بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ارومیه

مرتبه زیرگروه جابجاگر گروههای متناهی

رقیه زینالی پور

مرکز آموزشهای نیمه حضوری

گروه ریاضی

بهار ۱۳۸۸

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

استاد راهنما

دکتر هوشنگ بهروش

پایان نامه آقای/خانم رقیه زینالی پدر به تاریخ ۸۸/۳/۱۸

شماره مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸/- (هجده تمام)

قرار گرفت .

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران : دکتر هوشنگ بهروش

۲- استاد مشاور : دکتر X

۳- داور خارجی : دکتر محسن قاسمی

۴- داور داخلی : دکتر حبیب اذانچیلر

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر سعید استادباشی

تقدیم به :

پدر و مادر فداکارم

برادرهای مهربانم

همسر خوبم

مسافر کوچولوی نازنینم

و محنای عزیزم

تقدیر و تشکر

زگهواره تا گور دانش بجوی

حال که با عنایت و الطاف بیکران خداوند متعال موفق به اتمام کار پایان نامه کارشناسی ارشد شده ام بر خود فرض می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر هوشنگ بهروش تشکر و قدردانی نموده و همچنین از جناب آقای دکتر حبیب اذانچیلر و دکتر محسن قاسمی به خاطر قبول زحمت داوری این پایان نامه و از دکتر سعید استادباشی نماینده تحصیلات تکمیلی نیز سپاسگذاری نمایم .

در اینجا فرصت را مغتنم شمرده از زحمات و تشویق های پدر و مادر مهربانم تشکر نموده و از همکاری و همیاری همسر عزیزم جناب آقای مهندس باقری نهایت قدردانی را بعمل آورده و از برادرهایم امیر ، سعید و وحید نیز بخاطر تشویق هایشان سپاسگذاری نموده و از خانم سپیده مسعودی مشوق اصلی ام در جهت ادامه تحصیل نیز ممنونم .

و از تمامی اساتید ریاضی ، دوستان و همکلاسی هایم از جمله خانم نازیلا شفیقی و خانم نوشین هوشیار قهرمانلو و آقای محمدحسین شامی و آقای رضا دانایی سپاسگذارم .

فهرست مندرجات

چکیده

این پایان‌نامه کاری است بر روی مقاله‌ای با عنوان

The size of the commutator subgroup of finite groups

که اثری است از

Marcel Herzog, Gil Kaplan, Arieh Lev

که در سال ۲۰۰۸ به چاپ رسیده است.

در این پایان‌نامه، برای $|G'|$ در حالتی‌که G یک گروه غیرآبلی باشرط $\Phi(G)=1$ باشد($\Phi(G)$ زیرگروه فراتینی گروه G می‌باشد)، کرانی ارائه می‌دهیم. همچنین برای $|U(G)|$ ($U(G)$ مانده پوچ‌توان گروه G می‌باشد) در حالتی‌که G یک گروه غیرآبلی از مرتبه $p^\alpha q^\beta$ باشد (q,p اعداد اول‌اند و $\alpha,\beta \geq 1$) نیز کرانی ارائه داده و به اثبات دو قضیه زیر خواهیم پرداخت.

قضیه ۱ فرض کنید G یک گروه غیرآبلی و $\Phi(G)=1$. در اینصورت

$$|G'| > [G:Z(G)]^{1/2} \cdot$$

قضیه ۲ فرض کنید G یک گروه غیرآبلی از مرتبه $p^\alpha q^\beta$ باشد (q,p اعداد اول هستند)و $p<q$ و $\alpha,\beta \geq 1$ و $\Phi(G)=1$. در اینصورت

$$|U(G)| \geq 2^{1/2} \cdot [G:Z(G)]^{1/2} \ ,$$

مشروط بر آنکه $(p,q) \notin (2,\mathcal{M}) \cup (2,\mathcal{F})$. لازم به ذکر است که $\mathcal{F}$ نمایانگر مجموعه اعداد اول فرما و $\mathcal{M}$ نمایانگر مجموعه اعداد اول مرسن می‌باشد.

