دانشکده ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد ریاضی محض

کران بالا برای اندیس مرکز در گروه های توانا

به راهنمایی استاد ارجمند

آقای دکتر سعید کیوان فر

استاد مشاور

آقای دکتر محسن پرویزی

نگارنده

عاطفه شریفی بایگی

بهمن ۱۳۹۰

چکیده

هدف از این رساله تعیین کران بالا برای اندیس مرکز در گروه های توانا برحسب مرتبه زیر گروه مشتق است.

فرض کنید G یک گروه توانا، $Z(G)$ مرکز آن و G' زیر گروه مشتق آن باشد.در این رساله نشان می دهیم که تابعی مانند $B(n)$ روی اعداد طبیعی وجود دارد به طوری که اگر G گروهی متناهی باشد، آن گاه $[G : Z(G)] \leq B(|G'|)$. هم چنین ثابت می شود که اگر G گروهی با زیر گروه مشتق متناهی باشد، آن گاه $B(|G'|) = |G'|^{2log_2|G'|}$ و با فرض این که G گروهی متناهی و رتبه زیرگروه مشتق r باشد، تساوی $B(|G'|) = |G'|^{4r}$ به دست می آید. به علاوه اگر G، p-گروهی متناهی باشد، آن گاه کران بالایی برای رتبه $\frac{G}{Z(G)}$ بر حسب رتبه G' مشخص می شود.

در نهایت p-گروه های متناهی و توانا از رده دو با زیر گروه مشتق دوری مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده می شود که اگر G چنین گروهی باشد، آن گاه $\frac{G}{Z(G)}$ توسط دو عنصر تولید می شود و $|\frac{G}{Z(G)}| = |G'|^2$.

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

بئر[۱] [۱] درسال ۱۹۳۸به بررسی شرایطی پرداخت که تحت آن شرایط یک گروه مانند G به عنوان گروه خودریختی های داخلی گروه دیگری چون H واقع شود، یابه طورمعادل چه موقع برای گروه G، گروه H موجود است که $G \cong \frac{H}{Z(H)}$. هال [۲] و سینیور[۳] [۹] چنین گروه هایی را توانا[۴] نامیدند.

در حالت کلی گروه های توانا از دو دیدگاه متفاوت مورد بررسی قرار گرفته اند. حالت اول بررسی ساختار این گروه هاست که در [۱]، [۳]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۸] و [۲۰] مورد مطالعه قرار گرفته شده است. در حالت دوم کران بالایی برای اندیس مرکز گروه توانا بر حسب تابعی از مرتبه زیر گروه مشتق تعیین می گردد. در این راستا کران های بالایی برای اندیس مرکز یک گروه توانا در شرایط خاص ارائه شده است. به عنوان مثال اگر G، p-گروهی متناهی و توانا باشد و $|G'| = p$، آن گاه $[G : Z(G)] = p^2$ که می توانید آن را در مرجع [۲] بیابید. هاینکن[۵] [۱۱] گروه های توانایی را بررسی کرد که زیر گروه مشتق آن مرکزی و آبلی مقدماتی از مرتبه p^n می باشد، او نشان داد اگر $n = 2$ آن گاه $[G : Z(G)] \leq p^5$. هم چنین در حالتی که n دلخواه و $p > 2$ مثال هایی ارائه کرد که $[G : Z(G)] = p^m$ به طوری که $m = 2n + \binom{n}{2}$. نیکلوا[۶] و هاینکن [۱۲] تحت

[1]Baer

[2]M.Hall

[3]Senior

[4]capable

[5]Heineken

[6]Nikolova

شرایط بسیار خاصی نشان دادند $[G:Z(G)] \leq p^m$ به طوری که $m = 2n + \binom{n}{2}$.
آیزاکس[1] [۱۳] کران بالایی برای اندیس مرکز گروه های متناهی و توانا برحسب تابعی از مرتبه زیر گروه مشتق مشخص نمود. هم چنین پادسکی[2] و سگدی[3] در [۲۱] و [۲۲] کران بالای صریحی برای اندیس مرکز گروه توانا برحسب مرتبه زیر گروه مشتق ارائه کرده اند.

در این رساله، هدف اصلی تعیین کران بالا برای اندیس مرکز گروه های توانا برحسب تابعی از مرتبه زیر گروه مشتق است.

