بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

توزیع فاز–نوع در مدل‌بندی تصادفی و برآورد پارامترهای آن

سخنران: اسماعیل بشکار

زمان: سه‌شنبه ۹۲/۶/۲۶ ساعت ۴:۳۰

مکان: سالن خوارزمی دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱– دکتر صفیه محمودی

۲– دکتر علی رجالی

۳– دکتر افشین پرورده

۴– دکتر سعید پولادساز

چکیده

یک متغیر تصادفی که زمان جذب یک زنجیر مارکف با وضعیت‌های متناهی را نشان می‌دهد، دارای توزیع فاز–نوع (یا برای سادگی PH) است. اگر زنجیر مارکف زمان پیوسته باشد توزیع را پیوسته و اگر زنجیر مارکف زمان گسسته باشد توزیع را گسسته می‌نامند. در این پایان‌نامه بر توزیع فاز–نوع پیوسته (CPH) تمرکز شده است. تابع توزیع و چگالی این توزیع را می‌توان به صورت تابعی از بردار احتمالات شروع $\pi_{1\times m}$ و ماتریس نرخ بی نهایت کوچک $T_{m\times m}$ مربوط به فرآیند مارکف مورد نظر بیان کرد. دوتایی (π, T) به عنوان نمایش توزیع فاز–نوع شناخته می شود. به بعد T مرتبه نمایش گفته می شود. نمایش‌ها یکتا نیستند و حداقل یک نمایش از کمترین مرتبه وجود دارد. چنین نمایشی به عنوان نمایش مینیمال شناخته می‌شود و مرتبه توزیع فاز–نوع مرتبه نمایش مینیمال آن تعریف می‌شود. تابع توزیع فاز–نوع را می‌توان برحسب این نمایش بیان کرد.

این پایان‌نامه درباره استنباط آماری برای توزیع فاز–نوع است. هدف اصلی کار در این تحقیق برآورد کردن پارامترهای آن یعنی (π, T) است. برآوردگر ماکسیمم درستنمایی تحت شرایط نظم معین دارای خواص بهینه از قبیل : سازگاری و نرمال بودن، کارایی و نااریبی مجانبی است و به همین دلیل یک برآوردگر نقطه‌ای خوب محسوب می‌شود. این پایان‌نامه روی پیدا کردن برآوردگر ماکسیمم درستنمایی توزیع فاز–نوع پیوسته متمرکز شده است. الگوریتم EM و روش نیوتن–رافسون برای این منظور استفاده شده است. اطلاع فیشر در پیدا کردن واریانس یک برآوردگر و نیز توزیع حدی برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی کاربرد دارد. در پایان‌نامه ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده که در عمل برای برآورد ماتریس اطلاع فیشر به کار می‌رود، برای خانواده توزیع‌های فاز–نوع محاسبه شده است.

کاربردهای اخیر این توزیع در مدل‌بندی تصادفی در زمینه‌هایی مثل نظریه صف، قابلیت اطمینان، نظریه تجدید، مدل‌های بقا است. در این پایان‌نامه کاربردهای توزیع فاز–نوع با جزئیات بیشتر ذکر شده است. در پایان نتایج برآورد پارامتر با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده از توزیع فاز–نوع ارائه می‌کنیم و از آن برای مدل‌بندی داده‌های واقعی استفاده می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: توزیع فاز–نوع، اطلاع فیشر، الگوریتم EM، نیوتن–رافسون

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

توزیع فاز-نوع در مدل‌بندی تصادفی و برآورد پارامترهای آن

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار اقتصادی و اجتماعی

اسماعیل بشگار

استاد راهنما

دکتر صفیه محمودی

شهریور ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار اقتصادی و اجتماعی آقای اسماعیل بشکار
تحت عنوان

توزیع فاز-نوع در مدل‌بندی تصادفی و برآورد پارامترهای آن

در تاریخ ۲۶ /۶ /۹۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱- استاد راهنما	دکتر صفیه محمودی
۲- استاد مشاور	دکتر علی رجالی
۳- استاد داور۱	دکتر افشین پرورده
۴- استاد داور۲	دکتر سعید پولادساز

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکترحمیدرضا ظهوری زنگنه

اهدا بیه

اگر شایسته باشد تقدیم به:

خدایی که آفرید

جهان را، انسان را، عقل را، علم را، معرفت را، عشق را

و به کسانی که عشقشان را در وجودم دمید.