۱ مقدمه

فرض کنید G یک‌گروه باشد آنگاه $[G,G]$ با G' نشان داده شده و زیر گروه مشتق گروه G نامیده می‌شود. همچنین مانده پوچ‌توان گروه متناهی G با $U(G)$و زیرگروه فراتینی G با $\Phi(G)$ نشان داده می‌شوند. در [6] نشان داده شده است که برای هر گروه حل‌پذیر $G \neq 1$،که $\Phi(G) = Z(G) = 1$، $|G'| > |G|^{1/3}$ می‌باشد. همچنین در [6] برای گروه غیر آبلی A_4بررسی شده است که برای اثبات $|G'| > [G:Z(G)]^{1/2}$ نمی‌توان شرط $\Phi(G) = 1$ را حذف کرد. در [9] برای هرگروه حل‌پذیر $G \neq 1$ که $\Phi(G) = Z(G) = 1$بررسی شده است که $|U(G)| > |G|^{1/3}$.

در این پایان‌نامه سعی می‌کنیم با استفاده از قضیه۴.۱ و مراجع [15] و[16] به مطالعه زیرگروههای فیتینگ، فراتینی وگروه فراپوچ‌توان پرداخته و کرانی را برای $|G'|$، در حالتی‌که G یک گروه غیر آبلی با شرط $\Phi(G) = 1$ بوده پیدا کنیم. سپس با فرض اینکه G از مرتبه $p^\alpha q^\beta$ باشد (q,p اعداد اول بوده و $\alpha,\beta \geq 1$)، کرانی برای $|U(G)|$ که $U(G)$ زیرگروهی از G' است محاسبه کنیم.

این پایان‌نامه مشتمل بر ٤ فصل می‌باشد. فصل اول آن همین مقدمه است. در فصل دوم به بیان تعاریف و لم‌های مقدماتی می‌پردازیم که بیشتر هدف از ارائه این فصل یادآوری مطالبی است که در گذشته مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. بطور مثال به مفهوم عدد رده مزدوجی، خواص گروه‌های پوچ‌توان و حل‌پذیر اشاره شده است.

در فصل سوم رادیکال پوچ‌توان، مانده حل‌پذیرو پوچ‌توان، سری پوچ‌توان بالائی، بلندی فیتینگ، حاصل‌ضرب حلقوی و قضایای مربوط به آنها مطرح شده است.

درنهایت در بخش آخر به اثبات دوقضیه اصلی‌زیر خواهیم پرداخت.

قضیه ۱.۱ فرض کنید G یک گروه غیرآبلی و $\Phi(G)=1$ ۰ در اینصورت

$$|G'| > [G:Z(G)]^{1/2} \cdot$$

قضیه ۲.۱ فرض کنید G یک گروه غیرآبلی از مرتبه $p^{\alpha}q^{\beta}$ باشد (q,p اعداد اول هستند) و $p<q$ و $\alpha,\beta \geq 1$ ۰ همچنین $\Phi(G)=1$، در اینصورت

$$|U(G)| \geq 2^{1/2} \cdot [G:Z(G)]^{1/2},$$

مشروط بر آنکه $(p,q) \notin (2,\mathcal{M}) \cup (2,\mathcal{F})$ ۰ لازم به ذکر است که $\mathcal{F}$ نمایانگر مجموعه اعداد اول فرما و $\mathcal{M}$ نمایانگر مجموعه اعداد اول مرسن می‌باشد.

۲ تعاریف و لم های مقدماتی

۱.۲ مقدمه ای بر نظریه‌گروه های مقدماتی

دراین‌فصل‌مفاهیم‌مقدماتی‌نظریه‌گروههارا مرورخواهیم کرد، هدف ما علاوه بریادآوری، فراهم‌کردن اصطلاحات، علامتهاو مقدماتی است‌که‌درفصلهای‌آتی مورد نیاز خواهد بود. دراین پایان‌نامه‌تمام‌گروهها، متناهی فرض شده اند مگر اینکه‌خلاف‌آن‌تصریح شود.

تعریف ۱.۲ زیرگروه H از G سره (یا محض)[1] نامیده می‌شود هرگاه $H \neq G$. فرض‌کنید M زیرگروه سره از G باشد، بطوریکه به ازای هرزیرگروه H از G که دررابطه $M \subset H \subset G$ صدق می‌کند، داشته باشیم $H = G$ یا $H = M$، در اینصورت M را زیرگروه ماکسیمال G می نامند.

تعریف ۲.۲ زیرگروه $U \neq 1$ را زیرگروه مینیمال از G می‌نامند، هرگاه هیچ زیرگروه غیربدیهی از G وجودنداشته باشد که U شامل آن باشد.