این رساله بر اساس مقالات
آیزاکس [۱۳]، یاداو[4] [۲۶] و مقالات پادسکی و سگدی [۲۲] و [۲۳] در پنج فصل نگاشته شده است.

فصل اول مطابق معمول همه پایان نامه ها، شامل تعاریف و قضایای مورد نیاز برای دیگر فصل هاست.

در فصل دوم که براساس مقاله [۱۳]، تهیه و تدوین شده است، کران بالایی برای اندیس مرکز گروه های متناهی و توانا بر حسب تابعی از مرتبه زیر گروه مشتق ارائه می گردد. سپس کران بالای صریحی برای اندیس مرکز گروه های متناهی و توانا با زیر گروه مشتق دوری، مشخص می گردد.

در فصل سوم برحسب یک تابع لگاریتمی و مرتبه زیر گروه مشتق، کران بالایی برای اندیس مرکز گروه های توانا ارائه می شود.سپس کران بالایی برای اندیس مرکز گروه های متناهی و توانا بر حسب تابعی از مرتبه زیر گروه مشتق مشخص می شود. این فصل بررسی مقاله [۲۲] است.

در فصل چهارم ابتدا کران بالایی برای مرتبه زیر گروه مشتق در گروه های متناهی مشخص می شود. سپس برحسب مرتبه و رتبه زیر گروه مشتق، کران بالایی برای اندیس مرکز گروه های متناهی و توانا ارائه می گردد. این فصل در واقع بررسی مقاله [۲۳] است.

[1] Isaacs

[2] Podoski

[3] Szegedy

[4] Yadav

در فصل آخر که مطالب آن از [۲۶] آمده است، p-گروه های متناهی و توانا از رده دو با زیر گروه مشتق دوری، مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۱

پیش نیازها

در این فصل مفاهیم و نمادهایی را بیان می کنیم که در فصل های بعد به کار می روند. هم چنین به بیان و در صورت لزوم اثبات قضایایی می پردازیم که در کتب و مقالات به صورت پراکنده وجود دارند و به تناسب در این پایان نامه مورد استفاده قرار می گیرند.

۱.۱ جابجاگرهای ساده و خواص آن ها

در این بخش مفهوم جابجاگر ساده را تعریف کرده و سپس برخی خواص مهم آن را که در محاسبات جابجاگرها کاربرد دارد، بیان می کنیم. هم چنین به معرفی گروه های آزاد پرداخته و در نهایت برخی احکامی را که در فصل های بعد به آن ها نیاز داریم، بیان می کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید x و y عناصر دلخواه از گروه G باشند، **جابجاگر ساده** [۱] x و y را با نماد $[x,y]$ نشان داده، به‌صورت $x^{-۱}y^{-۱}xy$ تعریف می کنیم. هم چنین $x^y = y^{-۱}xy$ را **مزدوج** [۲] x توسط y گویند.

ملاحظه می شود

$$[x,y] = x^{-۱}x^y.$$

از این به بعد منظور از یک جابجاگر، جابجاگر ساده است.
در حالت کلی یك **جابجاگرمرتب شده از چپ** [۳]، از وزن n $(n \geq ۱)$ به طور استقرایی به صورت زیر تعریف می‌شود.
هر عنصر گروه G یك جابجاگر از وزن یك است، به ازای $x_۱, x_۲, \cdots, x_{n-۱}, x_n \in G$ $(n \geq ۲)$، فرض کنید تمام جابجاگرهای از وزن $n-۱$ تعریف شده باشند. در این‌صورت جابجاگر از وزن n به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Big[x_۱, x_۲, \cdots, x_{n-۱}, x_n\Big] = \Big[[x_۱, x_۲, \cdots, x_{n-۱}], x_n\Big].$$

اکنون خواص مقدماتی جابجاگرها را بیان می کنیم.