سپاس گزاری

سپاس خدای را که هر توفیقی در گرو عنایت اوست. اکنون که با یاری او توانسته‌ام تلاشی هر چند ناچیز را در راه کسب دانش به انجام رسانم، بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای بزرگوارم، سرکار خانم دکتر صفیه محمودی، که به پایان رساندن این تحقیق جز با راهنمایی‌های عالمانه و هدایت‌های بی‌دریغ ایشان میسر نبود، قدردانی نمایم و از جناب آقای دکتر علی رجالی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت مشاوره‌ی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند؛ تشکر می‌نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر افشین پرورده و جناب آقای دکتر سعید پولادساز که زحمت داوری این اثر را متقبل شدند سپاس‌گزارم.

در پایان، از خانواده‌ام، به‌ویژه پدر و مادرم که با حمایت‌های خویش، همواره مرا پشتیبانی کرده‌اند؛ همسر مهربانم که در تمام طول تحصیل همراه و همگام من بوده است؛ و از تمامی دوستان عزیزم و همه کسانی که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده اند، نهایت سپاس و قدرشناسی را دارم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

شهریور ۱۳۹۲

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

چکیده

یک متغیر تصادفی که زمان جذب یک زنجیر مارکف با وضعیت‌های متناهی را نشان می‌دهد، دارای توزیع فاز-نوع (یا برای سادگی PH) است. اگر زنجیر مارکف زمان پیوسته باشد توزیع را پیوسته و اگر زنجیر مارکف زمان گسسته باشد توزیع را گسسته می‌نامند. در این پایان‌نامه بر توزیع فاز-نوع پیوسته (CPH) تمرکز شده است. تابع توزیع و چگالی این توزیع را می‌توان به صورت تابعی از بردار احتمالات شروع $\pi_{1\times m}$ و ماتریس نرخ بی نهایت کوچک $T_{m\times m}$ مربوط به فرآیند مارکف مورد نظر بیان کرد. دوتایی (π, T) به عنوان نمایش توزیع فاز-نوع شناخته می شود. به بعد T مرتبه نمایش گفته می شود. نمایش‌ها یکتا نیستند و حداقل یک نمایش از کمترین مرتبه وجود دارد. چنین نمایشی به عنوان نمایش مینیمال شناخته می‌شود و مرتبه توزیع فاز-نوع مرتبه نمایش مینیمال آن تعریف می‌شود. تابع توزیع فاز-نوع را می‌توان برحسب این نمایش بیان کرد.

این پایان‌نامه درباره استنباط آماری برای توزیع فاز-نوع است. هدف اصلی کار در این تحقیق برآورد کردن پارامترهای آن یعنی (π, T) است. برآوردگر ماکسیمم درستنمایی تحت شرایط نظم معین دارای خواص بهینه از قبیل : سازگاری و نرمال بودن، کارایی و نااریبی مجانبی است و به همین دلیل یک برآوردگر نقطه‌ای خوب محسوب می‌شود. این پایان‌نامه روی پیدا کردن برآوردگر ماکسیمم درستنمایی توزیع فاز-نوع پیوسته متمرکز شده است. الگوریتم **EM** و روش نیوتن-رافسون برای این منظور استفاده شده است. اطلاع فیشر در پیدا کردن واریانس یک برآوردگر و نیز توزیع حدی برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی کاربرد دارد. در پایان‌نامه ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده که در عمل برای برآورد ماتریس اطلاع فیشر به کار می‌رود، برای خانواده توزیع‌های فاز-نوع محاسبه شده است.

کاربردهای اخیر این توزیع در مدل‌بندی تصادفی در زمینه‌هایی مثل نظریه صف، قابلیت اطمینان، نظریه تجدید، مدل‌های بقا است. در این پایان‌نامه کاربردهای توزیع فاز-نوع با جزئیات بیشتر ذکر شده است. در پایان نتایج برآورد پارامتر با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده از توزیع فاز-نوع ارائه می‌کنیم و از آن برای مدل‌بندی داده‌های واقعی استفاده می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: توزیع فاز- نوع، اطلاع فیشر، الگوریتم EM، نیوتن- رافسون

