دانشکده‌ی علوم

گروه ریاضی

تقریب قاب تنک برای چند قاب‌ها و ابر قاب‌ها

استاد راهنما:

دکتر عباس نجاتی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا عبداله پور

پژوهشگر:

آرام محرّم نیا

دانشگاه محقق اردبیلی

پاییز ۱۳۸۹

تقدیر و سپاسگذاری :

اکنون که در سایه‌ی لطف خداوند منان شاهد به ثمر رسیدن این پایان‌نامه می‌باشم بر خود لازم می‌دانم از تمامی عزیزانی که در طول این مدت به طور مستمر از راهنمایی‌های ارزشمندشان بهره برده‌ام قدردانی و سپاسگذاری نمایم. به خصوص از استاد محترم، جناب آقای دکتر نجاتی که به حق شایسته‌ی تشکر می‌باشند و در تمام این مدت خالصانه اینجانب را مورد لطف و راهنمایی خود قرار داده‌اند و امیدوارم آموخته‌هایم موجبات رضایت خاطر ایشان را فراهم سازد.

آرام محرّم نیا

مهر ۱۳۸۹

نام خانوادگی: محرّم نیا	**نام:** آرام

عنوان پایان‌نامه: تقریب قاب تنک برای چند قاب‌ها و ابر قاب‌ها

استاد راهنما : دکتر عباس نجاتی

استاد مشاور: دکتر محمدرضا عبداله پور

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   **رشته:** ریاضی   **گرایش:** آنالیز

دانشگاه: محقق اردبیلی   **دانشکده:** علوم

تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۸۹/۷/۶   **تعداد صفحه:** ۶۴

کلید واژه : قاب‌ها، سیستم‌های یکانی تصویر، تقریب، تقریب چند قاب‌ها و ابر قاب‌ها، قاب‌های گابور، زیر فضاهای انتقال پایا

چکیده : در این مقاله یک مولد $\Phi = (\phi_1, \cdots, \phi_N)$ برای چند قاب یا ابر قاب تولید شده تحت عمل نمایش یکانی تصویر برای گروه‌های شمارش پذیر گسسته بررسی خواهد شد. مثال‌هایی از این قاب‌ها چند قاب‌های گابور، ابر قاب‌های گابور و قاب‌هایی برای زیر فضاهای انتقال پایاست.

نشان می‌دهیم که مولد چند قاب تنک نرمال شده (ابر قاب) یکتا $\Psi = (\psi_1, \cdots, \psi_N)$ وجود دارد به طوری که برای هر مولد چند قاب تنک نرمال شده (ابر قاب) $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_N)$ نابرابری زیر برقرار باشد

$$\sum_{j=1}^{N} \|\phi_j - \psi_j\|^2 \leq \sum_{j=1}^{N} \|\phi_j - \eta_j\|^2.$$

همچنین مسائل مشابه برای قاب‌های دوگان مطرح شده و برخی از کاربردها در قاب‌های گابور و بعضی قاب‌های دیگر مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

فهرست مندرجات

مقدمه

فرض کنید $\{x_n\}$ پایه‌ای مفروض در یک فضای هیلبرت باشد، سوال جالبی خواهد بود که چگونه می‌توان پایه‌ی دیگری مانند $\{y_n\}$ بدست آورد که نزدیک به $\{x_n\}$ بوده و همان زیر فضا (زیر فضایی که $\{x_n\}$ تولید می‌کند) را تولید کند. در حالتی که $\{x_n\}$ مستقل خطی باشد فرایند یکا متعامد سازی گرام– اشمیت[1] یک روش شناخته شده است ولی این روش به ترتیب جملات دنباله بستگی دارد به طوری که اگر ترتیب جملات دنباله تغییر کند مجموعه‌ی یکا متعامد کاملا متفاوتی بدست می‌آید. این مشخصه‌ی وابستگی به ترتیب در برخی کاربردها مطلوب نیست، علاوه بر این فرایند گرام– اشمیت در حالتی که پایه به صورت قاب باشد به نتیجه نمی‌رسد. با توجه به موارد فوق به دنبال یافتن روندی متفاوت هستیم که مستقل از ترتیب بوده و برای قاب‌ها نیز برقرار باشد. یکی از این روش‌ها که « تقریب متقارن» با قاب‌های تنک نرمال شده نامیده می‌شود، اخیرا توسط فرانک و همکارانش[2] ارائه شده است، در حالتی که $\{x_n\}$ یک مجموعه‌ی مستقل خطی باشد، تقریب متقارن، متعامد سازی لاودین[3] نامیده می‌شود.