تعریف ۳.۲ فرض کنیم $1 < K \trianglelefteq G$. در اینصورت K زیرگروه نرمال مینیمال G خوانده می‌شود، اگرهیچ زیرگروه نرمالی مانند L از G وجود نداشته باشد که $1 < L < K$.

قضیه ۴.۲ اشتراک هر تعداد از زیرگروه های نرمال G، در G نرمال است.

اثبات: به [[۱۶]، قضیه ۸.۳]، مراجعه کنید.

تعریف ۵.۲ فرض کنیم $L \triangleleft G$. در اینصورت L را زیرگروه نرمال ماکسیمال G می‌گوئیم اگر یک زیرگروه نرمال K از G وجود نداشته باشد، به قسمی که $L < K < G$.

تعریف ۶.۲ فرض کنید H و K دو مجموعه دلخواه باشند. مجموعه HK را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$HK = \{hk : h \in H, k \in K\}.$$

---

[1] Proper subgroup

لم ۷.۲ فرض کنید H و K زیرگروه های متناهی ازگروه G باشند. در اینصورت تساوی زیر برقرار است:

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$

اثبات: به [[۱۹]، قضیه ۱۳.۷.۳]، مراجعه کنید.

لم ۸.۲ فرض کنید $H, K \leq G$. در اینصورت $HK \leq G$ اگروتنها اگر $HK = KH$.

اثبات: به [[۷]، قضیه ۱۷.۵]، مراجعه کنید.

نتیجه ۹.۲ فرض کنید G یک‌گروه باشد. اگر $H \leq G$ و $K \trianglelefteq G$، آنگاه $HK \leq G$.

اثبات: به [[۱٦]، قضیه ۳۸.۳]، مراجعه کنید.

نتیجه ۱۰.۲ فرض کنید G یک گروه باشد. اگر $H \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$، آنگاه $HK \trianglelefteq G$.

اثبات: به [[۱٦]، قضیه ۳۹.۳]، مراجعه کنید.

لم ۱۱.۲ اگر H و K و L زیرگروههائی از G باشند بطوریکه $K \leq H$، آنگاه

$$H \cap (KL) = K(H \cap L).$$

اثبات: به [[۱٦]، قضیه ۳.۷]، مراجعه کنید.

قضیه ۱۲.۲ فرض کنید G یک گروه و $H \trianglelefteq G$ و $K \leq G$. در اینصورت

۱) $H \cap K \trianglelefteq K$.

۲) $HK/K \cong H/H \cap K$.

۳) $|HK : K| = |H : H \cap K|$.

اثبات: به [[۱٦]، قضیه ٤۰.۳]، مراجعه کنید.

تعریف ۱۳.۲ فرض کنید G گروه دلخواهی باشد. در اینصورت مجموعه تمامی یکریختی ها از G به G را با نماد $\mathrm{Aut}(G)$ نمایش میدهیم. مجموعه $\mathrm{Aut}(G)$ با عمل ترکیب توابع یک گروه تشکیل می دهد که آن را گروه خودریختی های G می‌نامیم.

تعریف ۱۴.۲ فرض کنید H یک زیرگروه G و $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$ باشد. در اینصورت تصویر H تحت نگاشت τ را با نماد H^{τ} نمایش داده و آن را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H^{\tau} = \{h^{\tau} : h \in H\}.$$

به ازای هر $h \in H$، h^{τ} را تصویر h تحت نگاشت τ می‌نامیم.

تعریف ۱۵.۲ فرض کنید G گروهی دلخواه و $g \in G$ باشد. در این صورت نگاشت $\tau_g : G \longrightarrow G$ که بصورت $X\tau_g = g^{-1}Xg$ تعریف می‌شود، خودریختی درونی القا شده بوسیله g می‌نامیم. مجموعه تمامی خودریختی های درونی القا شده بوسیله عناصر G، با عمل تعریف شده روی $\mathrm{Aut}(G)$ یک گروه تشکیل می دهد که آن را گروه خود ریختی های درونی G نامیده و با نماد $\mathrm{Inn}(G)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۶.۲ خودریختی از G که درونی نباشد، بیرونی نامیده می‌شود. مجموعه تمام خودریختی های بیرونی G تشکیل یک گروه می دهند که آن را گروه خودریختی های بیرونی G نامیده و با نماد $\mathrm{Out}(G)$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Out}(G) = \frac{\mathrm{Aut}(G)}{\mathrm{Inn}(G)}.$$

تعریف ۱۷.۲ فرض کنید H زیرگروه G و A زیر مجموعه غیر تهی از $\mathrm{Aut}(G)$ باشد و به ازای هر $h \in H$ و هر $\alpha \in A$ داشته باشیم $h^{\alpha} \in H$. در این صورت گوئیم H زیرگروه ناوردا یا پایدار [۲] از G است.