فصل ۱

مقدمه

اگر چه توزیع فاز-نوع (PH) اولین بار در مقاله ارلانگ [۱۷] در سال ۱۹۱۷ معرفی شد، اما این توزیع به طور کامل توسط نیوتس [۴۷] تعریف شد. توزیع زمان صرف شده در وضعیت‌های گذرای یک فرآیند مارکف با وضعیت‌های متناهی تا جذب به وضعیت جاذب (زمان جذب) فاز-نوع (PH) است. اگر فرآیند مارکف زمان پیوسته باشد این توزیع را پیوسته و اگر زنجیر مارکف زمان گسسته باشد آن را گسسته می‌نامند. در این پایان‌نامه بر توزیع فاز-نوع پیوسته (CPH) تمرکز شده است و برای سادگی از آن فقط به عنوان توزیع فاز-نوع نام برده می‌شود. کمیت‌های مورد علاقه از قبیل: تابع توزیع و چگالی، تبدیل لاپلاس-استیلجس و گشتاورهای این توزیع را می‌توان به صورت تابعی از بردار احتمال شروع $\pi_{1\times m}$ و ماتریس نرخ بی نهایت کوچک $T_{m\times m}$ مربوط به فرآیند مارکف مورد نظر بیان کرد. دوتایی (π, T) به عنوان نمایش توزیع فاز-نوع شناخته می شود و توزیع را با نماد $PH_m(\pi, T)$ نشان می‌دهند.

بیشترین کاربرد توزیع فاز-نوع در نظریه صف است [۳،۴،۳۶،۴۱] . همچنین آلن [۲] به بررسی قابلیت نظری توزیع‌های فاز-نوع برای مدل‌بندی شکل‌های مختلف نرخ مخاطره پرداخته است و حدس می‌زند که چنین مدل‌هایی باید کاربردهای بیشتری در تحلیل بقا داشته باشند. مثال‌های دیگری از استفاده از مدل‌های مارکف و توزیع‌های فاز-نوع برای تحلیل بقا را می‌توان در مرجع‌های [۳۵] و [۴۰] و [۲۸] یافت.

در مرجع [۱۹] از این توزیع برای مدل‌بندی زمان ماندن بیماران در بیمارستان استفاده شده است. فادی [۲۱] از توزیع PH، برای مدل کردن خروج سلول‌های قرمز خونی نشاندار تزریق شده به جگر یک موش صحرایی استفاده کرده است. فادی در مرجع [۲۲] نیز برای مدل‌بندی زمان ماندگاری یک داروی تزریق شده به یک عضو از توزیع PH استفاده کرده است و در مرجع [۲۳] توزیع کاکسی (حالت خاصی از فاز-نوع) با افزایش تدریجی مرتبه را به داده‌های طول درمان بیماران در معرض خطر خودکشی با استفاده از روش تخمین ماکسیمم درستنمایی (MLE) برازش داده است. در این مورد مشاهده شده است که توزیع کاکسی مرتبه سه برای مدل کردن داده‌ها کافی است. مک‌کلین و میلارد [۴۲]، در حالی که به طور خاص به توزیع PH اشاره نکرده‌اند، یک توزیع فوق نمایی مرتبه دو به طول اقامت بیماران در بخش طب سالمندان برازش داده‌اند. در فادی و مک‌کلین [۲۴] توزیع کاکسی از مرتبه‌ی افزایشی به داده‌های مربوط به بیماران مرد، استفاده شده به وسیله‌ی مک‌کلین و میلارد [۴۲]، با استفاده از MLE برازش داده

شده است. دو متغیر کمکی سن بیمار در زمان پذیرش و سال ورود، به همان شیوه که در فادی [۲۳] است، در مدل گنجانیده شده است. فادی و مک‌کلین [۲۴] مجموعه‌ی داده‌های ذکر شده را به وسیله‌ی توزیع کاکسی مرتبه‌ی چهار بدون در نظر گرفتن دو متغیر کمکی برازش داده‌اند، اما اشاره کرده‌اند که با در نظرگرفتن آن‌ها لگاریتم تابع درستنمایی کمی افزایش می‌یابد.

جرنسکو و همکاران [۲۷] حرکت بیماران در یک بخش بیمارستان را با استفاده از یک صف یکنواخت (حالت مانا) $M/PH/c/c$ ، مدل کردند. یعنی زمان بین رخدادها در مدل آن‌ها دارای توزیع نمایی، زمان سرویس (زمان صرف شده برای اشغال یک تخت) دارای توزیع PHاست، c تخت در بخش وجود دارد و ظرفیت سیستم (صف + تخت‌ها) c است. مارشال و مک‌کلین [۴۴] یک توزیع کاکسی شرطی را به داده‌های طول اقامت برای بیماران سالمند برازش داده‌اند. اصطلاح شرطی به این دلیل استفاده شده است که داده‌ها ابتدا طبقه‌بندی و سپس با استفاده از MLE برازش داده شده‌اند. زی و همکاران [۵۵] طول اقامت بیماران سالمند در مراقبت‌های آسایشگاه سالمندان و مراقبت‌های خانگی را با یک نمایش PH پیچیده‌تر از قبل مدل بندی کرده‌اند. زمان صرف شده در مراقبت‌های آسایشگاه سالمندان و مراقبت‌های خانگی هر دو با توزیع کاکسی مدل بندی شده‌اند.