در کاربردها بیشتر قاب‌های با ساختار ویژه (قاب‌های موجکی، قاب‌های گابور[4] و قاب‌های برای زیر فضاهای انتقال پایا) مورد توجه‌اند. بنابراین وقتی تقریب قاب تنک را بررسی می‌کنیم طبیعی است که لازم است قاب‌های تنگ از یک نوع باشند. دقت داریم که قاب‌های گابور، قاب‌های

---

[1] Gram-Schmidt

[2] Frank et al

[3] Löwdin

[4] Gabor

موجکی و بیشتر قاب‌های مورد توجه بوسیله‌ی خانواده‌ای از تبدیلات یکانی و برخی (یک یا چندین) تابع پنجره (تابعی که خارج یک بازه بسته صفر است) تولید می‌شود. در تمامی این حالات وقتی فضای هیلبرت زمینه از بعد نامتناهی باشد تقریب متقارن کارساز نخواهد بود، بنابراین در حالتی که قاب زمینه بوسیله‌ی خانواده‌ای از عملگرهای یکانی تولید می‌شود، بجای استفاده از تقریب متقارن، مولد قاب را بوسیله‌ی مولدهای قاب تنک نرمال شده تقریب می‌زنیم.
طبیعتا این سوال پیش می‌آید که چه موقع برای چنین قاب‌هایی بهترین تقریب قاب تنک نرمال شده را خواهیم داشت؟ هان[۵] به وجود و یکتایی بهترین تقریب برای قاب‌هایی با مولد یک عضوی و همچنین برای قاب‌هایی که تحت عمل نمایش یکانی تصویر روی یک گروه شمارش پذیر تولید می‌شود پاسخ داده است. این کلاس از قاب‌ها شامل قابهای گابور (برای شبکه‌ی دلخواه و بعد دلخواه) و هر قاب القا شده توسط عمل یک گروه از جمله قاب‌های برای زیر فضاهای انتقال پایاست. جانسون[۶] و استروهمر[۷] به طور مستقل نتیجه یکسانی را برای قاب‌های گابور در موارد یک بعدی ثابت کردند، اما تکنیک اصلی بکار برده شده در هان برای چند قاب‌ها بکار نمی‌آید. این پایان نامه بر اساس مقاله‌ی

[Han, D. 2004. *Tight frame approximation for multi-frames and super-frames,* J. Approx Theory. **129**: 78-93]

تدوین شده است که هدف اصلی آن استفاده از یک روش متفاوت (روش سرراست تر) برای بدست آوردن تقریب قاب تنک برای قاب‌هایی با چند مولد است. همچنین تقریب قاب تنک برای ابر قاب‌هایی که توسط بالان[۸]، هان و لارسن[۹] معرفی شده بررسی خواهد شد.

---

[۵] Han
[۶] Janssen
[۷] Strohmer
[۸] Balan
[۹] Larson

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱.۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱. فرض کنید H یک فضای هیلبرت جدایی پذیر باشد، دنباله‌ی $\{x_n\}$ از عناصر H یک قاب برای H نامیده می‌شود هر گاه اعداد ثابت $0 < A \leq B$ موجود باشند به طوری که به ازای هر $x \in H$ داشته باشیم

$$A\|x\|^{2} \leq \sum_{n} |\langle x, x_n\rangle|^{2} \leq B\|x\|^{2}. \tag{۱.۱}$$

ثابت‌های بهینه (ماکسیمال برای A و مینیمال برای B) کران‌های قاب نامیده می‌شود.

در حالتی که $A = B$ قاب $\{x_n\}$ یک قاب تنک نامیده می‌شود، در این حالت به ازای هر $x \in H$ داریم

$$A\|x\|^{2} = \sum_{n} |\langle x, x_n\rangle|^{2}.$$

و در حالتی که $A = B = 1$ قاب $\{x_n\}$ یک قاب تنک نرمال شده (قاب پارسوال) نامیده می‌شود، در این حالت به ازای هر $x \in H$ داریم

$$\|x\|^{2} = \sum_{n} |\langle x, x_n\rangle|^{2}.$$

تعریف ۲.۱. دنباله‌ی $\{x_n\}$ را یک دنباله‌ی بسل می‌نامیم هرگاه نابرابری سمت راست (۱.۱) برقرار باشد، یعنی عدد ثابت $B > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x \in H$ داشته باشیم

$$\sum_{n} |\langle x, x_n\rangle|^{2} \leq B\|x\|^{2}.$$

در این حالت B کران بسل $\{x_n\}$ نامیده می‌شود.

لم ۳.۱ [۱۲] هر گاه $\{x_n\}$ یک قاب و $B = ۱$ باشد، به ازای هر $x_n \in H$ خواهیم داشت $\|x_n\| \leq ۱$.

