دانشگاه پیام‌نور

دانشکده علوم

گروه ریاضی

برد عددی و تعمیم آن

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی‌محض

مؤلف

الیزا هاشمی‌آقجه‌کندی

استاد راهنما

جناب آقای دکتر مجید میرزاوزیری

استاد مشاور

خانم دکتر ثریا طالبی

خرداد ۱۳۸٤

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور

تاریخ: ....
شماره: ....
پیوست: ....

بسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان:

که توسط خانم الهام هاشمی **تهیه و به هیئت داوران ارائه گردیده است مورد تائید می باشد.**

تاریخ دفاع: ۸۳/۴/۵ **نمره:** ۱۹/۵ نوزده و نیم **درجه ارزشیابی:** عالی

اعضای هیئت داوران :

نام و نام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
دکتر مجید میرزا وزیری	استاد راهنما	استادیار	
دکتر ثریا طالبی	استاد راهنمای همکار یا مشاور	استادیار	
خانم دکتر شیرین مجابی	استاد ممتحن	استادیار	
خانم دکتر عقیله حیدری	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

جمهوری اسلامی ایران

وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور

تاریخ: ....

شماره: ....

پیوست: ....

بسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان:

که توسط خانم الیزا هاشمی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

مرکز مشهد تهیه و به هیئت داوران ارائه گردیده است مورد تائید می باشد.

تاریخ دفاع: ۸۳/۴/۵ نمره: نوزده و نیم ۱۹/۵ درجه ارزشیابی: عالی

اعضای هیئت داوران :

نام و نام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
آقای دکتر مجید میرزاوزیری	استاد راهنما	استادیار	
دکتر [illegible]	استاد راهنمای همکار یا مشاور		
خانم دکتر شیرین حجازیان	استاد ممتحن	استادیار	
خانم دکتر عقیله حیدری	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

تغییرات لازم:

دل گرچه در این وادیه بسیار شتافت
یک موی ندانست ولی موی شکافت
اندر دل من هزار خورشید بتافت
واخر به کمال ذره ای راه نیافت

تقدیم به

پدر و مادرم

که جزء به همراهی خضرگونشان کلامی بر این مکتوب نقش نمی بست.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

مطالعه روی عملگرهای ترکیبی بـه قـضیه عملگرهـا از توابـع تمامریخـت روی قـرص واحد باز منتهی می‌شود.

عملگرهای ترکیبی را روی قرص یکه باز U در فضای هاردی H^2 بررسـی مـی‌کنـیم، که $H(U)$ فضای تمام توابع تمامریخت است.

برای هر تابع تمامریخت $\varphi: U \to U$، عملگر ترکیبی C_φ روی $H(U)$ به صورت

$$C_\varphi f = f o \varphi \qquad , \qquad (f \in H(U))$$

تعریف می‌شود.

یک عملگر ترکیبی روی $H(U)$،عملگری خطی و پیوسته است.

در ایـن پایـان نامـه بـه بررسـی بردعـددی عملگـر ترکیبـی روی H^2 و خـواص آن می‌پردازیم.

برد عددی عملگر خطی T روی فضای هیلبرت H،زیر مجموعه‌ای از اعداد مـختلط بـه صورت

$$W(T) = \{<Tf, f>: f \in H, \|f\| = 1\},$$

است.

مهمترین خواص برد عددی عبارتند از:

۱) برد عددی T، شامل مقادیر ویژه T است.

۲) برد عددی T ،در قرص $\{w: |w| \le \|T\|\}$ قرار می‌گیرد.

۳) بستار برد عددی T ،شامل طیف T است.

۴) برد عددی T ،محدب است.

اگر H متناهی‌البعد باشد ،آنگاه بردعددی T فشرده است.

محدب بودن بردعددی ،اولین بار برای بردهای عددی کراندار توسط توپلیتز در ۱۹۱۸[۳۱] ، ثابت شد و نتیجه در همان سال توسط هاسدورف [۱۷] ، کامل شد.

در این پایان نامه روی دو سوال اساسی متمرکز می‌شویم.

۱) برای کدام φ ، $W(C_\varphi)$ قرصی به مرکز صفر می‌باشد؟

۲) برای کدام φ ، $W(C_\varphi)$ شامل صفر می‌باشد؟

خودریختی‌های غیربیضوی و همچنین هذلولوی و سهموی برد عددی عملگرشان قرصی به مرکز صفراست.

و نیز سوال ۲ به دو دلیل مطرح می‌شود.

- صفر در بستار برد عددی هر عملگر ترکیبی به غیر از همانی قرار می گیرد.
- برد عددی عملگر ترکیبی فشرده، بسته است فقط وفقط وقتی که شامل صفر باشد[۱۰].

