و $(1-x)^{-1} = \sum_0^\infty x^n$

اثبات : [2]

قضیه 1-1-3

برای هر جبر باناخ A گروه وارون پذیری $G(A)$ یک مجموعه باز در A است .

اثبات :[2]

قضیه 1-1-4

فرض کنیم A یک جبر باناخ و x در A باشد . آنگاه $Sp(x)$ در $\mathbb{C}$ فشرده است و در قرص بسته $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|x\|\}$ قرار دارد .

اثبات :[2]

قضیه 1-1- 5

فرض کنید A یک جبر باناخ و x در Aباشد . آنگاه $\lambda \to (\lambda I - x)^{-1}$ روی $\mathbb{C}/Sp(x)$ تحلیلی است و $Sp(x)$ ناتهی است .

اثبات:[5]

قضیه 1-1-6

فرض کنید A جبر باناخ باشد بطوریکه هر عضو غیر صفر آن وارون پذیر باشد . آنگاه $A \cong \mathbb{C}$

اثبات: [2]

تعریف 1-1-7

فرض کنید A یک جبر باناخ و a در A باشد . عدد

$$\rho(a) = \sup \{|\lambda| \quad : \lambda \in sp(a)\}$$

را شعاع طیفی[2] a نامیم .

بنا به قضیه (1-1-4) ، $0 \le \rho(x) \le \|x\|$. این بهترین تخمین ممکن است زیرا هر دو نقطه اکسترمم می تواند رخ دهد .

اگر A یک جبر باناخ جابجایی باشد و a,b∈ A باشد آنگاه

$$\rho(ab) \le \rho(a)\rho(b)$$

$$\rho(a+b) \le \rho(a)+\rho(b)$$

نگاشت خطی φ حافظ طیف است اگر $Sp(\varphi(A)) = Sp(A)$ باشد.

نگاشت خطی φ متراکم کننده طیف است اگر $Sp(\varphi(A)) \subset Sp(A)$ باشد.

مثال 1-1-8 : اگر $A = C(k)$ (k فضای هاسدورف و فشرده است) باشد آنگاه :

$$sp(f) = \{f(x) : x \in K\}$$

$$\rho(f) = sup \{|f(x)| \quad : \quad x \in K\} = \|f\|$$

مثال 1-1-9 : فرض کنید $A = M_2(\mathbb{C})$ و

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

در این صورت $sp(x) = \{0\}$ و در نتیجه $\rho(x) = 0$.

گزاره 1-1-7 : فرض کنید A یک جبر باناخ یکه و a در A باشد . درا ین صورت :

1. برای هر چند جمله ای مختلط P ، $sp_A(P(a)) = P(sp_A(a))$
2. برای هر a عضو $G(A)$ ، $sp_A(a^{-1}) = [Sp_A(a)]^{-1}$

اثبات : [2]

[2] Spectral radius

قضیه 1-1-8

فرض کنید A یک جبر باناخ یکه و x در A باشد . در این صورت

$$\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n} = \rho_A(x)$$

اثبات : [2]

قضیه 1-1-9

هر جبر باناخ غیر یکدار را می توان به یک جبر باناخ یکدار تبدیل کرد .

اثبات :

فرض کنیم A جبر باناخ غیر یکدار باشد . مجموعه $A_I = A \oplus \mathbb{C}$ را به عنوان یک فضای برداری در نظر می گیریم و ضرب را روی A_I به صورت زیر تعریف می کنیم که آن را به یک جبر یکدار تبدیل می کند .

$$(x,\lambda)(y,\mu)= (xy +\mu x +\lambda y, \lambda\mu)$$

این ضرب هم شرکت پذیر است و هم توزیع پذیر و عضو $(0,1)$ عضو همانی برای این ضرب است .

با تعریف

$$\|(x,\lambda)\|= \|x\| + |\lambda|$$

A_I یک فضای باناخ مجهز به نرم است .

$$\|(x,\lambda)(y,\mu)\| = \|(xy+ \mu x+ \lambda y,\lambda\mu)\| = \|xy+\mu x+\lambda y\| + |\lambda\mu|$$
$$\le \|x\|\|y\| + |\mu|\|x\| + |\lambda|\|y\| + |\lambda||\mu| = (\|x\| + |\lambda|)(\|y\| + |\mu|)=\|(x,\lambda)\|\|(y,\mu)\|$$

لذا A_I یک جبر باناخ با عضو همانی است .

با نگاشت $A\to A_I$ که به صورت $x \longmapsto (x, 0)$ تعریف می شود ، می توان A را بعنوان یک ایده آل از A_I در نظر گرفت . ■

تعریف 1-1-10

زیر مجموعه خطی V از جبر A یک ایده آل چپ (راست) است اگر :

$$(va \in V)\ \ av \in V \quad \forall a \in A\ ,\ v \in V$$

V را یک ایده آل از A گوییم هرگاه هم ایده آل چپ و هم ایده آل راست از A باشد .

اگر $V \neq 0, A$ ، V یک ایده آل سره است .

ایده آل های ماکزیمال ، ایده آل های سره ای هستند که در هیچ ایده آل سره بزرگتر قرار ندارد .

تعریف 1-1-11

یک تابعی خطی φ بر جبر باناخ Aضربی است اگر φ غیر بدیهی باشد و

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \qquad \forall x, y \in A$$

به آسانی دیده می شود $\varphi(1) = 1$.

مجموعه تمام تابعی های خطی ضربی A را با M_A نمایش می دهیم .