اثبات. بنا به رابطه‌ی (۱.۱) به ازای هر $x_m \in H$ داریم

$$\|x_m\|^۲ \geq \sum_n |\langle x_m, x_n\rangle|^۲ = |\langle x_m, x_m\rangle|^۲ + \sum_{n\neq m} |\langle x_m, x_n\rangle|^۲ \geq \|x_m\|^۴,$$

پس $\|x_m\|^۲ \leq \|x_m\|$ ، در نتیجه $\|x_m\| \leq ۱$. ■

لم ۴.۱ هر پایه‌ی یکا متعامد یک قاب تنک نرمال شده است.

اثبات. فرض کنید $\{x_n\}$ یک پایه‌ی یکا متعامد در H باشد، در این صورت هر عضو x از H را می‌توان بطور منحصر بفرد به صورت زیر نوشت

$$x = \sum_n \langle x, x_n\rangle x_n,$$

لذا داریم

$$\|x\|^۲ = \langle x, x\rangle = \langle \sum_n \langle x, x_n\rangle x_n, x\rangle = \sum_n \langle x, x_n\rangle\langle x_n, x\rangle = \sum_n |\langle x, x_n\rangle|^۲.$$

■

برعکس نتیجه‌ی فوق برقرار نیست:

لم ۵.۱ [۱۲] هر قاب تنک نرمال شده که دارای یکی از خواص یکه بودن یا متعامد بودن باشد، خاصیت دیگر را نیز خواهد داشت.

(الف) یک قاب تنک نرمال شده از بردارهای یکانی، یک پایه‌ی یکا متعامد است (اگر بردارهای واحد در فرمول قاب تنک نرمال شده صدق کنند، در آن صورت باید به تمام بردارهای دیگر در قاب، متعامد باشند).

(ب) یک قاب تنک نرمال شده از بردارهای دو بدو متعامد، یک پایه‌ی یکا متعامد است.

اثبات. (الف) فرض کنید $\{x_n\}$ یک قاب تنک نرمال شده برای H باشد و $\|x_n\| = ۱$ چون تعریف قاب تنک نرمال شده به ازای هر $x \in H$ برقرار است، برای x_m دلخواه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} ۱ &= \|x_m\|^۲ = \sum_n |\langle x_m, x_n\rangle|^۲ = |\langle x_m, x_m\rangle|^۲ + \sum_{n\neq m} |\langle x_m, x_n\rangle|^۲ \\ &= \|x_m\|^۴ + \sum_{n\neq m} |\langle x_m, x_n\rangle|^۲ = ۱ + \sum_{n\neq m} |\langle x_m, x_n\rangle|^۲. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\langle x_m, x_n\rangle = ۰ \ , \quad (n \neq m).$$

(ب) فرض کنید $\{x_n\}$ یک قاب تنک نرمال شده برای H باشد و به ازای هر m و n که $n \neq m$ داشته باشیم $< x_m, x_n >= ۰$،

چون تعریف قاب تنک نرمال شده به ازای هر $x \in H$ برقرار است، برای x_m دلخواه خواهیم داشت

$$\|x_m\|^۲ = \sum_n |\langle x_m, x_n\rangle|^۲ = |\langle x_m, x_m\rangle|^۲ + \sum_{n\neq m} |\langle x_n, x_m\rangle|^۲ = \|x_m\|^۴.$$

لذا $\|x_m\|^۲ = \|x_m\|$ ، در اینجا دو حالت پیش می‌آید $\|x_m\| = ۱$ یا $x_m = ۰$ اما چون وقتی قاب را تعریف می‌کنیم حالت بدیهی صفر بودن فضای H و صفر بودن تمام مولفه‌های قاب را کنار می‌گذاریم، پس به ازای هر m ، $\|x_m\| = ۱$. ■

گزاره ۶.۱ [۱۲] فرض کنید $\mathbb{J}$ یک مجموعه‌ی اندیس گذار شمارش پذیر (یا متناهی) و $\{x_n : n \in \mathbb{J}\}$ یک قاب تنک نرمال شده برای H باشد در این صورت فضای هیلبرت $H \subseteq K$ و یک پایه‌ی یکا متعامد $\{e_n : n \in \mathbb{J}\}$ برای K موجود است به طوری که $x_n = Pe_n$ که P تصویر متعامد از K به H است.