اتساع های مثبت $\varphi(z)=wz$ برای $0<r<1$، خانواده‌ای از عملگرهای ترکیبی فشرده با برد عددی غیربسته را تولید می‌کند و $W(C_\varphi)$ بازه نیم‌باز $(0,1]$ است.

و نیز برای هر خودنگاشت تمامریخت غیرثابت از U با $\varphi(0)=0$ ثابت می‌کنیم که صفر متعلق به $W(C_\varphi)$ است.در واقع صفر نقطه درونی این مجموعه است.

اگر φ نقطه‌ای از U به غیر از مبدأ را ثابت نگه‌دارد، آنگاه دربرداشتن صفر کمی مشکل‌تر می‌شود،

واگر φاتساع همدیس مثبت نباشد ،آنگاه $0 \in W^{\circ}(C_\varphi)$.

اگر نقطه ثابت نگه داشته شده به اندازه کافی دور از مبدأ باشد ،آنگاه مشاهده می شود که صفر در درون $W(C_\varphi)$ قرار می‌گیرد.

فصل ۱

مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این فصل قصد داریم به معرفی مفاهیمی در فضای باناخ، فضای هلیبرت و فضای هاردی و خواص آنها بپردازیم. در بخش ۳ این فصل به بررسی نامساوی لیتلوود و تابع جمعی نوانلینا و قضایای مربوط به آنها می‌پردازیم.

۱-۱- مفاهیم و قضایای عمومی در فضای باناخ

۱-۱-۱ تعریف

فرض‌کنیم X یک فضای برداری روی میدان F باشد. تابع $\|.\|: X \to \Re^{+} \cup \{o\}$ را یک نرم روی X می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد

۱. $\|x\| \geq o$

۲. $\|x\| = o \quad \Leftrightarrow \quad x = o$

۳. $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\| \qquad \forall \alpha \in F, \forall x \in X$

۴. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in X$

$(X, \|.\|)$ را یک فضای نرمدار می‌نامیم.

۱-۱-۲ مثال

اگر $X = C([a,b])$ روی میدان R یک فضای برداری باشد،آنگاه با نرم تعریف شده به‌صورت

$$\|f\| = Sup\{|f(x)| \; ; x \in [a,b]\},$$

یک فضای نرمدار است.

۱-۱-۳ تعریف

فضای نرمدار X را یک فضای باناخ[۱] گوئیم، هرگاه X نسبت به القا شده توسط نرم آن فضایی کامل باشد یعنی، هر دنباله‌کشی در آن همگرا باشد.

۱-۱-۴ مثال

فضای اقلیدسی $\mathbb{C}^n$ یک فضای باناخ می‌باشد.

۱-۱-۵ تعریف

فضای برداری X روی میدان F را همراه با دو عمل جمع $(a,b) \to a+b$ و ضرب $(a,b) \to ab$ یک جبر گوئیم، هرگاه به ازای هر $x,y,z \in X$ و $\alpha \in F$، داشته باشیم

۱. $(xy)z = x(yz)$

۲. $x(y+z) = xy + xz$

۳. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

۴. $(x+y)z = xz + yz$

۱-۱-۶ تعریف

فضای باناخ $(X,\|.\|)$ را یک جبر باناخ[۲] گوئیم، هرگاه X یک جبر باشد و برای هر $x,y \in X$ داشته باشیم

$$\|xy\| \leq \|x\|.\|y\|.$$

[۱] - Banach space
[۲] - Banach Algebra

۱-۱-۷ مثال

فضای باناخ $(X,\|.\|)$ با نرم تعریف شده در مثال ۱-۱-۲، یک جبر باناخ می‌باشد.

۱-۱-۸ قضیه

اگر X یک جبر باناخ باشد که $x \in X$ و $\|x\|<1$، آنگاه $I-x$ معکوس‌پذیر است.

برهان

فرض‌کنیم

$$y=\sum_{x=o}^{\infty} x^{n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=o}^{N} x^{n} \, ,$$

که $x^{o}=1$ سری و حد فوق در X همگراست ،زیرا

$$\left\|\sum_{n=o}^{N+P} x^{n} - \sum_{n=o}^{N} x^{n}\right\| \le \sum_{n=N+1}^{N+P} \|x\|^{n} \to o \qquad , \quad (n\to\infty).$$

چون در جبر باناخ ضرب پیوسته است، داریم

$$(I-x)\,y = y - xy = \sum_{n=o}^{\infty} x^{n} - \sum_{n=o}^{\infty} x^{n+1} = 1,$$

و

$$y(I-x) = y - yx = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = 1$$

بنابراین $I-x$ معکوس‌پذیر است □

۱-۱-۹ تعریف

فرض کنیم X یک جبر باناخ باشد و $x \in X$ ،دراین صورت طیف[۱] x بـا نمـاد $\sigma(x)$ به‌صورت

$$\sigma(x) = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \lambda I - x \text{ وارون‌پذیرنباشد} \},$$

تعریف می‌شود.