مدل‌بندی خطر مرگ و میر در ارزیابی بیمه عمر و مقرری سالیانه و همچنین در مدیریت سیستم‌های تأمین اجتماعی و برنامه حقوق بازنشستگان مهم است. برای قرن‌ها کارشناسان بیمه از جدول‌های عمر به عنوان ابزار اصلی برای توصیف الگوی سن مرگ و میر استفاده می‌کردند. با این‌حال یک جدول عمر تنها زمانی به‌عنوان یک راه‌حل به‌کار می‌رود که قانون ریاضی مناسبی برای مرگ و میر در دسترس نباشد. اولین جدول عمر توسط منجم معروف انگلیسی ادموند هالی (۱۶۹۳) [۲۹] گردآوری شد. ۳۲ سال بعد از آن، یعنی در اوایل سال ۱۷۲۵، آبراهام [۱۶] اولین مدل مرگ و میر را پیشنهاد داده است. از آن به بعد قواعد و نظریه‌های مختلفی برای توصیف نمونه‌های مشاهده شده از سن مرگ و میر بشر گسترش داده شد. تقریباً موفق‌ترین و با نفوذترین قانون مرگ و میر قانون گومپرتز پیشنهاد شده برای شدت مرگ ومیر در سال ۱۸۲۵ است. در این مدل فرض بر آن است که شدت مرگ و میر $\mu(x)$ فرمی به صورت $\mu(x) = Ae^{\theta x}$ دارد، وقتی که A و θ ثابت‌های مثبتی هستند. لین و لیو در مرجع [۳۹] یک فرآیند مارکف وضعیت متناهی با یک وضعیت جاذب برای مدل‌بندی مرگ و میر پیشنهاد کرده‌اند که تحت این مدل زمان مرگ از توزیع فاز–نوع پیروی می‌کند. در این پایان‌نامه کاربردهای توزیع فاز–نوع با جزئیات بیشتر ذکر شده‌اند. به ویژه کاربرد آن در مدل‌بندی زمان مرگ با توجه به مقاله لین و همکاران [۳۹]، و نیز مدل‌بندی سیستم‌های بهداشت و درمان با توجه به مرجع [۱۸]، به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

با توجه به رشد قابل توجه نظری و کاربردی این توزیع، توجه به بحث استنباط آماری برای این خانواده از توزیع‌ها و بررسی روش‌های برآورد کردن پارامترهای آن یعنی (π, T) و در صورت امکان ارائه برآوردگرهای بهتر بسیار با اهمیت است و موضوع اصلی کار در این تحقیق خواهد بود.

در بین برآوردگرهای حاصل از روش‌های مختلف برآوردیابی، برآوردگر به دست آمده از روش ماکسیمم درستنمایی تحت شرایط نظم معین دارای خواص بهینه مجانبی از قبیل: سازگاری، نرمال بودن، کارایی و نااریبی مجانبی است و به همین دلیل یک برآوردگر نقطه‌ای مناسب است. نخستین بار توسط آسموسن و همکاران [۵]، برآورد درستنمایی

این توزیع با استفاده از الگوریتم EM پیشنهاد شد و السن [۵۰] الگوریتم EM را تعمیم داد، به طوری که برای داده‌های سانسور شده نیز قابل استفاده باشد. الگوریتم اصلی و تعمیم داده شده به عنوان یک بسته قابل دانلود نوشته شده با زبان برنامه‌نویسی C در دسترس است. بوبیو و کومانی [۹] یک الگوریتم برای محاسبه برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی با در نظر گرفتن خانواده توزیع‌های کاکسی ارائه کردند. فادی [۲۳،۲۶] و [۲۵]، فادی و مک‌کلین [۲۴] و هامپل [۳۰] از برآورد درستنمایی ماکسیمم برای برازش توزیع کاکسی به داده‌های واقعی استفاده کرده‌اند. آن‌ها الگوریتم نلدر-مید [۴۶] را برای برآورد پارامترهای مورد نظر به کار برده‌اند. روش تطابق گشتاور نیز برای برازش توزیع PH به داده‌ها استفاده شده است. جانسون [۳۳] یک الگوریتم که سه گشتاور اول توزیع ارلانگ آمیخته را به گشتاورهای مربوط به داده‌های تجربی تطبیق می‌دهد، ارائه کرده است. به علاوه یک روش بر اساس روش زنجیر مارکف مونت کارلو ($MCMC$) به‌وسیله بلت و همکاران [۸] پیشنهاد شده است. بوبیو و تلک [۱۰] یک روش برآورد ماکسیمم درستنمایی برای نمایش استاندارد توزیع‌های فاز-نوع ناحلقوی معرفی کرده‌اند. بلت و همکاران [۷] برآورد درستنمایی ماکسیمم را با استفاده از الگوریتم EM اصلاح شده و روش بهینه سازی NR به دست آورده‌اند.