اثبات. قرار دهید $K = \ell^۲(\mathbb{J}) = \{a_j \ : \ \sum_{j\in\mathbb{J}} |a_j|^۲ < \infty\}$ و فرض کنید $\Theta : H \longrightarrow K$ تبدیل متعارف قاب باشد که به ازای هر $x \in H$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود

$$\Theta(x) = (\langle x, x_n\rangle)_{n\in\mathbb{J}} \ .$$

ابتدا ثابت می‌کنیم Θ خوش تعریف است

$$\|\Theta(x)\|^{۲} = \left\|\left(\langle x, x_n\rangle\right)_{n\in\mathbb{J}}\right\|^{۲} = \sum_{n\in\mathbb{J}} |\langle x, x_n\rangle|^{۲} = \|x\|^{۲} < \infty.$$

لذا $\|\Theta(x)\| = \|x\|$ پس Θ خوش تعریف و نیز ایزومتری (حافظ نرم) است. حال اگر Θ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\Theta : H \longrightarrow \Theta(H) \subseteq K,$$

در این صورت Θ پوشا و ایزومتری خواهد بود، از طرفی هر عملگر ایزومتری یک به یک است، لذا تناظری یک به یک بین H و $\Theta(H)$ وجود دارد ($\Theta(H) \cong H$) و می‌توان هر عضو H را با عضوی از $\Theta(H)$ یکی گرفت. از طرفی $\|\Theta\| = ۱$ پس Θ عملگری کراندار و لذا دارای برد بسته است پس $\Theta(H)$ بسته است و می‌توان نوشت $K = \Theta(H) \oplus \Theta(H)^{\perp}$ بنابراین به ازای هر x از K می‌توان نوشت $x = x_۱ + x_۲$ که در آن $x_۱ \in \Theta(H)$ و $x_۲ \in \Theta(H)^{\perp}$ حال فرض کنیم P یک تصویر متعامد از K به $H \cong \Theta(H)$ باشد

$$P : K = \Theta(H) \oplus \Theta(H)^{\perp} \longrightarrow \Theta(H)$$
$$P(x) = P(x_۱ + x_۲) = x_۱,$$

از جمله به ازای هر $z \in H$ داریم $P\Theta(z) = \Theta(z)$. حال پایه‌ی استاندارد برای $K = \ell^{۲}(\mathbb{J})$ را با نماد $\{e_j : \ j \in \mathbb{J}\}$ نشان می‌دهیم که در آن به ازای هر $j \in \mathbb{J}$ ، e_j برداری را در $\ell^{۲}(\mathbb{J})$ مشخص می‌کند که مولفه‌ی j ـ ام آن ۱ و سایر مولفه‌ها صفر است. ادعا می‌کنیم به ازای هر $x_n \in H$ داریم $P(e_n) = \Theta(x_n)$. ابتدا ثابت می‌کنیم $\langle\Theta(y), e_m\rangle = \langle y, x_m\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle\Theta(y), e_m\rangle &= \langle((\langle y, x_n\rangle)_{n\in\mathbb{J}}, e_m\rangle = \langle\sum_{n\in\mathbb{J}}\langle y, x_n\rangle e_n, e_m\rangle = \sum_{n\in\mathbb{J}}\langle y, x_n\rangle\langle e_n, e_m\rangle \\ &= \langle y, x_m\rangle.\end{aligned}$$

برای اثبات ادعا با توجه به این که P تصویر متعامد و لذا خود الحاق است، به ازای هر $m \in \mathbb{J}$ داریم

$$\langle \Theta(x_m), Pe_n \rangle = \langle P\Theta(x_m), e_n \rangle = \langle \Theta(x_m), e_n \rangle = \langle x_m, x_n \rangle = \langle \Theta(x_m), \Theta(x_n) \rangle.$$

لذا به ازای هر $x_m \in H$ داریم $\langle \Theta(x_m), P(e_n) - \Theta(x_n) \rangle = 0$ و چون $\Theta(x_m)$ها فضای $\Theta(H)$ را تولید می‌کنند، پس $P(e_n) - \Theta(x_n) \perp \Theta(H)$ از طرفی $P(e_n) \in \Theta(H)$ و $\Theta(x_n) \in \Theta(H)$ و $\Theta(H)$ زیر فضاست پس $P(e_n) - \Theta(x_n) \in \Theta(H)$ حال چون اگر عضوی از فضا به فضا عمود باشد باید آن عضو صفر باشد پس $P(e_n) - \Theta(x_n) = 0$ در نتیجه $P(e_n) = \Theta(x_n)$ و این ادعای ما را ثابت می‌کند، بنابراین به ازای هر $x_n \in H$ داریم

$$P(e_n) = \Theta(x_n) = x_n.$$

■

نتیجه ۷.۱ [۱۲] فرض کنید $\mathbb{J}$ یک مجموعه‌ی اندیس گذار شمارش پذیر (یا متناهی) باشد. $\{x_n : n \in \mathbb{J}\}$ یک قاب تنک نرمال شده برای فضای هیلبرت H است اگر و تنها اگر یک فضای هیلبرت M و یک قاب تنک نرمال شده $\{y_n : n \in \mathbb{J}\}$ برای M موجود باشد به طوری که $\{x_n \oplus y_n : n \in \mathbb{J}\}$ یک پایه‌ی یکا متعامد برای $H \oplus M$ باشد (اگر $\{x_n\}$ یک پایه‌ی یکا متعامد باشد بوضوح M را فضای صفر و y_n ها را بردارهای صفر در نظر می‌گیریم).