لم ۲.۱.۱. *فرض کنید G یك گروه و $x, y, z, t \in G$. در این‌صورت*

[1] simple commutator

[2] conjugate

[3] left normed commutator

(i) $[x,y]=[y,x]^{-1}$ ، $x^y=x[x,y]$؛

(ii) $[x^{-1},y]=[y,x]^{x^{-1}}$ ، $[x,y^{-1}]=[y,x]^{y^{-1}}$؛

(iii) $([x,y]^{-1})^z=([x,y]^z)^{-1}$ ، $([x,y]^z)^t=[x,y]^{zt}$؛

(iv) $[xy,z]=[x,z]^y[y,z]$ ، $[x,yz]=[x,z][x,y]^z$؛

(v) $xy=yx[x,y]$؛

(vi) $[x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x=1$؛

(vii) $[x,y,z^x][z,x,y^z][y,z,x^y]=1$.

*تساوی های (vi) و (vii) به **اتحادهای هال-ویت** [1] معروف هستند.*

برهان. به صفحه ۱۱۹ از مرجع [۲۴] مراجعه کنید. □

تعریف ۳.۱.۱. اگر X و Y دو زیرمجموعه غیرتهی از گروه G باشند، در این‌صورت **زیرگروه جابجاگر** [2] X و Y را بانماد $[X,Y]$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$[X,Y]=\langle\ [x,y]\mid x\in X, y\in Y\ \rangle.$$

در حالت کلی اگر X_1، X_2، ...، X_n زیر مجموعه‌هایی غیرتهی از گروه G باشند، آن گاه زیرگروه جابجاگر X_1، X_2، ...، X_n به‌طور استقرایی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$[X_1,X_2,\dots,X_n]=\Big[[X_1,X_2,\dots,X_{n-1}],X_n\Big],$$

که در آن $n\geq 2$ و $[X_1]=\langle X_1\rangle$.

[1] the Hall-Witt identity

[2] commutator subgroup

قضیه ۴.۱.۱. *فرض کنید L، H و K زیرگروه‌هایی از گروه دلخواه G باشند. در این‌صورت*

(i) $[H,K]=[K,H]$،

(ii) *اگر* $G \trianglelefteq H$، *آن‌گاه* $[H,K] \leqslant H$،

(iii) *اگر* $H,K \trianglelefteq G$، *آن‌گاه* $[H,K] \trianglelefteq G$،

(iv) *اگر* $H,K,L \trianglelefteq G$، *آن‌گاه* $[HK,L]=[H,L][K,L]$،

(v) *اگر* $K \trianglelefteq G$ *و* $K \leq H$، *آن‌گاه* $\frac{H}{K} \leq Z(\frac{G}{K})$ *اگر و تنها اگر* $[H,G] \leq K$،

(vi) *اگر* $H \triangleleft G$، *آن‌گاه* G/H *آبلی است اگر و تنها اگر* $[G,G] \leq H$.

(vii) *فرض کنید* $H \trianglelefteq G$ *و* $x,y \in G$، *در این صورت* $[xH,yH]=[x,y]H$ *و در نتیجه*

$$[KH/H, LH/H]=[K,L]H/H.$$

برهان. به سادگی از تعریف ۳.۱.۱ و لم ۲.۱.۱ نتیجه می شود. □

لم ۵.۱.۱. *(لم سه زیرگروه[1])*

فرض کنید H، K و L سه زیرگروه از گروه G و N زیرگروه نرمالی از آن باشد. اگر $[H,K,L]$ و $[K,L,H]$ در N قرار داشته باشند، آن‌گاه $[L,H,K]$ نیز در N واقع است.

برهان. به صفحه ۱۲۲ از [۲۴] مراجعه کنید. □

قضیه ۶.۱.۱. *(ددکیند[2])*

فرض کنید H، K و L زیرگروه هایی از یک گروه باشند که $K \subseteq L$. در این صورت

$$HK \cap L = (H \cap L)K.$$

[1] three subgroup lemma

[2] Dededkind

برهان. بدیهی است که $(H\cap L)K \subseteq HK$، همچنین $K\subseteq L$ و $H\cap L\subseteq L$ ایجاب می کند که $(H\cap L)K\subseteq L$. بنابراین

$$(H\cap L)K \subseteq (HK\cap L).$$

به عکس، فرض کنید $x\in HK\cap L$، پس $h\in H$ و $k\in K$ وجود دارد به طوری که $x=hk\in L$. از این جا داریم $h=xk^{-1}\in L$. بنابراین $x=hk\in (H\cap L)K$. یعنی