با توجه به کارهای انجام شده برای برآورد پارامترهای توزیع فاز-نوع، یکی از اهداف اصلی این پایان‌نامه برآورد کردن پارامترها در این خانواده، به روش ماکسیمم درستنمایی است که در مقاله بلت و همکاران به کار رفته است. علاوه بر آن برآوردگرهای به دست آمده در این مقاله با هم مقایسه می‌شوند.

با توجه به فرم تابع چگالی، ماکسیمم کردن تابع درستنمایی به راحتی امکان پذیر نیست. دشواری اصلی برآورد شامل موارد زیر است:

- مسئله‌ی برآورد غیر خطی است.
- تعداد پارامترهایی که باید برآورد شوند، اغلب زیاد است.
- نمایش‌های توزیع PH یکتا نیستند.
- ارتباط بین پارامترها و شکل توزیع PH در حالت کلی آشکار نیست.

بیشتر الگوریتم‌های به کار رفته، از توزیع‌های کاکسی (یا زیرکلاس خاصی از آن‌ها) به منظور رفع مشکل دوم و سوم استفاده کرده‌اند. نمایش کاکسی از مرتبه m تنها بر حسب $2m$ پارامتر بیان می‌شود در حالی که نمایش کلی فاز-نوع شامل $m^2 + m$ پارامتر است. همچنین یک نمایش متعارف یکتا برای توزیع‌های کاکسی می‌توان به دست آورد. در این پایان‌نامه از مثال‌هایی استفاده می‌شود که برای آن‌ها نمایش متعارف در دسترس است. از آن‌جایی که اطلاع فیشر در پیدا کردن توزیع‌های حدی برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی کاربرد دارد، ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده که در عمل برای برآورد ماتریس اطلاع فیشر به کار می‌رود، برای خانواده توزیع‌های فاز-نوع محاسبه شده است.

ساختار این پایان‌نامه به صورت زیر است:

- در فصل دوم ابتدا به معرفی فرآیندهای تصادفی و بعضی مباحث مربوط به آن‌ها پرداخته می‌شود. سپس خواص بهینه یک برآوردگر، ماتریس اطلاع فیشر و کاربردهای آن مطرح می‌شود. در ادامه روش برآورد درستنمایی

ماکسیمم، روش‌های عددی مفید برای پیدا کردن برآورد ماکسیمم درستنمایی توضیح داده شده‌اند. همچنین مفاهیم، تعاریف و روابطی که در فصل‌های آینده مورد نیاز است، در این فصل بیان می‌شوند.

- در فصل سوم توزیع PH به طور دقیق معرفی و ویژگی ها، نمایش، و مثال‌هایی از آن آورده می‌شود.

- فصل چهارم شامل برآورد ماکسیمم درستنمایی برای برآورد پارامترهای توزیع PH، به‌وسیله روش‌های مختلف از قبیل: الگوریتم بیشینه سازي امید رياضي (EM) و روش نیوتن-رافسون و مسائل مربوط به آن‌هاست.

- در فصل پنجم ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده برای توزیع فاز-نوع مطرح می‌شود.

- در فصل ششم به معرفی کاربردهای این توزیع در مدل‌بندی تصادفی پرداخته می‌شود.

- و در پایان، در فصل هفتم با ارائه مثال، الگوریتم‌های بیان شده مقایسه می‌شوند.

