IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان:

روش تکراری تصویری متوالی برای حل سیستم معادلات خطی با ماتریس ضرایب مثبت معین متقارن $AX = B$

اساتید راهنما:

آقای دکتر سعید عباس بندی و آقای دکتر عزیزالله عزیزی

استاد مشاور:

آقای دکتر داوود رستمی

تحقیق ونگارش:

نورحبیب نظرخیل

اسفند ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

بسمه تعالی

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)
معاونت آموزشی دانشگاه- مدیریت تحصیلات تکمیلی

تعهد نامه اصالت پایان نامه

اینجانب زینب نظرفاضل دانشجوی رشته ریاضی کاربردی مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد بدین وسیله اصالت کلیه مطالب موجود در مباحث مطروحه در پایان نامه / تز تحصیلی خود، با عنوان [illegible] را تایید کرده، اعلام می نمایم که تمامی محتوی آن حاصل مطالعه ، پژوهش و تدوین خودم بوده و به هیچ وجه رونویسی از پایان نامه و یا هیچ اثر یا منبع دیگری، اعم از داخلی، خارجی و یا بین المللی ، نبوده و تعهد می نمایم در صورت اثبات عدم اصالت آن و یا احراز عدم صحت مفاد و یا لوازم این تعهد نامه در هر مرحله از مراحل منتهی به فارغ التحصیلی و یا پس از آن و یا تحصیل در مقاطع دیگر و یا اشتغال و ... دانشگاه حق دارد ضمن رد پایان نامه نسبت به لغو و ابطال مدرک تحصیلی مربوطه اقدام نماید. مضافاً اینکه کلیه مسئولیت ها و پیامدهای قانونی و یا خسارت وارده از هر حیث متوجه اینجانب می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو

امضاء و تاریخ

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)

معاونت آموزشی – مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۳۰

فرم تأییدیه‌ی هیأت داوران جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه/رساله

بدین وسیله گواهی میشود جلسه دفاعیه از پایان نامه کارشناسی ارشد/ نورحبیب نظرخیل.. دانشجوی رشته ریاضی کاربردی. گرایش انالیز عددی تحت عنوان: **روش تکراری تصویری برای حل دستگاه معادلات خطی با ماتریس ضرایب مثبت معین متقارن**.. در تاریخ ۳ / ۱۲ / ۱۳۹۰ در دانشگاه برگزار گردید و این پایان نامه با نمره ۱۸/۷۵ و درجه بسیار خوب... مورد تایید هیئت داوران قرار گرفت.

ردیف	سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه‌ی دانشگاهی	دانشگاه یا مؤسسه	امضا
۱	استاد راهنما	آقای دکتر سعید عباس بندی و آقای دکتر عزیزالله عزیزی	استاد تمام استاد یار	دانشگاه بین الملل امام خمینی (ره)	
۲	استاد مشاور	آقای دکتر داوود رستمی	دانشیار	دانشگاه بین الملل امام خمینی (ره)	
۳	داور خارج	آقای دکتر شهنام جوادی	استاد یار	دانشگاه تربیت معلم تهران	
۴	داور داخل	آقای دکتر علی آبکار	دانشیار	دانشگاه بین الملل امام خمینی (ره)	
۵	نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر هاشم حامدی وفا	استاد یار	دانشگاه بین الملل امام خمینی (ره)	

تقدیم به

روح پاک پدر بزرگوارم

مادر مهربانم

همه اساتید گروه ریاضی دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

همسر عزیزم

برادران و خواهران دلسوزم

چکیده

به طوری کلی برای حل دستگاه خطی $Ax=b$ روش های تکراری و روش های مستقیم مطرح اســت، روش های تکراری که معروف به ایستا و غیر ایستا می باشد کـه ایســتاماننــد روش ژاکــوبی، گــاوس-سایدل، SOR و ریچاردسون، همچنین روش های غیر ایستا که در زیر فضای کرایلف بررسی می شود مانند گرادیان مزدوج، روش متعامد سازی کامل، روش مانده مینیمال می باشند، بنا براین در ایــن اثــر یک روش تکراری جدید برای حل معادلات ماتریسی یا دستگاه خطی $AX=B$ که بنام روش تکراری تصویری متوالی معروف است ارائه می شوند، که در اینجا A, X, B در دستگاه فوق ماتریسها هستند، و ماتریس A یک ماتریس مثبت معین متقارن است، بر اســاس ایــن روش الگــوریتمی را پیشــنهاد و اثبات می شود که همگراست. بعلاوه تحلیل الگوریتم و نتایج عددی نشان دهنده مؤثربــودن ایــن روش می باشند.