$$HK\cap L\subseteq (H\cap L)K,$$

و لذا حکم ثابت است. □

در ادامه مفهوم گروه آزاد را تعریف می‌کنیم. سپس به کمک این مفهوم روش توصیف گروه‌ها بر حسب مولدها و رابطه‌ها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید F یک **شیء** [1] دلخواه در **رسته ملموس** [2] $\mathcal{C}$، X مجموعه‌ای ناتهی و $i: X\to F$ یك نگاشت (از مجموعه‌ها) باشد. اگر به‌ازای هر شیء A از $\mathcal{C}$ و هر نگاشت (از مجموعه‌ها) $f: X\to A$، **ریخت** [3] منحصر به فردی از $\mathcal{C}$ مانند $\bar{f}: F\to A$ موجود باشد، به طوری که $\bar{f}i=f$، آن گاه F را **شیء آزاد** [4] روی مجموعه X در رسته ملموس $\mathcal{C}$ نامیده و گاهی آن را با نماد $F(X)$ نیز نشان می‌دهیم.

قضیه ۸.۱.۱. *هر گروه G با یك گروه خارج‌قسمتی از گروه آزاد F مانند $\frac{F}{R}$، یکریخت است. به‌عبارت دیگر، هر گروه تصویر همریخت یك گروه آزاد است.*

برهان. به [۲۴] مراجعه کنید. □

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید G یك گروه، X یك مجموعه مولد برای G و F یك گروه آزاد بر روی X باشد به طوری‌که $G\cong \frac{F}{R}$. در این‌صورت $\frac{F}{R}$ یك **نمایش آزاد** [5] برای گروه G

[1] object

[2] concrete category

[3] morphism

[4] free object

[5] free presentation

نامیده می‌شود.
هرگاه F و $Y \subseteq F$ ، $R = \langle Y \rangle^F$ ، آن‌گاه از نمادگذاری زیر برای نمایش گروه G استفاده می‌کنیم.

$$G = \langle X | Y \rangle.$$

که $R = \langle Y \rangle^F$ بستار نرمال $\langle Y \rangle$ در F است. به عبارتی R اشتراک همه زیرگروه های نرمالی از F که شامل Y هستند، می باشد. X و Y به ترتیب مجموعه مولد و مجموعه روابط G نامیده می شوند.

یادآوری ۱۰.۱.۱. *اگر $\{G_i \mid i \in I\}$ خانواده ای ازگروه ها باشد،* ***حاصلضرب مستقیم*** [1] *این خانواده را با $\prod_{i \in I} G_i$ و در حالتی‌که I متناهی باشد با $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ (در نماد جمعی با $G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_n$) نشان می دهیم.*
حاصل ضرب مستقیم ضعیف (خارجی) [2] *خانواده $\{G_i \mid i \in I\}$ ازگروه ها، که با نماد $\prod_{i \in I}^{w} G_i$ نشان داده می شود، مجموعه تمام $\{g_i\}_{i \in I}$هایی است که به ازای هر $i \in I$، به جز تعداد متناهی، $g_i = 1$.*
اگر I متناهی باشد، آن‌گاه حاصلضرب مستقیم ضعیف با حاصلضرب مستقیم یکی است و در صورتی‌که گروه های G_i همه آبلی (جمعی) باشند، $\prod_{i \in I}^{w} G_i$ را معمولاً مجموع مستقیم (خارجی) نامیده و با نماد $\oplus \sum_{i \in I} G_i$ نشان می دهیم.

قضیه ۱۱.۱.۱. *فرض‌کنید $\{G_i \mid i \in I\}$ و $\{N_i \mid i \in I\}$ خانواده هایی ازگروه ها باشند. اگر به ازای هر $i \in I$، N_i زیرگروه نرمالی از G_i باشد، آن‌گاه*

(i) $\prod_{i \in I} N_i$ زیرگروه نرمالی از $\prod_{i \in I} G_i$ بوده و $\prod_{i \in I} G_i / \prod_{i \in I} N_i \cong \prod_{i \in I} (G_i/N_i)$.

(ii) $\prod_{i \in I}^{w} N_i$ زیرگروه نرمالی از $\prod_{i \in I}^{w} G_i$ بوده و $\prod_{i \in I}^{w} G_i / \prod_{i \in I}^{w} N_i \cong \prod_{i \in I}^{w} (G_i/N_i)$.