فصل ۲

مفاهیم اولیه

۱.۲ فرآیندهای تصادفی

یک فرآیند تصادفی $\{X(t); t \in T\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی است که روی یک فضای احتمال تعریف شده‌اند. t اندیس زمان است که روی مجموعه اندیس گذار T تعریف می‌شود. به ازای هر t در مجموعه اندیس گذار T، $X(t)$ یک متغیر تصادفی است. مجموعه‌ی تمام مقادیری که متغیر تصادفی $X(t)$ به ازای هر $t \in T$ می‌تواند اختیار کند، فضای وضعیت S نامیده می‌شود. به طوری که $X(t)$ وضعیت فرآیند را در لحظه t مشخص می‌کند. هرگاه مجموعه‌ی اندیس گذار T شمارا باشد، فرآیند را زمان گسسته و در صورتی که T پیوسته باشد، فرآیند را زمان پیوسته می‌نامند. [۵۲]

۲.۲ فرآیند مارکف زمان پیوسته

فرآیند تصادفی زمان پیوسته $\{X(t); t \in T\}$ با فضای وضعیت شمارای I را فرآیند مارکف زمان پیوسته می‌نامند، هرگاه برای هر مجموعه‌ی n نقطه‌ای از زمان $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ و برای همه اعداد $i_1, i_2, \cdots, i_n \in I$، رابطه زیر برقرار باشد:

$$P(X(t_n) = i_n \mid X(t_1) = i_1, \ldots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}) = P(X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1})$$

به این معنی که وضعیت آینده فرآیند، به شرط معلوم بودن وضعیت حال و گذشته، تنها به وضعیت حال بستگی داشته باشد و از گذشته مستقل باشد. فرآیند مارکف زمان همگن است اگر

$$P(X(t+u) = j \mid X(t) = i) = P_{ij}(u). \qquad (۱.۲)$$

$P_{ij}(u)$ عبارت است از احتمال انتقال زنجیر مارکف زمان پیوسته از i به j در بازه زمانی u. [۵۳]

۳.۲ زنجیر مارکف زمان گسسته

زنجیر مارکف زمان گسسته ساده‌ترین حالت خاص یک دنباله از متغیرهای تصادفی است، که در آن وابستگی رخدادهای متوالی تنها یک واحد زمان به عقب بر می‌گردد. به عبارت دیگر، رفتار احتمالی آینده فرآیند تنها به وضعیت کنونی فرآیند بستگی دارد و با دانستن حال، از گذشته تأثیر نمی‌پذیرد، یعنی گذشته به شرط حال هیچ تاثیری روی آینده ندارد و اطلاعات حال به تنهایی مشخص کننده وضعیت در آینده است، که به آن ویژگی مارکف می‌گویند. تعریف دقیق زنجیر مارکف زمان گسسته به صورت زیر است:

تعریف ۱.۳.۲

فرآیند تصادفی $\{X_n, n = ۰,۱, \ldots\}$ با فضای وضعیت متناهی یا شمارای نامتناهی یک زنجیر مارکف زمان گسسته نامیده می‌شود اگر، برای هر $n = ۰,۱, \ldots$،

$$P\left(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\right) = P\left(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\right) \qquad (۲.۲)$$

برای همه مقادیر ممکن $i_0, \ldots, i_{n+1} \in I$. ▲

با وجود ساختار بسیار ساده آن، مدل زنجیر مارکف در طیف گسترده‌ای از مسایل عملی بسیار مفید است. وقتی مقدار متغیر تصادفی X_n، j باشد به این معناست که زنجیر بعد از n تغییر وضعیت در وضعیت j قرار می‌گیرد. اگر احتمال‌های تغییر وضعیت یک مرحله‌ای فرآیند مستقل از مرحله‌ی آن (n) باشد، به این معنا که رابطه‌ی $p_{ij} = P(X_n = j | X_{n-1} = i) = P(X_1 = j | X_0 = i)$ برقرار باشد، آن‌گاه زنجیر را زمان همگن گویند. در این صورت ماتریس P که به صورت زیر نمایش داده می‌شود را ماتریس تغییر وضعیت یا ماتریس احتمال‌های انتقال زنجیر می‌نامند:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} & p_{i4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \qquad (۳.۲)$$

چون احتمال‌ها نامنفی هستند و فرآیند در هر صورت باید به حالتی تغییر وضعیت دهد، طبق قانون احتمال رابطه‌های زیر برقرار هستند:

$$p_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, j \geq 0, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1 \qquad i = 0, 1, \ldots \tag{۴.۲}$$

این نوع ماتریس را ماتریس تصادفی می‌نامند. اگر مجموع درایه‌های هر سطر ماتریس حداکثر یک شود آن را زیر تصادفی می نامند. احتمال‌های تغییر وضعیت m مرحله‌ای نیز به صورت زیر نشان داده می‌شوند:

$$P_{ij}^{m} = p(X_{n+m} = j | X_n = i) \quad (\text{مستقل از } n) \ [۵۳] \tag{۵.۲}$$

۴.۲ گروه‌بندی وضعیت‌های یک زنجیر

در این بخش به تحلیل وضعیت‌های زنجیر مارکف $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ با فضای وضعیت I و ماتریس انتقال یک مرحله‌ای $P = (p_{ij})_{i,j \in I}$ پرداخته شده است.