واژه های کلیدی: معادلات ماتریسی، ماتریس مثبت معین متقـارن، یـک گـروه مـاتریس A-متعامد و روش تکراری تصویری متوالی.

تقدیر و تشکر

باسپاس از خداوند متعال بدین وسیله از تمام کسانیکه در تهیه وتدوین این پایان نامه مرا راهنمایی کرده اند تقدیر و تشکر می کنیم به ویژه از جناب آقای دکتر سعید عباس بندی که زحمات بسیاری کشیده و با راهنمایی های ارزنده خود موجب امتنان این جانب در اثر حاضر می باشد.

از جناب آقای دکتر داوود رستمی که قبول مشاوره با ارائه نظرات اصلاحی خود نقشی به سزا در ارایه هرچه بهتر آن داشته اند نیز کمال سپاسگزاری را به جای می آورم.

از جناب آقای دکتر عزیزالله عزیزی استاد راهنمای دوم و داوران گرامی نیز تشکر می کنم.

فهرست مندرجات

عنوان **صفحه**

فهرست نمودار ها

عنوان **صفحه**

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

مقدمه

مسأله حل معادلات خطی یکی ازبحث های حائزاهمیت در زمینه جبرخطی عددی در سال های اخیر بوده است. بسیاری از محققین این مسأله را با استفاده ازساختار ماتریسی(خطی) وتجزیه ماتریس به چند قسمت درنظرگرفته، نتایج خوب وپایدار رابه دست آورده اند. برای مثال Golub در [۱۳] و *Zhou* در [۲۵] حل این دستگاه معادلات را باتجزیه (SVD) در نظر گرفته اند. *Loan* و *Chu* در [۳] و [۴] آن را پیش بردند وباتعمیم روش تجزیه مقادیرمنفرد که ($GSVD$)، نامیده می شود، این معادلات راحل کردند. روش‌های فوق، روش مستقیم نامیده می شوند. با این روش ها محققین می توانند در مورد شرایط حل پذیری مسأله وبیان جواب مسأله برای حل دستگاه معادلات به صورت مستقیم بحث کنند. با این حال شرایط حل پذیری وعبارتی که جواب مسأله توسط آن بیان می شود اغلب اوقات خیلی پیچیده است، واین موضوع باعث ایجاد خطای بزرگی در محاسبات می شود. علاوه براین برخی از معادلات ماتریسی (خطی) بزرگ به هیچ عنوان باروش مستقیم حل نمی شود. برای نمونه بدست آوردن جواب متقارن مرکزی، انعکاسی ومتقارن دوگانه $AXB = C$ توسط روش مستقیم کار سخت است، برای این گونه دستگاه های معادلات خطی بزرگ که تنک می باشد از روش های تکراری استفاده می شود. که این روش های تکراری به دو بخش تقسیم بندی شده است، روش های تکراری ایستا و روش های تکراری غیر ایستا. روش های تکراری به مانند روش ژاکوبی، روش گاوس – سایدل، روش (SOR) و روش تکراری ریچارد سون به همین ترتیب روش های تکراری غیرایستا که در زیر فضای کرایلف بررسی می شود، مانند روش گرادیان مزدوج، روش متعامد سازی کلی، روش مانده‌ای باقیمانده مینیمال می باشد، و روش های تکراری دیگری هم وجود دارد که برای ماتریس‌های غیر مثبت معین متقارن استفاده می شود، آن را ذکر نمی کنیم. روش‌های تکراری قدمتی حدود ۱۹۰ سال دارند. اولین روش تکراری برای حل معادلات خطی منسوب به کارل فردریش گاوس[1] می باشد. روش کمترین مربعات گاوس، اورا به حل یک دستگاه خطی سوق داد که ابعاد ماتریس ضرایب آن، برای حل دستگاه، با استفاده از روش حذفی گاوس بسیار بزرگ بود. روش تکرار وی تحت عنوان،