[1] direct product

[2] external weak direct product

برهان. به [۱۰] مراجعه کنید. □

یک دسته مهم از گروه ها، گروه های آبلی با تولید متناهی هستند که تا حد یکریختی به وسیله قضیه مهم زیر رده بندی شده اند.

قضیه ۱۲.۱.۱. *(قضیه اساسی گروه های آبلی با تولید متناهی)*[1]
فرض کنید G یک گروه آبلی با تولید متناهی باشد. در این صورت عدد صحیح نامنفی r و اعداد طبیعی k و n_1، n_2، $\cdots$، n_k که $n_1 \mid n_2 \mid \ldots \mid n_k$ وجود دارند به طوری که

$$G \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_k} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{r}.$$

اگر $r = 0$ آن گاه G یک گروه آبلی متناهی است.

برهان. به صفحه ۷۶ از [۱۰] رجوع شود. □

لم ۱۳.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه و H و K دو زیرگروه از آن باشند. در این صورت به ازای هر $h \in H$، $k \in K$ و $t \in \mathbb{N}$ داریم*

$$[k, h^t] \equiv [k, h]^t \qquad ([K, H, H] \quad \text{پیمانه})$$

برهان. با استفاده مکرر از رابطه $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$ به دست می آوریم

$$\begin{aligned}
[k, h^t] = [k, hh^{t-1}] &= [k, h^{t-1}][k, h]^{h^{t-1}} \\
&= [k, h^{t-1}][k, h][k, h, h^{t-1}] \\
&= [k, h^{t-2}][k, h][k, h, h^{t-2}][k, h][k, h, h^{t-1}] \\
&\ \ \vdots \\
&\equiv [k, h]^t \qquad ([K, H, H] \quad \text{پیمانه}).
\end{aligned}$$

□

[1] fundamental theorem of finitely generated abelian group

لم ۱۴.۱.۱. *فرض کنید G گروهی دوری و متناهی از مرتبه n باشد. در این صورت $Aut(G)$ گروهی آبلی از مرتبه $\varphi(n)$ است که φ تابع فی اویلر می باشد.*

برهان. به قضیه ۵.۵.۱ از [۲۴] مراجعه شود. □

لم ۱۵.۱.۱. *فرض کنید G گروهی دوری باشد و $|G| = p^k$ که k عددی مثبت و p عددی اول است. در این صورت $|Aut(G)| = \varphi(p^k)$ و $Aut(G) \cong U_{p^k}$.*
به علاوه اگر $p \geqslant ۳$، آن گاه

$$U_{p^k} \cong Z_{\varphi(p^k)} = Z_{p^{k-۱}(p-۱)}$$

و هم چنین

$$U_{۲^k} \cong \begin{cases} ۱ & k = ۱ \\ Z_۲ & k = ۲ \\ Z_{۲^{k-۲}} \times Z_۲ & k \geqslant ۳ \end{cases}$$

برهان. به [۵] مراجعه شود. □

قضیه ۱۶.۱.۱. *فرض کنید G گروهی با تولید متناهی باشد. اگر H زیرگروهی از G با اندیس متناهی باشد، آن گاه H با تولید متناهی است.*

برهان. به صفحه ۳۶ از [۲۴] مراجعه شود. □

قضیه ۱۷.۱.۱. *(شور)*[1]

فرض کنید G یک گروه و $[G : Z(G)] = n$ باشد. در این صورت G' متناهی است و $(G')^n = ۱$.

برهان. به صفحه ۲۷۸ از [۲۴] مراجعه شود. □

لم ۱۸.۱.۱. *فرض کنید A و B زیرگروه هایی از یک گروه G باشند. در این صورت*

$$[A : A \cap B] \leqslant [G : B].$$

[1] Schur

برهان. با برقراری یک تابع یک به یک از $\frac{A}{A\cap B}$ به $\frac{G}{B}$ حکم به سادگی دیده می شود. □

۲.۱ گروه های حل پذیر و پوچ توان

در این قسمت گروه های حل پذیر و پوچ توان را معرفی کرده و برخی قضایای مربوط به این گروه ها را که در فصل های بعد مورد نیاز است، بررسی می کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. سری

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant G_2 \leqslant ... \leqslant G_n = G.$$

از زیر گروه های G را یک سری آبلی G گوییم هرگاه به ازای هر i، $1 \leqslant i \leqslant n-1$، $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$ و گروه $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ گروهی آبلی باشد.