گزاره 1-1-10

فرض کنید φ یک تابعی خطی ضربی بر جبر باناخ A باشد آنگاه $\|\varphi\| = 1$.

اثبات : [2]

قضیه 1-1-11

اگر $\boldsymbol{A}$ یک جبر باناخ جابجایی باشد آنگاه M_A با مجموعه ایده آل های ماکسیمال (سره) در A یک تناظر یک به یک دارد .

اثبات : [2]

گزاره 1-1-12

M_A یک فضای هاسدورف فشرده با w^* توپولوژی است که از فضای دوگان A به ارث می برد.

اثبات : [2]

تعریف 1-1-12

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد . تبدیل گلفاند[3] نگاشت $\Gamma: A \to C(M_A)$ است که به صورت زیر تعریف می شود .

$$\Gamma(x)(\varphi)=\varphi(x) \qquad (x \in A \ , \varphi \in M_A)$$

نتیجه 1-1-13

اگر x در جبر جابجایی A باشد آنگاه

$$sp_A(x) = sp_{C(M_A)}(\Gamma(X)) = Ran(\Gamma(x))(\text{برد } \Gamma(x))$$

$$\rho(x) = \|\Gamma(x)\|_\infty = \sup\{|\varphi(x)| \quad : \quad \varphi \in M_A\}$$

اثبات : [2]

تعریف 1-1-13

اشتراک همه ایده آل های ماکسیمال از جبرجابجایی A را رادیکال A نامیم که آن را با $Rad\ A$ نمایش می دهند . و در جبر غیر جابجایی اشتراک همه ایده آلهای چپ ماکسیمال و یا راست ماکسیمال $Rad\ A$. می باشد .

تعریف1-1-14

جبرA را نیم ساده[4] گوییم ، هرگاه رادیکالش برابر صفر باشد .

قضیه 1-1-14

در تبدیل گلفاند ، رادیکال A هسته تبدیل گلفاند است .(با این فرض که A جابجایی باشد)

اثبات :

$$\Gamma: A \to C(M_A) \qquad \Gamma(x)\varphi \mapsto \varphi(x)$$

[3] . Gelfand transform
[4] . Semisimple

$$ker\ \Gamma=\{x\in A\ :\ \Gamma_x\varphi = 0\}=\{x\in A\ : \varphi(x)=0 \quad \forall\varphi\in M_A\}= \bigcap_{\varphi\in M_A} ker\ \varphi$$

چون تناظر یک به یک بین ایده آل های ماکسیمال و هسته توابع خطی ضربی وجود دارد پس

$$ker\ \Gamma = \bigcap_{\text{ایده آل های ماکسیمال } I} I = rad\ A$$

■

نتیجه 1-1-15

از قضایای بالا نتیجه می شود اگر $a \in rad\ A$ آنگاه $\rho(a) = 0$. (A جابجایی)

فرض کنید عنصر b از A پوچ توان باشد . یعنی عدد طبیعی n وجود داشته باشد بطوریکه $b^n = 0$ آنگاه

$$\varphi(b)^n = \varphi(b^n) = 0 \qquad \rightarrow \ \varphi(b) = 0 \quad (\ \forall\ \ \varphi\in M_A)$$

پس $b \in rad\ A$.

در نتیجه مجموعه عناصر پوچ توان A زیر مجموعه ای از رادیکال A است .

تعریف 1-1-15

عنصر a از جبر A را شبه پوچ توان[5] گوییم ، اگر $sp(a)$ فقط از صفر تشکیل شده باشد .

مجموعه عناصر شبه پوچ توان A را با $Q(A)$ نشان می دهیم .

در حالت کلی همواره $rad\ A \subseteq Q(A)$ ولی عکس آن برقرار نیست .

تعریف 1-1-16 (c^* –جبر)

یک c^* –جبر ، جبر باناخ A به همراه نگاشت $x\to x^*$ بر A است که در شرایط زیر صدق می کند :

1. $(x^*)^* = x$ برای تمام $x \in A$
2. $(ax + by)^* = \bar{a}x^* + \bar{b}y^*$ برای تمام $a,b\in \mathbb{C}$ و $x,y \in A$
3. $(xy)^* = y^*x^*$ برای تمام $x,y \in A$
4. $\|x^*x\| = \|x\|^2$ برای تمام $x \in A$

---

[5] . Quasinilpotent

هر نگاشت $x \to x^*$ بر یک جبر که در شرایط 1) ،2) و3) صدق نماید یک برگشت بر جبر نامیده می شود . عضو x^* را الحاق x نامیم .

تعریف 1-1-17

فرض کنید A یک C^*_جبر باشد و x در A باشد .

1. x را خود الحاق[6] گوییم اگر $x=x^*$
2. x را یکانی گوییم $x^*x=xx^* = 1$ یا بطور معادل $x^* = x^{-1}$
3. x را نرمال گوییم $x^*x = xx^*$
4. x را تصویر گوییم $x^* = x = x^2$

قضیه 1-1- 16

اگر x یک عضو نرمال c^* –جبر A باشد ، آنگاه $\rho(x) = \|x\|$

اثبات : [2]

قضیه 1-1-17

اگر x یک خود الحاقی از c^* –جبر A باشد ، آنگاه $sp(x) \subseteq R$

اثبات : [2]

قضیه 1-1- 18

هر عضو مانند x در یک c^* – جبر A را می توان بطور یکتا به صورت $x=x_1 + ix_2$ نوشت که x_2, x_1 خود الحاقند .

اثبات :

هر عضو x در A را می توان به صورت زیر نوشت

6 . Self adjoint