اثبات. طبق گزاره‌ی قبل فضای هیلبرت $H \subseteq K$ و یک پایه‌ی یکا متعامد $\{e_n : n \in \mathbb{J}\}$ برای K موجود است به طوری که $x_n = Pe_n$ که P یک تصویر از K به H است، کافیست قرار دهیم

$$M = (I-P)K \ , \quad y_n = (I-P)e_n \ , \quad (n \in \mathbb{J}).$$

■

نتیجه ۸.۱ [۱۲] یک پایه‌ی ریس دقیقا تصویر یک پایه‌ی یکا متعامد تحت یک عملگر وارون پذیر و کراندار است، همچنین یک قاب دقیقا تصویر یک قاب تنک نرمال شده تحت یک عملگر وارون پذیر و کراندار است.

یادآوری: دنباله‌ی $\{x_n\}$ یک پایه‌ی ریس برای H نامیده می‌شود هرگاه یک قاب و یک پایه برای H باشد (پایه به این معنی که بتوان بطور منحصر بفرد به ازای هر $x \in H$ نوشت $x = \sum_n \alpha_n x_n$ که نسبت به نرم H همگراست).

گزاره ۹.۱ [۱۲] فرض کنید $\mathbb{J}$ یک مجموعه‌ی اندیس گذار شمارش پذیر (یا متناهی) باشد. اگر $\{x_j \,:\, j \in \mathbb{J}\}$ یک قاب برای فضای هیلبرت H باشد، در این صورت یک فضای هیلبرت M و یک قاب تنک نرمال شده $\{y_j \,:\, j \in \mathbb{J}\}$ برای M موجود است به طوری که $\{x_j \oplus y_j \,:\, j \in \mathbb{J}\}$ یک پایه‌ی ریس برای $H \oplus M$ است.

اثبات. طبق نتیجه‌ی قبل قاب تنک نرمال شده $\{f_j\}$ برای H و عملگر وارون پذیر T در $B(H)$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $j \in \mathbb{J}$ داریم $x_j = Tf_j$ و طبق نتیجه‌ی ۷.۱ یک فضای هیلبرت M و یک قاب تنک نرمال شده $\{y_j \,:\, j \in \mathbb{J}\}$ برای M موجود است به طوری که $\{f_j \oplus y_j \,:\, j \in \mathbb{J}\}$ یک پایه‌ی یکا متعامد برای $H \oplus M$ است. بنابراین $T \oplus I$ یک عملگر وارون پذیر در $B(H \oplus M)$ است، لذا

$$(T \oplus I)(f_j \oplus y_j) = x_j \oplus y_j,$$

در نتیجه $\{x_j \oplus y_j\}$ یک پایه‌ی ریس برای $H \oplus M$ است. ■

یادآوری: جمعوند مستقیم داخلی یک پایه‌ی ریس یک دنباله مانند $\{x_n\}$ در یک فضای هیلبرت H است که به ازای آن یک دنباله‌ی دیگر مانند $\{y_n\}$ در فضای هیلبرت دیگری مانند M موجود باشد به طوری که جمع مستقیم متعامد $\{x_n \oplus y_n\}$ یک پایه ریس برای فضای هیلبرت جمع مستقیم $H \oplus M$ باشد.

قضیه ۱۰.۱ قاب‌ها دقیقا جمعوند مستقیم داخلی پایه‌های ریس هستند و قاب‌های تنک نرمال شده دقیقا جمعوند مستقیم داخلی پایه‌های یکا متعامد هستند.