۱-۱-۱۰ قضیه

$\sigma(x)$ در $\mathbb{C}$ فشرده است و در قرص بسته $\{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq \|x\|\}$ قرار دارد.

برهان

عضو x را در X درنظر می‌گیریم. مکمل $\sigma(x)$ در $\mathbb{C}$ باز است. بنـابراین $\sigma(x)$ در $\mathbb{C}$ بسته است.

برای $|\lambda| \geq \|x\|$ ، عضو

$$\lambda I - x = \lambda (I - \frac{x}{\lambda}),$$

بنابـه قـضیه ۱-۱-۸، وارون‌پـذیر اسـت. پـس $\sigma(x)$ جزئـی از قـرص بـسته $\{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq \|x\|\}$ است.

چون $\sigma(x)$ کراندار و بسته است، لذا فشرده است □

[۱] - Spectrum

۱-۲ فضای هیلبرت و خواص آن

۱-۲-۱ تعریف

فرض‌کنیم X یک فضای برداری روی میدان F باشد. تـابع $<.,.>:X\times X\to F$ را یک ضرب داخلی نامیم، هرگاه برای هر $x,y,z\in X$ داشته باشیم

۱. $<x,x>\geq o$

۲. $<x,x>=o \quad \Leftrightarrow \quad x=o$

۳. $<cx,y>=c<x,y> \qquad \forall c\in F$

۴. $<x,y>=\overline{<y,x>}$

به‌طور مثال روی فضای برداری $C([a,b])$یک ضرب داخلی به‌صورت

$$<f,g>=\int_a^b f(x)\overline{g}(x)\,dx,$$

تعریف می‌شود.

۱-۲-۲ تعریف

فضای هیلبرت، فضای باناخی است که نرم تعریـف شـده روی آن از ضـرب داخلـی تولید شود.

با توجه به تعریف فوق فضای اقلیدسی با ضـرب نقطـه‌ای معمـولی فـضای هیلبـرت می‌باشد.

۱-۲-۳ قضیه (ریس-فیشر)[۱]

فرض کنیم $f:H\to\mathbb{C}$ تابعک خطی کراندار باشد، یعنی $f\in H^{*}$ در این صورت y منحصربفردی در H وجود دارد به‌طوری‌که $\|f\|=\|y\|$ و

$$f(x)=<x,y> \qquad , \quad \forall x\in H.$$

یعنی $H\cong H^{*}$.

برهان[۲۶ , قضیه ۱۷,۴] □

۱-۲-۴ تعریف

فرض کنیم K,H فضاهای هیلبرت با نرمهای $\|\cdot\|_H$ و $\|\cdot\|_K$ و ضرب‌های داخلی $<.,.>_H$ و $<.,.>_K$ باشند.

نگاشت $S:H\to K$ را یک طولپایی[۲] گوئیم، هرگاه برای هر $x\in H$ داشته باشیم

$$\|Sx\|_H=\|x\|_K.$$

۱-۲-۵ تعریف

فرض‌کنیم $H_۱,H_۲$ دوفضای هیلبرت با ضرب داخلی $<.,.>_۱$ و $<.,.>_۲$ باشند.

نگاشت خطی معکوس‌پذیر $U:H_۱\to H_۲$ به‌طوری‌که

---

۱ - Riesz- Fisher
۲ - Isometry

$$< U(x), U(y) >_2 = < x, y >_1 ,$$

نگاشت یکانی[1] نامیده می شود.

بنا به قضیه ریس-فیشر سری مثلثاتی $\sum \hat{f}(n)e^{in\theta}$ نسبت به تابع $f \in H^2$، سری فوریه توابع $f^* \in L^2(m, \partial U)$ است.

بدیهی است که نگاشت $f \to f^*$ فضای H^2 را بطور یکمتری بر روی زیرفضای بسته متشکل از همه توابعی که ضرایب فوریه با اندیس منفی آنها صفر می‌شود، می‌برد.

۱-۲-۶ تعریف

تابع مرزی f^*، توسیعی طبیعی از f به ∂U به‌صورت

$$f^*(\zeta) = \lim_{r \to 1^-} f(r\zeta) \qquad \zeta \in \partial U ,$$

را تابع حدشعاعی[2] می‌نامیم.

۱-۲-۷ تعریف

فرض کنیم H فضای هیلبرت و E زیرمجموعه‌ای از H باشد، در این صورت مجموعه متعامد E را با نماد $E^\perp$ به‌صورت

$$E^\perp = \{x \in H \,;\, < x, y > = o \ , \forall y \in E\},$$

تعریف می‌کنیم.