Supplemententum theoriae Combination Observationum erroribus Minime

[1] Carl Friedrich Gauss

طی سال های ۱۸۱۹ تا ۱۸۲۲ میلادی تشریح گردید، که امروز به روش بلوکی گاوس – سایدل مشهور است. یک روش مشابه با روش تکرار گاوس توسط کارل گوستا وژاکوبی [۲] ارائه گردید. در سال ۱۸۴۷ فلیپ لودوریک سایدل[۳] شاگرد ژاکوبی، یک روش تکراری با استفاده از تقریبات پی درپی برای حل سیستم های خطی ناشی از روش تقریب کمترین مربعات، ارائه نمود. اما با پیدایش کامپیوترهای الکترونیکی، ثابت گردید که روش های تکراری که گاوس، ژاکوبی وسایدل مطرح نموده اند، برای دستگاه‌های معادلات خطی یا ابعاد بزرگ، دارای همگرایی بسیار کند هستند. بعد از صد سال رکود در مبحث روش های تکراری، سوت وال[۴] طی مقالاتی به منظور سرعت بخشیدن همگرایی روش گاوس – سایدل تغییرات را روی این روش امتحان نمود. در سال ۱۸۴۸ اشتین[۵] ورزنبرگ[۶] با اشاره به روش های تکراری گاوس – سایدل، ژاکوبی در مورد شرایط همگرایی این روش ها بحث نمود. در سال ۱۹۵۰ یانگ[۷] در [۳۰] موفق به یک پیشرفت غیر منتظره در مطالعه روش های تکراری گردید.تغییرات اعمال شده توسط ایشان در روش گاوس – سایدل منجر به یک شتاب قابل توجه در همگرایی این روش گردید که بعد ها به روش (SOR) مشهور گردید. سپس در سال ۱۹۵۸ کاهان [۱۶] قضایایی بنیادی در ارتباط به همگرایی روش تکراری (SOR) ارائه و اثبات نمود. در ادامه روش های تکراری غیر ایستا که در زیر فضای کرایلف می باشد، این روش های بر اساس تصویری بررسی می شود. که این روش های تکراری برای ماتریس مثبت معین انتخاب شده است، بنابراین چون در اینجا با ماتریس مثبت معین متقارن سروکار داریم از روش های تکراری دیگری که برای دستگاه غیر مثبت معین استفاده می شود صرف نظرمی کنیم. در این پایان نامه با تشریح روش تکراری تصویری‌متوالی برای حل دستگاه معادلات ماتریسی $AX=B$ می پردازیم. که ماتریس‌های A,B معلوم و X یک ماتریس مجهول می باشد. برای این فرم دستگاه ها یک روش جدید روش تکراری تصویری متوالی معرفی می کنیم. سیر مطالب به شرح زیر دنبال می شود. در فصل اول مروری بر تعاریف و مفاهیم جبری خطی عددی داریم: موضوعات ابتدائی وقضایی مورد نیاز برای فصل دوم و فصل سوم یاد آوری می شود. در فصل دوم روش های تکراری ایستا و غیرایستا که روش های تکراری ایستا عبارت است از روش تکراری ژاکوبی، روش تکراری گاوس – سایدل ، روش تکراری (SOR)، و روش تکراری ریچاردسون یاد آوری شده، به همین ترتیب روش های تکراری غیر ایستا که در زیر

[2] Carl Gustav Jacobi
[3] Phillip Ludwing Seidel
[4] Southwell
[5] Stein
[6] Rosenberg
[7] Young

فضای کرایلف قرار دارند: عبارت است از روش های تکراری گرادیان مزدوج (CG)، روش های تکـراری متعامدساز کامل (FOM)، و روش های تکراری مانـده‌ای مینیمـال ($GMRES$) مـی باشـند یـاد آوری کردیم. و همگرایی این روش های تکراری ایستا و غیر ایستا اورده شده اسـت. در فصـل سـوم مفهـوم روش تکراری تصویری متوالی برای حل معادلات ماتریسی $AX = B$، مطرح می گردد. برای این روش تکراری الگوریتم، تحلیل الگوریتم، روش پیدا کردن یک گـروه متعامدیکـه، اثبـات همگرایـی ، مثـال عددی آورده شده است.

در فصل چهارم نیز بر نامه های این پروژه با نرم افزار متلب ($MATLAB$) ارائه می گردد.

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل تعاریف, موضوعات وقضایایی راکه برای فصل های بعدی مورد نیاز می باشد را بیان می کنیم.

۱-۱ بردارها وفضای برداری

تعریف (۱-۱-۱) هرگاه $X=(x_1,...,x_n)^T$ و $Y=(y_1,...,y_n)^T$ دو بردار و α عدد حقیقی باشد تعریف می کنیم:

$$X+Y=(x_1+y_1,...,x_n+y_n)^T$$

$$\alpha X=(\alpha x_1,...,\alpha x_n)^T$$

در نتیجه با $X+Y\in R^n$ و $\alpha X\in R^n$، جمع بردار وضرب یک بردار در یک عدد حقیقی (اسکالر) راتعریف می کنیم به طوری که این دو عمل از قوانین تعویض پذیری وشرکت پذیری و پخش پذیری تبعیت می کنند و R^n، را به یک فضای برداری روی میدان حقیقی تبدیل می کنیم. حاصل ضرب داخلی (یا حاصلضرب اسکالر) X و Y را با $(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ ونُرم اقلیدسی X رابه صورت $\|X\|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}$، تعریف می کنیم. فضای برداری R^n با حاصلضرب داخلی و نرُم بالا را فضای اقلیدسی n بعدی می نامیم.