اثبات. طبق نتیجه‌ی ۷.۱ و گزاره‌ی ۹.۱ کافیست ثابت کنیم که اگر $\{x_n\}_{n \in \mathbb{J}}$ یک پایه‌ی ریس برای H و $P \in B(H)$ یک عملگر خودتوان (نه لزوما تصویر خودالحاق) باشد در این صورت

$\{Px_n:\ n\in\mathbb{J}\}$ یک قاب برای PH است، فرض کنید $T\in B(H)$ عملگری وارون پذیر و Q نیز یک تصویر خودالحاق باشد، قرار می‌دهیم $P=TQT^{-1}$ و $y_n=T^{-1}x_n$ در این صورت $\{y_n\}_{n\in\mathbb{J}}$ پایه ریس دیگری برای H خواهد بود و به ازای هر $x\in QH$ خواهیم داشت

$$\sum_n|\langle x,Qy_n\rangle|^2=\sum_n|\langle Qx,y_n\rangle|^2=\sum_n|\langle x,y_n\rangle|^2,$$

چون $\{y_n\}_{n\in\mathbb{J}}$ یک قاب است، $\{Qy_n\}_{n\in\mathbb{J}}$ نیز یک قاب برای QH است و چون $T\mid_{QH}$ عملگری وارون پذیر و کراندار از QH به PH است، پس $\{TQy_n\}_{n\in\mathbb{J}}=\{TQT^{-1}x_n\}_{n\in\mathbb{J}}=\{Px_n\}_{n\in\mathbb{J}}$ یک قاب برای PH است. ∎

گزاره ۱۱.۱ [۱۲] اگر $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو قاب در فضای هیلبرت H باشند به طوری که به ازای $x\in H$ داشته باشیم

$$x=\sum_n\langle x,y_n\rangle x_n,$$

در این صورت به ازای $x\in H$ خواهیم داشت

$$x=\sum_n\langle x,x_n\rangle y_n.$$

اثبات. فرض کنید به ازای هر $x\in H$ داشته باشیم $x=\sum_n\langle x,y_n\rangle x_n$، طبق قضیه‌ی فوق پایه‌ی ریس $\{f_n\}$ برای فضای هیلبرت K که $K\subseteq H$ و تصویر P موجود است به طوری که $y_n=Pf_n$. چون $\sum_n|\langle x,x_n\rangle|^2<\infty$ می‌توان $T\in B(H,K)$ را به صورت زیر تعریف کرد

$$T(x)=\sum_n\langle x,x_n\rangle f_n,$$

در این صورت $PT\in B(H)$ و

$$PT(x)=P(\sum_n\langle x,x_n\rangle f_n)=\sum_n\langle x,x_n\rangle Pf_n=\sum_n\langle x,x_n\rangle y_n.$$

قرار می‌دهیم $S = PT$ بنابراین $S(x) = \sum_n \langle x, x_n\rangle y_n$.

$$\langle Sx, x\rangle = \langle \sum_n \langle x, x_n\rangle y_n, x\rangle = \sum_n \langle x, x_n\rangle\langle y_n, x\rangle, \qquad (*)$$

از طرفی

$$\begin{aligned}\|x\|^{۲} &= \langle x, x\rangle = \langle \sum_n \langle x, y_n\rangle x_n, x\rangle = \sum_n \langle x, y_n\rangle\langle x_n, x\rangle \\ &= \sum_n \overline{\langle y_n, x\rangle}\,\overline{\langle x, x_n\rangle} = \sum_n \overline{\langle y_n, x\rangle\langle x, x_n\rangle},\end{aligned}$$

حال با توجه به اینکه هر یک از عبارت‌های فوق حقیقی مقدار هستند، داریم

$$\langle x, x\rangle = \sum_n \overline{\langle y_n, x\rangle\langle x, x_n\rangle} = \sum_n \langle y_n, x\rangle\langle x, x_n\rangle = \sum_n \langle x, x_n\rangle\langle y_n, x\rangle, \qquad (**)$$

با مقایسه $(*)$ و $(**)$ به ازای هر $x \in H$ داریم $\langle Sx, x\rangle = \langle x, x\rangle = \langle Ix, x\rangle$ بنابراین $S = I$. در نتیجه

$$x = Ix = Sx = \sum_n \langle x, x_n\rangle y_n.$$

■

به منظور معرفی مفهوم ابر قاب‌ها به مفهوم مجزای قوی قاب‌ها نیازمندیم

تعریف ۱۲.۱. دنباله‌های بسل $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ را مجزای قوی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x \in H$ داشته باشیم

$$\sum_n \langle x, x_n\rangle y_n = ۰.$$

طبق گزاره‌ی فوق هرگاه دنباله‌های بسل $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ مجزای قوی باشند، داریم

$$\sum_n \langle x, y_n\rangle x_n = ۰.$$

تعریف ۱۳.۱. یک قاب $\{y_n\}$ دوگان $\{x_n\}$ نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x \in H$ داشته باشیم

$$x = \sum_n \langle x, y_n \rangle x_n,$$

یا طبق گزاره‌ی ۱۱.۱

$$x = \sum_n \langle x, x_n \rangle y_n.$$

برای هر قاب $\{x_n\}$ یک قاب دوگان $\{S^{-1}x_n\}$ وجود دارد که همراه با قاب $\{x_n\}$ فرمول بازسازی اعضای H را به صورت زیر میسر می‌کند

$$x = \sum_n \langle x, S^{-1}x_n \rangle x_n.$$

که در آن S یک عملگر خطی، مثبت، وارون پذیر و کراندار روی H است که به ازای هر $x \in H$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود

$$Sx = \sum_n \langle x, x_n \rangle x_n.$$

این عملگر S عملگر قاب برای $\{x_n\}$ نامیده می‌شود.