Invariant [2]

تعریف ۱۸.۲ زیرگروه U از Gزیرگروه مشخصه است، هرگاه‌به ازای هر $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ داشته باشیم:

$$U^{\alpha} = U \cdot$$

تذکر ۱۹.۲ بنا به تعریف ۱۷.۲، خواهیم داشت :

۱) اگر $\mathrm{A} = 1$، آنگاه تمام زیرگروه های Gبه صورت A – ناوردا است.

۲) اگر $\mathrm{A} = \mathrm{Aut}(G)$ و Hزیرگروه Gباشد، آنگاه Hمشخصه [3] است.

۳) اگر $\mathrm{A} = \mathrm{Inn}(G)$ و Hزیرگروه Gباشد، آنگاه Hنرمال است.

اثبات: به [[۱۶]، قضیه ۱.۳]، مراجعه کنید.

تعریف ۲۰.۲ گروه غیر بدیهی Gرا گروه ساده مشخصه[4] گویند، هرگاه زیرگروه های مشخصه G فقط ۱ و خود Gباشد.

تعریف ۲۱.۲ فرض‌کنید Gیک گروه دلخواه و Xیک مجموعه ناتهی باشد. گوئیم گروه G روی مجموعه ناتهی Xعمل [5] می‌کند هرگاه به ازای هر $x \in X$و هر $g \in G$، عنصر منحصر بفرد xg وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $x \in X$و هر $g_1, g_2 \in G$ شرایط زیر برقرار باشد.

۱) $(xg_1)g_2 = x(g_1g_2) \cdot$

۲) $x1 = x \cdot$ (۱ عنصر همانی Gاست)

در این صورت Xیک Gمجموعه نامیده می‌شود.

تعریف ۲۲.۲ فرض کنیم‌گروه Gروی یک مجموعه Xعمل کند. گوئیم که عمل باوفا[6] است، اگر نمایش جایگشتی متناظر G(از Gبه S_X) یک به یک باشد.

---

[3] Characteristic
[4] Characteristically simple
[5] Action

قضیه ۲۳.۲ فرض‌کنیم $\varphi : G \to H$ یک همریختی از یک گروه G به یک گروه H باشد، در اینصورت φ یک‌به‌یک است اگروفقط اگر $\mathrm{Ker}\varphi = \{e\}$ · (e عضو خنثای G است.)

اثبات: به [[۱۹]، قضیه ۱۲.۹.۳]، مراجعه کنید.

تعریف ۲۴.۲ فرض کنیم G یک گروه باشد، مجموعه اعضائی از G که با هرعضو از G تعویض پذیرند را مرکز G می‌نامیم و با $Z(G)$ نشان می‌دهیم.

$$Z(G) = \{x \in G : xg = gx \quad \forall g \in G\}\cdot$$

تعریف ۲۵.۲ فرض کنیم $x \in G$. در اینصورت

$$\{g \in G \mid gx = xg\}$$

را مرکز ساز x در G می‌نامیم و آنرا با $C_G(x)$ یا به اختصار با $C(x)$ نشان میدهیم.

تذکر ۲۶.۲ با توجه به تعریف مرکز گروه G، واضح است که

$$Z(G) = \bigcap_{x \in G} C_G(x)\cdot$$

تعریف ۲۷.۲ به ازای هر زیر مجموعه ناتهی U از G، مرکز ساز U در G را به صورت

$$C_G(U) = \{g \in G \;: ug = gu \quad \forall u \in U\} = \bigcap_{u \in U} C_G(u) \leq G$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۸.۲ فرض کنیدگروه G روی مجموعه X عمل‌کندو $x \in X$ دلخواه باشد. پایدارساز[7] x در G را بصورت‌زیرتعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G : xg = x\}\cdot$$