۱.۴.۲ وضعیت‌های جاذب

یک مدل زنجیر مارکف مفید، مدلی است که یک یا چند وضعیت جاذب دارد. یک وضعیت جاذب است، اگر فرآیند بعد از وارد شدن به آن نتواند آن را ترک کند. به عبارت دیگر:

تعریف ۱.۴.۲

وضعیت i را جاذب گویند اگر $p_{ii} = 1$. ▲

۲.۴.۲ وضعیت‌های بازگشتی و گذرا

بسیاری از کاربردهای زنجیر مارکف شامل زنجیرهایی است که در آن برخی از وضعیت‌ها جاذب و سایر وضعیت‌ها گذرا باشند. وضعیت جاذب حالت خاصی از وضعیت بازگشتی است. برای تعریف مفاهیم وضعیت‌های گذرا و بازگشتی، ابتدا به معرفی احتمالات زمان اولین ملاقات نیاز است. برای هر $n = 1, 2, \cdots$، احتمال اولین زمان ملاقات j، به شرط شروع از مکان i، یعنی $f_{ij}^{(n)}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_k \neq j \quad for \qquad 1 \leq k \leq n-1 | X_0 = i) \qquad i, j \in I \tag{۶.۲}$$

به‌عبارت دیگر، $f_{ij}^{(n)}$ احتمال این است که اولین انتقال فرآیند به وضعیت j در زمان $t = n$ باشد، وقتی که فرآیند از وضعیت i شروع شده باشد و f_{ij} برابر است با:

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \tag{۷.۲}$$

در این صورت $f_{ij} = P(X_n = j \ for \ some \ n \geq 1 | X_0 = i)$ نشان دهنده احتمال این است که فرآیند با شروع از وضعیت i، یک انتقال به وضعیت j داشته باشد.

تعریف ۲.۴.۲

وضعیت i گذرا است، هرگاه $f_{ii} < 1$ و بازگشتی است، هرگاه $f_{ii} = 1$. [۵۳] ▲

۵.۲ فرآیند پرش مارکف

در این پایان نامه روی یک مورد خاص از فرآیند مارکف تمرکز شده است، که فضای وضعیت متناهی دارد و پرش از یک وضعیت به وضعیت دیگر طبق قواعد زیر رخ می‌دهد:

قاعده ۱ : اگر فرآیند وارد وضعیت i شود، برای یک زمان با توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda_i}$، مستقل از این‌که چگونه به وضعیت i رسیده و چه زمانی طول کشیده تا به آن‌جا برسد، در آن می‌ماند.

قاعده ۲ : اگر فرآیند وضعیت i را ترک کند با احتمال p_{ij} به وضعیت j $(j \neq i)$ وارد می‌شود، مستقل از زمان ماندن در i و $\sum_j p_{ij} = 1$ برای هر $i \in I$. [۵۳]

اگر $\{X_t\}_{t \geq 0}$ یک فرآیند پرش مارکف با زمان‌های پرش $T_0, T_1, \cdots T_n, \cdots$ باشد در این صورت دنباله $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ تعریف شده به صورت $X_n = X_{T_n} (T_0 = 0)$ یک زنجیر مارکف زمان گسسته است که زنجیر نشانیده نامیده می‌شود. یک وضعیت مربوط به فرآیند پرش مارکف بازگشتی (گذرا) است اگر برای زنجیر نشانیده بازگشتی (گذرا) باشد. یک وضعیت i در فرآیند پرش مارکف را جاذب گویند اگر $\lambda_i = 0$. زیرا وقتی فرآیند وارد این وضعیت شود آن را ترک نخواهد کرد.