نتیجه ۱۴.۱ با توجه به تعریف S ، $\{S^{-1}x_n\}$ دوگان $\{x_n\}$ است که دوگان استاندارد (کانونی) نامیده می‌شود، زیرا

$$x = S(S^{-1}x) = \sum_n \langle S^{-1}x, x_n \rangle x_n = \sum_n \langle x, S^{-1}x_n \rangle x_n.$$

نتیجه ۱۵.۱ از تعریف S نتیجه می‌شود که $\{S^{-1/2}x_n\}$ قاب تنک نرمال شده (قاب پارسوال) برای H است.

اثبات. اگر R را عملگر قاب $\{S^{-۱/۲}x_n\}$ تعریف کنیم، داریم

$$\begin{aligned} R &: H \to H \\ R &(x) = \sum_n \langle x, S^{-۱/۲}x_n\rangle S^{-۱/۲}x_n. \end{aligned}$$

در این صورت

$$\begin{aligned} R(S^{-۱/۲}x) &= \sum_n \langle S^{-۱/۲}x, S^{-۱/۲}x_n\rangle S^{-۱/۲}x_n = S^{-۱/۲}\sum_n \langle S^{-۱/۲}x, S^{-۱/۲}x_n\rangle x_n \\ &= S^{-۱/۲}\sum_n \langle x, S^{-۱}x_n\rangle x_n = S^{-۱/۲}x. \end{aligned}$$

لذا $R = I$. بنابراین به ازای هر $x \in H$ داریم

$$\begin{aligned} \sum_n |\langle x, S^{-۱/۲}x_n\rangle|^۲ &= \sum_n \langle x, S^{-۱/۲}x_n\rangle\langle S^{-۱/۲}x_n, x\rangle = \langle \sum_n \langle x, S^{-۱/۲}x_n\rangle S^{-۱/۲}x_n, x\rangle \\ &= \langle R(x), x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^۲. \end{aligned}$$

همچنین

$$\sum_n \langle x, S^{-۱}x_n\rangle x_n = x = R(x) = \sum_n \langle x, S^{-۱/۲}x_n\rangle S^{-۱/۲}x_n.$$

■

نتیجه ۱۶.۱ عملگر یک قاب همانی است اگر و تنها اگر قاب تنک نرمال شده باشد.

توجه داریم که اگر یک قاب ریس نباشد، دوگان‌های متعدد نامتناهی خواهد داشت

لم ۱۷.۱ یک قاب دوگان منحصر بفرد دارد اگر و تنها اگر پایه‌ی ریس باشد.

اثبات. فرض کنید $\{x_n\}$ پایه‌ی ریس و $\{y_n\}$ دوگان $\{x_n\}$ باشد، ثابت می‌کنیم $\{y_n\}$ منحصربفرد است یعنی اگر $\{y_n\}$ و $\{y'_n\}$ هر دو دوگان $\{x_n\}$ باشند، آنگاه به ازای هر n داریم $y_n = y'_n$.

طبق تعریف دوگان به ازای هر $x \in H$ داریم $x = \sum_n \langle x, y_n\rangle x_n$ و $x = \sum_n \langle x, y'_n\rangle x_n$ و نیز طبق تعریف پایه به ازای هر $x \in H$ داریم $x = \sum_n \alpha_n x_n$. با مقایسه این سه رابطه و منحصر بفردی در تعریف پایه، به ازای هر n داریم

$$\alpha_n = \langle x, y_n\rangle = \langle x, y'_n\rangle \;\Rightarrow \langle\, x, y_n - y'_n\rangle = ۰,$$