---

[6] Faithful
[7] Stabilizer of a point a group

تعریف ۲۹.۲ فرض کنید $B(G)$ مجموعه کلیه زیر مجموعه های ناتهی گروه G باشد. به ازای هر $g \in G$ و هر $U \in B(G)$ تعریف می‌کنیم:

$$U^g = g^{-1}Ug = \{g^{-1}ug : u \in U\}.$$

در اینصورت گروه Gروی $B(G)$ با عمل ضرب $Ug = U^g$، عمل می کند . عمل Gروی $B(G)$ را تزویج می‌نامیم. لذا بنا تعریف ۲۸.۲، به ازای هر $U \in B(G)$ پایدار ساز U در Gعبارت است از :

$$\mathrm{Stab}_G(U) = \{g \in G : g^{-1}Ug = U\}.$$

که آن رانرمالساز Uدر Gنامیده و با نماد $N_G(U)$ نشان میدهیم.

لـم ۳۰.۲ اگـر H زیرگـروه نرمـال (یـا مشخـصـه) در G باشـد، آنگـاه $N_G(H)$ و $C_G(H)$ زیرگـروه نرمـال (یامشخصه) در G خواهندبود.

اثبات: به [[۱۰]، قضیه ۱۰.۱]، مراجعه کنید.

توجه ۳۱.۲

۱) $C_G(U) = G$ اگروتنها اگر $U \subseteq Z(G)$.

۲) $C_G(U) \trianglelefteq N_G(U)$.

تعریف ۳۲.۲ فرض کنید xعضوی دلخواه در گروه Gباشد. در اینصورت مجموعه $\{g^{-1}xg : g \in G\}$ را کلاس تزویجی xدر G می‌نامند و آن را با علامت x^G نشان می‌دهند.

تعریف ۳۳.۲ فرض کنید $H \leq G$. در اینصورت $Core_G(H) = H_G$ را بصورت

$$H_G = \bigcap_{g \in G} (g^{-1}Hg)$$

تعریف می‌کنیم و آن را هسته H در G می‌نامیم.

نتیجه ۳٤.۲ به ازای هر $x \in G$

$$\left| G \text{ در } x \text{ رده تزویجی} \right| = \left| G : C_G(x) \right| \cdot$$

نتیجه ۳۵.۲ هرگاه Gیک گروه متناهی باشد با kرده تزویجی متمایز از اعضا واگر x_1، . . . ، x_k اعضائی از Gباشند، که هر یک عضو یکی از این k رده باشند، آنگاه :

$$|G| = \sum_{i=1}^{k} \left| G : C_G(x_i) \right| \cdot$$

عدد صحیح مثبت kرا عدد رده Gمی‌نامند، که ما آن را با $k(G)$ نمایش می‌دهیم.

نتیجه ۳۶.۲ هرگاه Gیک گروه نامتناهی باشد آنگاه $k(G) \le |G|$ و مساوی است اگروتنها اگر Gآبلی باشد.

قضیه ۳۷.۲

۱) (قضیه بنیادی همریختیها) فرض می‌کنیم $\varphi : G \to H$ یک همریختی باشد و نیز $K = Ker\varphi \trianglelefteq G$. همچنین ν را همریختی طبیعی از G بر G/K می‌گیریم. در این‌صورت‌یک همریختی یک‌به‌یک $\psi : G/K \to H$ وجود دارد به قسمی که $\varphi = \nu\psi$.

۲) (قضیه اول یکریختی) فرض کنید $\varphi : G \to H$ یک همریختی باشد و $K = Ker\varphi$در این صورت:

$$\frac{G}{Ker\varphi} \cong \operatorname{Im}\varphi \cdot$$

اثبات: به [[۱٦]، قضیه ۲٤.۳]، مراجعه کنید.

قضیه ۳۸.۲ (قضیه دوم یکریختی) فرض کنید $K \trianglelefteq G$و $H \le G$. در این صورت:

$$H \cap K \trianglelefteq H \text{ و } H/H \cap K \cong HK/K \cdot$$

اثبات: به [[۱٦]، قضیه ٤۰.۳]، مراجعه کنید.

قضیه ۳۹.۲ (قضیه سوم یکریختی) فرض کنید $K \trianglelefteq G$. در این صورت هر زیرگروه G/K به صورت H/K است که در آن $K \le H \le G$. همچنین $H/K \trianglelefteq G/K$ اگروتنها اگر $H \trianglelefteq G$ و در اینصورت

$$\frac{\frac{G}{K}}{\frac{H}{K}} \cong \frac{G}{K}\cdot$$

اثبات: به [[۱۶]، قضیه ۳۰.۲]، مراجعه کنید.