۱.۵.۲ نرخ‌های انتقال بی‌نهایت کوچک

به منظور معرفی نرخ‌های انتقال بی‌نهایت کوچک، رفتار فرآیند در فاصله زمانی خیلی کوچک به طول $\triangle t$ تحلیل می‌شود. اگر فرآیند مارکف X_t در لحظه t در وضعیت i باشد، احتمال این‌که فرآیند وضعیت i را در $\triangle t$ واحد زمانی بعدی، با $\triangle t$ خیلی کوچک، ترک کند برابر با $\lambda_i \triangle t + o(\triangle t)$ است. اگر فرآیند وضعیت i را ترک کند، با احتمال p_{ij} به وضعیت $j \neq i$ می‌رود. بنابراین برای هر $t > 0$ رابطه زیر

$$p(X(t+\triangle t) = j | X(t) = i) = \begin{cases} \lambda_i \triangle t . p_{ij} + o(\triangle t) & j \neq i \\ 1 - \lambda_i \triangle t + o(\triangle t) & j = i \end{cases} \tag{۸.۲}$$

وقتی که $\triangle t \to 0$ برقرار است. احتمال این که دو انتقال یا بیشتر در یک فاصله زمانی خیلی کوچک به طول $\triangle t$ رخ دهد از مرتبه $o(\triangle t)$(نماد ریاضی $o(\triangle t)$ یک نماد کلی برای هر تابع $f(\triangle t)$ با ویژگی $\lim_{\triangle t\to 0} \frac{f(\triangle t)}{\triangle t} = 0$ است) است، زمانی که $\triangle t$ به سمت صفر می‌رود. حال اعداد نامنفی q_{ij} تعریف شده به صورت:

$$q_{ij} = \lambda_i p_{ij} \qquad i, j \in I \qquad j \neq i \tag{۹.۲}$$

نرخ‌های انتقال بی‌نهایت کوچک فرآیند مارکف زمان پیوسته $\{X_t\}_{t\geq 0}$ نامیده می‌شوند و نرخ‌های زمان اقامت λ_i و احتمال‌های انتقال یک مرحله‌ای را به طور یکتا، به وسیله $\lambda_i = \sum_{j\neq i} q_{ij}$ و $p_{ij} = \frac{q_{ij}}{\lambda_i}$ به دست می‌دهند. در واقع q_{ij} خود احتمال نیستند، بلکه نرخ انتقال هستند. اگر چه برای $\triangle t$ خیلی کوچک، می‌توان $q_{ij}.\triangle t$ را به عنوان نرخ حرکت از وضعیت i به وضعیت j در $\triangle t$ واحد زمانی بعدی، وقتی که وضعیت کنونی i است تفسیر کرد. برای یک فرآیند مارکف زمان پیوسته $\{X_t\}_{t\geq 0}$ با فضای وضعیت I، ماتریس نرخ یا مولد بی‌نهایت کوچک فرآیند به صورت زیر تعریف شده است:

$$Q = [q_{ij}]_{i,j\in I} \tag{۱۰.۲}$$

که در آن $q_{ii} = -\sum_{i\neq j} q_{ij}$ است. [۵۳]

در ادامه یک قضیه مهم که در به دست آوردن احتمالات انتقال فرآیند مارکف زمان پیوسته کاربرد دارد، بیان شده است.

قضیه ۱.۵.۲

معادلات دیفراسیل پیش‌رو کلموگورف: اگر $\{X_t\}_{t\geq 0}$ یک فرآیند مارکف زمان پیوسته با نرخ‌های متناهی λ_i باشد آن‌گاه به ازای هر $i \in I$:

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} q_{kj} p_{ij}(t) - \lambda_i p_{ij}(t), \quad j \in I \tag{۱۱.۲}$$

یا به عبارت دیگر $P'(t) = P(t).Q$. *[۵۳]*

۲.۵.۲ روش یکنواخت سازی

اگر $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ یک فرآیند مارکف با ماتریس نرخ Q باشد، که درایه‌های قطر اصلی آن برابر با q_{ii} هستند، به طوری که رابطه $|q_{ii}| \leqslant c < \infty$ (برای هر i) برای یک ثابت c، زمانی که تعداد وضعیت‌ها متناهی باشد، حتما برقرار است. آن‌گاه ماتریس $P = \frac{1}{c}Q + I$ یک ماتریس تصادفی است. حال فرآیند تصادفی $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ به صورت زیر تعریف می‌شود: ابتدا زنجیر مارکف زمان گسسته $\{X_n, n \geq 0\}$ با ماتریس انتقال K در نظر گرفته می‌شود و سپس یک فرآیند پواسن با نرخ c، مستقل از زنجیر مارکف زمان گسسته، در نظر گرفته می‌شود و زمان‌های رخداد در این