چون این رابطه به ازای هر $x \in H$ برقرار است، به ازای $x = y_n - y'_n$ خواهیم داشت

$$\|y_n - y'_n\|^۲ = ۰ \;\Rightarrow\; y_n = y'_n.$$

برای اثبات برعکس فرض کنیم قاب $\{x_n\}$ یک دوگان منحصر بفرد مانند $\{y_n\}$ دارد، ثابت می‌کنیم $\{x_n\}$ یک پایه ریس است. چون $\{x_n\}$ قاب است کافیست ثابت کنیم پایه است، طبق تعریف دوگان به ازای هر $x \in H$ داریم $x = \sum_n \langle x, y_n\rangle x_n$ قرار می‌دهیم $\alpha_n = \langle x, y_n\rangle$ که چون $\{y_n\}$ منحصر بفرد است پس α_n نیز منحصر بفرد است، لذا بطور منحصر بفرد می‌توان نوشت $x = \sum_n \alpha_n x_n$. ■

تقریب متقارن که توسط فرانک و همکارانش مطرح شده به صورت زیر تعریف می‌شود

تعریف ۱.۱۸. فرض کنید $\{x_n\}$ یک قاب برای H باشد، قاب تنک نرمال شده (پارسوال) $\{y_n\}$ برای H تقریب متقارن $\{x_n\}$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر قاب تنک نرمال شده (پارسوال) $\{z_n\}$ از H داشته باشیم

$$\sum_n \|z_n - x_n\|^۲ \geq \sum_n \|y_n - x_n\|^۲. \qquad (۱.۲)$$

بسیاری از قاب‌های جالب بوسیله‌ی برخی (معمولا تعداد متناهی) از تابع‌های پنجره تحت عمل یک خانواده از عملگرهای یکانی تولید می‌شود، به عنوان مثال قاب‌های گابور و قاب‌های موجکی از این نوع هستند.

تعریف ۱.۱۹. فرض کنید $\mathbb{U}$ مجموعه‌ای شمارش پذیر از عملگرهای یکانی باشد، $\mathbb{U}$ را یک سیستم یکانی می‌نامیم هرگاه عملگر همانی عضو $\mathbb{U}$ باشد.

تعریف ۲۰.۱. فرض کنید $\mathbb{U}$ یک سیستم یکانی باشد و $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_N)$ که $\phi_j \in H$. اگر $\{U\phi_j : U \in \mathbb{U}, 1 \leq j \leq N\}$ یک قاب (قاب تنک نرمال شده) برای H باشد، آنگاه Φ یک مولد چند قاب (مولد چند قاب تنک نرمال شده) به طول N برای $\mathbb{U}$ نامیده می‌شود، بعبارت دیگر Φ یک مولد چند قاب برای $\mathbb{U}$ است هرگاه به ازای هر $x \in H$ داشته باشیم

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{j=1}^{N} \sum_{U \in \mathbb{U}} |\langle x, U\phi_j \rangle|^2 \leq B\|x\|^2.$$

و Φ یک مولد چند قاب تنک نرمال شده برای $\mathbb{U}$ است هرگاه به ازای هر $x \in H$ داشته باشیم

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{U \in \mathbb{U}} |\langle x, U\phi_j \rangle|^2.$$

بطور مشابه Φ یک مولد دنباله‌ی بسل برای $\mathbb{U}$ نامیده می‌شود هرگاه $\mathbb{U}\Phi$ یک دنباله‌ی بسل برای H باشد، یعنی به ازای هر $x \in H$ داشته باشیم

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{U \in \mathbb{U}} |\langle x, U\phi_j \rangle|^2 \leq B\|x\|^2.$$

اگر در تقریب قاب تنک نرمال شده خود را به قاب‌های القایی توسط یک سیستم یکانی محدود کنیم، تقریب متقارن انتخاب مناسب نیست زیرا اگر $\mathbb{U}$ شمارای نامتناهی باشد و قاب داده شده تنک نرمال شده نباشد سری در (۲.۱) نامتناهی خواهد بود، در این مورد از متریک طبیعی استفاده می‌کنیم، فرض کنید $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_N)$ یک مولد چند قاب برای سیستم یکانی $\mathbb{U}$ باشد، در این صورت چند قاب تنک نرمال شده $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ برای $\mathbb{U}$ بهترین تقریب چند قاب تنک نرمال شده برای Φ نامیده می‌شود هرگاه برای هر مولد چند قاب تنک نرمال شده $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ برای $\mathbb{U}$ داشته باشیم

$$\sum_{k=1}^{N} \|\phi_k - \psi_k\|^2 \leq \sum_{k=1}^{N} \|\phi_k - \xi_k\|^2.$$

اگر Ψ بهترین تقریب چند قاب تنک نرمال شده برای Φ باشد، آنگاه

$$\sum_{k=1}^{N} \|\phi_k - \psi_k\|^2 = \min\Big\{ \sum_{k=1}^{N} \|\phi_k - \xi_{\sigma(k)}\|^2 \quad : \quad \xi \ , \ \sigma \Big\}.$$