تعریف ۴۰.۲ فرض کنید Gو H گروه باشند و e_G و e_H به ترتیب عضوهای خنثی گروهها را نشان می دهد

مجموعه $G\times H$را چنین تعریف می کنیم:

$$G\times H=\{(g,h): g\in G, h\in H\}\cdot$$

حاصل ضرب (g_1,h_1)و (g_2,h_2) را بطوریکه $g_1, g_2\in G$ و $h_1, h_2\in H$ چنین تعریف می‌کنیم:

$$(g_1,h_1)\,(g_2,h_2)=(g_1g_2,h_1h_2)\cdot$$

$G\times H$ با عمل تعریف شده در بالا را حاصل ضرب مستقیم گروههای Gو Hنامند.

تعریف ۴۱.۲ فرض کنید Gو H گروه باشند. اگر $\varphi:G\to \mathrm{Aut}(H)$ همریختی باشد. گوئیم G توسط φروی H عمل می‌کند و G یک گروه عملگرروی H است. همریختی φ یک عمل روی Gنامیده می شود.

تعریف ۴۲.۲ فرض کنید φ یک عمل از گروه Gروی گروه Hو L بصورت مجموعه ضرب مستقیم Gو Hباشد یعنی، تمام زوجهای (g,h)از عناصر $g\in G$و $h\in H$ تشکیل شده باشد.

اگرضرب دو عنصراز L با فرمول

$$(g,h)(g',h')=(gg',\varphi(g')(h)h')=(gg',h^{g'}h')\cdot$$

تعریف شده باشد. آنگاه L یک گروه با توجه به این عملگر می‌سازد. این گروه ساخته شده را ضرب نیم مستقیم Gو Hبا توجه به عمل φ می‌نامیم.

تعریف ۴۳.۲ فرض کنید G، یک گروه و p عددی اول باشد.در اینصورت Gرا p-گروه نامیم هرگاه مرتبه هر عضو Gتوانی از pباشد.

قضیه ۴۴.۲ (قضیه سیلو) فرض کنیم Gگروهی متناهی باشد با $|G|=p^m r$، که در آن mعدد صحیح نامنفی است و rیک عدد صحیح مثبت، بطوری که p، r را نمی شمارد. در اینصورت:

(الف) G دارای زیرگروهی است از مرتبه p^m. یک چنین زیرگروهی را یک p-زیرگروه سیلواز گروه G می نامند.

ب) هر گاه H یک p-زیرگروه سیلو از گروه G باشد و J یک p-زیرگروه دلخواه از G، آنگاه به ازای یک $g\in G$، $J\leq H^g$. به ویژه، p-زیرگروههای سیلو از G،تزویجی واحد از زیرگروههای Gرا تشکیل میدهند.

(ج) فرض می‌کنیم n تعداد p-زیرگروههای سیلو از گروه Gباشد. در اینصورت $n=|G:N_G(H)|$،که در آن Hو p-زیرگروه سیلوی دلخواهی از G است و n، r را می شمارد و پیمانه p ۱$\equiv n$.

اثبات: به [[۱۶]، قضیه ۹.۵]، مراجعه کنید.

تعریف ۴۵.۲ اشتراک تمامی زیرگروه های ماکسیمال گروه Gرا زیرگروه فراتینی[8] G نامیده وآنرا با نماد $\Phi(G)$ نشان میدهند، اگر $G=1$، تعریف می‌کنیم $\Phi(G)=1$، هرگاه Gفاقدزیرگروه ماکسیمال باشد برطبق قرارداد می نویسیم $\Phi(G)=G$.

مثال ۴۶.۲ فرض‌کنید Gیک‌گروه باشد، زیرگروه‌های بدیهی G، $Z(G)$و زیرگروه فراتینی $\Phi(G)$در G مشخصه هستند.

اثبات: اثبات مشخصه بودن زیرگروه های بدیهی Gو $Z(G)$واضح است. نشان می دهیم $\Phi(G)$ زیرگروه مشخصه Gاست. فرض کنید $\eta\in \mathrm{Aut}(G)$ باشد. زیرگروه ماکسیمال Mاز Gرا در نظر

---

8 Frattini subgroup

می گیریم.نشان می‌دهیم M^{η} در G ماکسیمال است. فرض کنید زیرگروه L از G وجود داشته باشد بطوریکه $M^{\eta} \subseteq L \subset G$ (اگر $L = G$، آنگاه چیزی برای اثبات نداریم) لذا چون η یک دوسوئی است خواهیم داشت

$G \subset L^{\eta^{-1}} \subseteq M$. حال از ماکسیمال بودن M داریم $M = L^{\eta^{-1}}$.