تعریف (۱-۱-۲) فرض کنیم H یک فضای برداری باشد، آنگاه H یک فضای ضرب داخلی است اگر تابع $H \times H \to R$ وجود داشته باشد که درشرط زیر صدق می کند:

الف) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y)$

ب) $(x, y) = \left(\overline{x, y}\right)$ ج) $(x, x) = \|x\|^2$

تعریف (۱-۱-۳) در یک فضای ضرب داخلی که درآن نـرُم القـا شـده $(x, x) = \|x\|^2$ توسط ضرب داخلی H، را به یک فضا برداری نرُم دار کامل تبدیل کند یک فضای هیلبرت نامیده می شود. منظور از فضای برداری نرُم دار کامل، فضای برداری نرُم دار است که در آن هر دنباله کوشی همگرا باشد.

۱-۱-۱ مفهوم اسپن[8]

اگر $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ یک مجموعه از بردارهای در فضـای بـرداری V باشـد و W مجموعـه کلـی ترکیبهای خطی از بردارها $v_1, v_2, ..., v_n$، باشد در این صورت W یـک اسـپن از بردارهـای $v_1, v_2, ..., v_n$، می باشد که به صورت زیر نمایش داده می شود.

$$W = span(S) \quad , \quad W = span\{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

$$W = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n : c_1, c_2, ..., c_n \in R\}$$

همچنین می توان گفت که بردارهای $v_1, v_2, ..., v_n$ زیر فضای W را اسپن می کنند.

۱-۱-۲ استقلال خطی و وابستگی خطی بردارها

بردار های $u_1, u_2, ..., u_n$ را مستقل خطی گویند، اگر معادله‌ای به شکل زیر،

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + ... + c_n u_n = 0$$

که در آن $c_1, c_2, ..., c_n$، اسکالر های ثابتی هستند فقط به ازای $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ برقرار باشد. در غیر این صورت بردارها $u_1, u_2, ..., u_n$ را وابسته خطی گویند.

[8] Span

نکته (۱-۱-۱) اگر بردارهای $u_1,u_2,...,u_n$ مستقل خطی بوده ولـی بردارهـای $u_1,u_2,...,u_{n+1}$، وابسـته خطی باشند، در این صورت می توان u_{n+1} را به صورت یک ترکیب خطی از بردارهای $u_1,u_2,...,u_n$ بیان کرد.

نکته (۱-۱-۲) شرایط لازم کافی برای مستقل خطی بودن بردارهای $u_1,u_2,...,u_n$ که هر یـک دارای n تایی عنصر هستند، آن است دترمینان ماتریس ضرایب $n\times n$ حاصل از رابطه بالا مخالف صفر باشد.

۱-۱-۳ مفهوم پایه وبُعد در فضای برداری

در یک فضای برداری مانند V، مجموعه بردارهای $u_1,u_2,...,u_n$ تشکیل یک پایه می دهنـد، اگـر دو شرط زیر را داشته باشند.

۱-آن فضای برداری را اسپن کنند $V=span\{u_1,u_2,...,u_n\}$

۲-بردار های $u_1,u_2,...,u_n$، مستقل خطی باشند.

برای یک فضای برداری مانند V بردارهای پایه منحصر بفرد نیستند ولی نمایش هر بـردار توسـط ایـن بردارها پایه منحصر بفرد است. تعداد بردار های پایه در یک فضای برداری مانند V را بُعد آن فضا مـی نامند و با نماد $\dim(V)$ نشان می دهند. اگر فضای برداری V شامل تعداد محدودی بردار پایه باشـد، آن را فضا با بُعد متناهی می نامیم در غیر این صورت به آن فضا با بُعد نا متناهی می گوییم به عبارتی بُعد یک فضا برابر با حد اکثر تعداد بردارها مستقل خطی در آن فضا است، بنابراین در یک فضا n بُعد حد اکثر بردارهای مستقل خطی n عدد می باشد.

نکته (۱-۱-۳) دریک فضای برداری n بعدی مانند V هر مجموعه از n بـردار مسـتقل خطـی مـی تواند تشکیل یک پایه بدهد.