تعریف ۲.۲.۱. گروه G را **حل پذیر** [1]گوییم هرگاه G دارای یک سری آبلی باشد.

تعریف ۳.۲.۱. حالت خاصی از زیرگروه‌های جابجاگر زمانی اتفاق می‌افتد که X و Y خود گروه G باشند. در این حالت زیرگروه $[G,G]$را با نماد G' نشان داده وآن را **زیرگروه مشتق**[2] G می نامیم.

اکنون برای هر $n \geq 2$، مشتق مرتبه ی n-ام G یعنی $G^{(n)}$ به روش استقرایی به صورت زیر تعریف می شود. فرض کنید $G^{(n-1)}$ تعریف شده باشد. در این صورت

$$G^{(n)} = (G^{(n-1)})'.$$

زنجیر زیر را **سری مشتق** [3] گروه G نامیم.

$$G = G^{(0)} \geqslant G' = G^{(1)} \geqslant \cdots \geqslant G^{(n)} \geqslant G^{(n+1)} \geqslant \cdots \qquad (1.1)$$

[1]soluble

[2]derived subgroup

[3]derived Series

سری (۱.۱) در حالت کلی به $\{1\}$ ختم نمی‌شود، ولی اگر به ازای nای $G^{(n)}=\{1\}$، آن‌گاه واضح است که به ازای هر m که $m \geqslant n$، $G^{(m)}=\{1\}$. در این‌صورت کوچکترین عدد طبیعی n را که به‌ازای آن $G^{(n)}=\{1\}$ ، **طول مشتق**[1] گروه G گویند.

قضیه ۴.۲.۱. *گروه دلخواه G حل پذیر است اگر و تنها اگر به ازای یک عدد طبیعی n، $G^{(n)}=\{1\}$.*

برهان. به [۲۴] مراجعه شود. □

قضیه ۵.۲.۱. *فرض کنید G گروهی حل پذیر باشد. در این صورت*

(i) *هر زیرگروه G نیز حل پذیر است.*

(ii) *اگر $N \trianglelefteq G$، آن‌گاه $\frac{G}{N}$ حل پذیر است.*

(iii) *اگر N و $\frac{G}{N}$ حل پذیر باشند، آن‌گاه G نیز حل پذیر است.*

برهان. به [۲۴] رجوع شود. □

تعریف ۶.۲.۱. یك زنجیر از زیرگروه‌های گروه G به‌صورت

$$G_0=\{1\} \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n \leq G_{n+1} \leq \cdots$$

را **سری مرکزی** [2] گویند، هرگاه به‌ازای هر i، $G_i \trianglelefteq G$ و

$$\frac{G_{i+1}}{G_i} \leq Z(\frac{G}{G_i}).$$

اکنون دو سری مرکزی مهم را برای گروه دلخواه G تعریف می‌کنیم.

[1] derived length

[2] central series

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت زیرگروه $\gamma_n(G)$ به صورت استقرایی تعریف می شود. فرض کنید $\gamma_۱(G) = G$ و به ازای هر $n \geqslant ۲$، $\gamma_{n-۱}(G)$ تعریف شده باشد. در این صورت $\gamma_n(G)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\gamma_n(G) = [\gamma_{n-۱}(G), G].$$

با توجه به قضیه ۴.۱.۱

$$\frac{\gamma_{n-۱}(G)}{\gamma_n(G)} \leq Z(\frac{G}{\gamma_n(G)})$$

لذا زنجیر

$$G = \gamma_۱(G) \geq \cdots \geq \gamma_n(G) \geq \cdots \qquad (۲.۱)$$

یك سری مرکزی از G است. زنجیر (۲.۱) **سری مرکزی پایینی** [۱] گروه G نامیده می‌شود.
اگر به ازای عدد طبیعی k، $\gamma_k(G) = \{۱\}$، آن گاه برای هر $n \geqslant k$، $\gamma_n(G) = \{۱\}$.
کوچکترین عدد طبیعی n را که در آن $\gamma_{n+۱}(G) = \{۱\}$، طول سری مرکزی پایینی G می نامیم.