---

[1] - Unitary map
[2] - Radial Limit function

۱-۲-۸ تعریف

مجموعه متعامد یکه $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ را یک پایه متعامد یکه برای فضای هیلبرت H می‌نامیم ، هرگاه یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$1.\ < x,u_\alpha >= o \ \Rightarrow x = o \qquad \forall \alpha \in A$$

$$2.\ \| x \|^2 = \sum |< x,u_\alpha >|^2 \qquad \forall x \in H$$

$$3.\ x = \sum < x,u_\alpha > u_\alpha \qquad \forall x \in H$$

۱-۲-۹ تعریف

فرض کنیم X,Y دو فضای نرم‌دار روی میدان F باشند. نگاشت $T:X\to Y$ را عملگرخطی[1] می‌نامیم، هرگاه

$$T(\alpha x_1 + x_2) = \alpha T(x_1) + T(x_2),$$

و نرم عملگر خطی T را به صورت

$$\| T \| = Sup\{\| Tx \| \ ; \|x\| = 1\},$$

تعریف می‌کنیم.

اگر $\|T\| < \infty$، آنگاه عملگر T را کراندار می‌نامیم.

تمام عملگرهای خطی کراندار از X به Y را با نماد $B(X,Y)$ نمایش می‌دهیم.

[1] - Linear operator

۱-۲-۱۰ قضیه

فرض‌کنیم M زیرفضای تولیدشده توسط h,g و T عملگر خطی روی H باشد که

$$Tf = < f, g > h,$$

و P تصویر متعامد H بر روی M باشد، دراین‌صورت

$$< PTPf, f > = < Tf, f >.$$

برهان

درنظر می‌گیریم

$$M = \{\alpha g + \beta h; \alpha, \beta \in \mathbb{C}\},$$

و

$$P : H = M \oplus M^{\perp} \to M$$
$$P(x) = p(y + z) = y,$$

که $y \in M, Z \in M^{\perp}$.

اگر $f = f_1 + f_2$، آنگاه $Pf = f_1$.

پس

$$TPf = Tf_1 = < f_1, g > h,$$

اگر $h = h_1 + h_2$، آنگاه

$$PTPf = P < f_1, g > h = < f_1, g > Ph = < f_1, g > h_1,$$

و همچنین

$$< PTP f, f > = << f_1, g > h_1, f_1 + f_2 > = < f_1, g >< h_1, f_1 + f_2 >$$
$$= < f_1, g >< h_1, f_1 >,$$

از طرفی

$$<Tf,f>=<<f,g>h,f> \;=<f,g>(<h_1,f_1>+<h_2,f_2>),$$

و چون $h\in M$، پس $h_2=o$ و همچنین $g\in M$، لذاداریم

$$<Tf,f>=<f_1,g><h_1,f_1>\square$$

۱-۲-۱۱ تعریف

عملگر کراندار T روی فضای هیلبرت H را خودالحاق[1] نامیم، هرگاه

$$T=T^*,$$

و یا

$$<T(x),y>=<x,T(y)>$$

۱-۲_۱۲قضیه

فرض‌کنیم T عملگر خطی کراندار باشد ،دراین‌صورت $\sigma(T)=\overline{U}$ که $\overline{U}$ قرص واحد بسته است.

برهان

چون T یک طولپایی است ،پس $\sigma(T)\subset\overline{U}$ و نیز $T^*T=I$.

لذا برای هر $\lambda\in U$ داریم

$$T-\lambda I=(I-\lambda T^*)T,$$

از طرفی

[1] - Self adjoint

$$\left\|\lambda T^*\right\| = |\lambda|\left\|T^*\right\| = |\lambda| < ۱,$$

بنابراین $I-\lambda T^*$، بنابه‌قضیه ۱-۱-۸، معکوس‌پذیر است، اما T معکوس‌پذیر نیست و همچنین $T-\lambda I$ معکوس‌پذیر نمی‌باشد، پس $\lambda \in \sigma(T)$.

لذا $U \subset \sigma(T)$ □

۱-۲-۱۳تعریف

فرض کنیم T یک عملگر کراندار روی فضای هیلبرت H باشد، دراین صورت T را عملگر قطری[۱] می‌نامیم، هرگاه T دارای ماتریس قطری نسبت به پایه‌ای متعامد باشد. بدیهی است که عملگرهای نرمال فشرده روی فضای متناهی‌البعد، به طور یکانی قطری‌پذیراند

۱-۲-۱۴ قضیه

فرض‌کنیم T عملگری در فضای هیلبرت H باشد، در این‌صورت

$$Ker(T^*) = R(T)^{\perp}.$$

برهان [۲۷ , قضیه ۱۲,۴] □

۱-۲-۱۵ تعریف

عملگر خطی $T : X \to Y$ را فشرده گوئیم، هرگاه برای هر زیرمجموعه کراندار A از X، $\overline{T}(A)$ فشرده باشد.

---

۱ - Diagonal operator