نکته (۱-۱-۴) در فضای برداری n بعدی مانند V هر مجموعه بردارهـای مسـتقل خطـی در V را می توان به یک پایه تبدیل کرد.

۱-۲ زیر فضا[9]

تعریف (۱-۲-۱) فرض کنیم S فضای برداری بر روی میدان F باشد، یک زیر مجموعه W از S را یک زیر فضای S گوییم، هر گاه W با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالری روی S یک فضای برداری روی F با شد، برای ساده شدن تعریف فوق زیر را ارائه می دهیم.

قضیه (۱-۲-۱) زیر مجموعه غیر تهی W از فضای برداری S، یک زیر فضای S است؛ اگر وتنها اگر به ازای هر دو بردار α و β از W وهر اسکالر c از F بردار $c\alpha+\beta$ در W باشد.

اثبات: به [36] مراجعه شود.

تعریف (۱-۲-۲) دو زیر فضای S_1,S_2 از R^n متعامد [10] هستند، اگر برای هر $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$ داشته باشیم، $(s_1,s_2)=0$، دو زیر فضای متعامد S_1,S_2 را با $S_1 \perp S_2$ نماد گذاری می کنیم.

تعریف (۱-۲-۳) فرض کنیم X مجموعه ای از بردارهای فضای برداری S باشد زیر فضای تولید شده توسط X، عبارتست از W، اشتراک همه زیر فضاهای S که شامل X باشند. در صورتی که X مجموعه ای متناهی از بردارها باشد یعنی $X=\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ آنگاه W را زیرفضای تولید شده توسط بردار $\alpha_1,\alpha_2...,\alpha_n$ نیز می نامیم، به عبارت دیگر می توان گفت که زیر فضای تولید توسط X مجموعه تمام ترکیبات خطی بردارها X است که با $span\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ نمایش می دهیم.

تعریف (۱-۲-۴) دو زیر فضای S_1,S_2 از R^n را متمم می نامیم هرگاه:

الف) $S_1 \cap S_2 = \{0\}$

ب) $S_1 + S_2 = R^n$

تعریف (۱-۲-۵) متمم متعامد[11] یک زیر فضای $S \subseteq R^n$ به صورت

$S^{\perp}=\{y \in R^m : y^T x = 0,$ برای هر $x \in S\}$ تعریف شده است.

[9] Subspace
[10] Orthogonal
[11] Orthogonal complement

تعریف (۱-۲-۶) بردار n-تایی، $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ رادر R^n در نظر می گیریم، یک نـرُم بـرداری کـه بـا $\|X\|$ نماد گذاری شده است، تابعی است از R^n بتوی R که در خواص زیر صدق می کند.

الف) $\|X\|\geq 0$ به ازای هر $X\in R^n$

ب) $\|X\|=0$ اگر وفقط اگر $X=0$

ج) $\|\alpha X\|=|\alpha|\cdot\|X\|$ به ازای هر $\alpha\in R, X\in R^n$

د) $\|X+Y\|\leq\|X\|+\|Y\|$ به ازای هر $X,Y\in R^n$

قضـــیه (۱-۲-۱) فـرض کنـیم $\|\bullet\|,\|\bullet\|'$ دو نـرُم در فضـای بـرداری R^n باشـند. آنگـاه ثابـت هـای $C_2\geq C_1>0$ وجود دارند بطوری که

$$C_1\|X\|\leq\|X\|'\leq C_2\|X\|, \forall X\in R^n$$

اثبات : به [35] مراجعه شود.

۱-۳ دنباله‌ها

تعریف (۱-۳-۱) منظور از یک دنباله از اعداد حقیقی، تابعی مانند f از مجموعه تمام اعداد صحیح و مثبت N به مجموعه اعداد حقیقی است، هر گاه به ازای هر $f(n)=a_n, n\in N$ باشد، معمـول شـده است که دنباله f را با علامت $\{a_n\}$ یا گاهی به صورت $a_1,a_2,...,$ نشان مـی دهـیم ومقـادیر f یعنـی عنصرهای a_n را جمله‌های دنباله می نامیم.

تعریف (۱-۳-۲) فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی باشد، گـوئیم ایـن دنبالـه بـه عـدد a (بنام حد دنباله) همگرا است اگر به ازای هر $\varepsilon>0$ عدد صحیح مثبتی چون $N(\varepsilon)$ وجود داشته باشـد به طوری که هر $n\geq N(\varepsilon)$ نا مساوی $|a_n-a|<\varepsilon$ را ایجاب کند. منظور از نماد $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ یا $a_n\to a$ وقتیکه $n\to\infty$ این است که دنباله $\{a_n\}$ به a همگرا ست.