تعریف ۸.۲.۱. برای هر عدد طبیعی n، n-امین مرکز گروه G را با نماد $Z_n(G)$ نشان داده و آن را استقرایی به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$Z_۰(G) = \{۱\},$$

$$Z_۱(G) = Z(G),$$

فرض کنید $Z_{n-۱}(G)$ تعریف شده باشد و $Z_{n-۱}(G) \trianglelefteq G$. در این صورت $Z_n(G)$

[1] lower central series

زیرگروهی از G است که در شرط زیر صدق می کند،

$$\frac{Z_n(G)}{Z_{n-1}(G)} = Z(\frac{G}{Z_{n-1}(G)}).$$

بنابراین زنجیر زیر یک سری مرکزی از گروه G است.

$$\{1\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \cdots \leq Z_n(G) \leq \cdots . \qquad (۳.۱)$$

زنجیر (۳.۱) را **سری مرکزی بالایی** [۱] گروه G می نامیم. کوچکترین عدد طبیعی n را که در آن $Z_n(G) = G$، طول سری مرکزی بالایی گروه G می نامیم.

تعریف ۹.۲.۱. گروه G را **پوچ توان** [۲] گویند، هرگاه دارای یک سری مرکزی باشد که به G ختم شود. طول کوتاهترین چنین سری را **رده پوچ توانی** [۳] گروه G نامیده و آن را با نماد $cl(G)$ نشان می‌دهیم.

همچنین اگر گروه G پوچ توان از رده پوچ توانی m باشد، آن گاه داریم $\gamma_{m+1}(G) = \{1\}$ و $\gamma_m(G) \neq \{1\}$ و نیز $Z_m(G) = G$ و $Z_{m-1}(G) \neq G$.

قضیه ۱۰.۲.۱. *فرض کنید G گروهی پوچ توان باشد. در این صورت هر زیرگروه G نیز پوچ توان است.*

برهان. به [۲۴] مراجعه شود. □

لم ۱۱.۲.۱. *اگر G گروهی دلخواه باشد، آن گاه به ازای هر i، $i \geqslant 1$، $x \in Z_i(G)$ اگر و تنها اگر به ازای هر $g_1, g_2, \cdots, g_i \in G$ داشته باشیم $[x, g_1, g_2, \cdots, g_i] = 1$.*

برهان. به روش استقراء روی i، حکم به سادگی نتیجه می شود. □

---

[1] upper central series

[2] nilpotent

[3] nilpotency class

لم ۱۲.۲.۱. *فرض کنید G یك گروه باشد. در این صورت G یک گروه پوچ توان از رده c می باشد که c عددی صحیح و مثبت است اگر و تنها اگر $\frac{G}{Z(G)}$ پوچ توان از رده $c-1$ می باشد.*

برهان. با استفاده از تعریف سری مرکزی بالایی برای گروه G و $\frac{G}{Z(G)}$ حکم به سادگی نتیجه می شود.

□

قضیه ۱۳.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه و N زیرگروهی نرمال از G باشد. در این‌صورت برای هر $m,n\in\mathbb{N}$ داریم*

(i) $\gamma_n(G\times H)=\gamma_n(G)\times\gamma_n(H)$، $Z_n(G\times H)=Z_n(G)\times Z_n(H)$؛

(ii) $Z_m(\frac{G}{Z_n(G)})=\frac{Z_{m+n}(G)}{Z_n(G)}$؛

(iii) $\gamma_n(\frac{G}{N})=\frac{\gamma_n(G)N}{N}$، $Z_n(\frac{G}{N})\geqslant\frac{Z_n(G)N}{N}$.

برهان. به [۲۴] مراجعه کنید. □

قضیه ۱۴.۲.۱. *فرض کنید G گروهی پوچ توان و N زیر گروه نرمال غیر بدیهی از G باشد. در این صورت $N\cap Z(G)\neq\{1\}$.*

برهان. به صفحه ۱۲۵ از [۲۴] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. زیر گروه H از G را یک زیر گروه **زیر نرمال**[1] G گویند هرگاه زیر گروه های H_1، H_2، $\cdots$، H_k از G وجود داشته باشد به طوری که

$$H\trianglelefteq H_1\trianglelefteq H_2\trianglelefteq\cdots\trianglelefteq H_k\trianglelefteq G.$$

قضیه ۱۶.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:*

[1] subnormal