در نتیجه $L = M^{\eta}$. بنا بر این M^{η} در G ماکسیمال است. در نتیجه:

$$\{M \text{ در } G \text{ ماکسیمال است} : M^{\eta}\} = \{M \text{ در } G \text{ ماکسیمال است} : M\}\cdot$$

لذا $\Phi(G)^{\eta} = \Phi(G)$ وحکم حاصل می‌شود.

تعریف: ۴۷.۲ گروه آبلی A را مقدماتی[9] گوئیم هرگاه عدد اولی مانند p موجود باشد، بطوریکه به ازای هر $a \in A$، داشته باشیم $a^{p} = ۱$.

قضیه ۴۸.۲ هرگروه آبلی متناهی G با نمای اول p، یک p-گروه آبلی مقدماتی است.

اثبات: به [[۱۷]، قضیه ۳.۶]، مراجعه کنید.

قضیه ۴۹.۲ فرض کنید P یک p-گروه باشد. در این صورت

۱) $P/\Phi(P)$ آبلی مقدماتی است.

۲) اگر $|P/\Phi(P)| = p^{n}$، آنگاه وجود دارد $x_1,\dots,x_n \in P$ بطوریکه $P = \langle x_1,\dots,x_n \rangle$.

اثبات: به [[۱۱]، قضیه ۷.۲.۵]، مراجعه کنید.

قضیه ۵۰.۲ فرض کنید A یک گروه آبلی متناهی و $A \neq ۱$ باشد، در اینصورت A بطور مشخصه‌ای ساده است اگروتنها اگر A مقدماتی باشد.

اثبات: به [[۱۶]، قضیه ۴۱.۷]، مراجعه کنید.

---

[9] Elementary

قرارداد ۵۱.۲ ϖ همواره معرف مجموعه ای از اعداد اول است.

تعریف ۵۲.۲

۱) عدد صحیح مثبت n را یک ϖ عدد می‌گوئیم اگر هر مقسوم علیه n بـه ϖ تعلـق داشـته باشـد و لازم نیست هر عدد اول در ϖ عملاً مقسوم علیه n باشد، بنابراین به عنوان مثال ٦ یک $\{2,3,5\}$ عدد است.

بنا بر قرارداد ۵۱.۲، ۱ به ازای هر مجموعه ϖ از اعداد اول یک ϖ عدد است.

اگر $\varpi = \{p\}$، تنها ϖ عددها توانهای p هستند: $1, p, p^2, p^3, \ldots$

۲) فرض کنیم G گروهی متناهی باشد. G را یک ϖ-گروه گوئیم، اگر $|G|$ یک ϖ عدد باشد. لـذا بـه عنـوان مثال S_3, S_4، $\{2,3\}$ گروه هستند، اما S_5 یک $\{2,3\}$ گروه نیست. ولـی S_3، S_4 و S_5 همگـی $\{2,3,5\}$ گـروه هستند. اگر $\varpi = \{p\}$، یک ϖ-گروه را ترجیحاً یک p-گروه می‌نامیم.

لم ۵۳.۲ هرگاه G یک ϖ-گروه متناهی باشد، آنگاه همه زیرگروهها و همـه گروههـای خـارج قـسمتی G، ϖ-گروه‌اند.

اثبات: مرتبه های همه زیرگروهها و همه گروههای خارج قسمتی G، $|G|$ را می‌شمارند.

قـضیه ۵٤.۲ فـرض‌کنـیم G گـروه متنـاهی باشـد. در اینـصورت G دارای کـوچکترین زیـرگـروه نرمـال یکتای K است، که G/K یک ϖ-گروه است. قـرار مـی‌دهـیم $K = O^{\varpi}(G)$ و $G/O^{\varpi}(G)$ را ϖ مانـده‌یـی G می نامیم. (در اینجا $O^{\varpi}(G)$ 'کوچکترین' است بدین معنی که هرگاه $H \trianglelefteq G$ و G/H یک ϖ-گـروه باشـد آنگاه $O^{\varpi}(G) \leq H$.)

اثبات: به [[١٦]، قضیه ٤٤.٣]، مراجعه کنید.