بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

گروه علمی آمار

عنوان پایان نامه:

بررسی رابطه بین توزیع پواسن وتوزیع گاما

نگارش:

نجم الدین گنج خانلو

استاد راهنما:

دکتر پرویز نصیری

استاد مشاور:

دکتر علی شادرخ

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته آمارریاضی

تابستان ۸۸

تقدیم به :

رهروان علم و دانش

و

تلاشگران عرصه سازندگی و توسعه

سپاسگزاری

پس از حمد و ثنای دانای هستی ، خداوند یکتا ، بر خود واجب می‌دانم که از زحمات کلیه اساتید گرانقدری که در طول دوران تحصیل از محضرشان بهره‌های فراوان برده‌ام ، قدردانی و سپاسگزاری نمایم.

از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر پرویز نصیری که در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه با راهنمایی‌های خود مرا یاری نمودند، تشکر می‌نمایم. همچنین از استاد مشاور فرهیخته‌ام جناب آقای دکتر علی شادرخ سپاسگزاری می‌نمایم و از درگاه پروردگار منان آرزوی توفیق روزافزون همگان را دارم.

چکیده

در این پایان‌نامه توزیع‌های پواسن و گاما و رابطه بین آنها بحث شده است. در فصل اول توزیع پواسن و فرایندهای پواسن مورد مطالعه قرار گرفته است، در فصل دوم ضمن معرفی توزیع گاما ، حالتهای خاص این توزیع نیز بحث خواهد شد. در فصل سوم خاصیت تقسیم‌پذیری نامتناهی توزیع‌های پواسن و گاما و همچنین کاربرد رابطه‌ی این دو توزیع در تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌های تعمیر شدنی بحث می‌شود. در فصل چهارم ، برآورد بیز پارامترهای مدل مارکف پنهان پواسن ارائه می‌شود و در انتها با استفاده از شبیه‌سازی برآورد بیز پارامتر توزیع پواسن ، مورد بحث واقع می‌شود.

واژه‌های کلیدی : توزیع پواسن تعمیم‌یافته ، توزیع پواسن بریده شده ، تابع گامای ناقص ، توزیع گامای دومتغیره ، خانواده نمایی ، تقسیم‌پذیری نامتناهی ، مارکف پنهان ، قابلیت اعتماد ، برآورد بیزی ، شبیه‌سازی.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

مقدمه ۱

فصل اول: آشنایی با توزیع پواسن ۵

۱-۱ توزیع پواسن ۶

۱-۲ توزیع پواسن تعمیم یافته.. ۸

۱-۳ تقریب توزیع دوجمله ای بوسیله توزیع پواسن ۸

۱-۴ نمودار توزیع پواسن ۱۰

۱-۵ فرآیند پواسن (توزیع پواسن اندیس گذاری شده با زمان) ۱۱

۱-۶ ویژگی‌های فرآیند پواسن ۱۳

۱-۷ برآورد پارامتر فرایند پواسن ۲۰

فصل دوم: توزیع گاما ۲۱

۲-۱ تابع گاما ۲۲

۲-۲ تقریب استرلینگ ۲۹

۲-۳ تابع چگالی و نمودار توزیع گاما.. ۳۰

۲-۴ حالتهای خاص توزیع گاما ۳۲

۲-۵ توزیع گامای دو متغیره ۳۴

فصل سوم : بررسی رابطه بین توزیع‌های پواسن و گاما ۳۶

۳-۱ بررسی توزیع‌های پواسن و گاما در خانواده کوپمن،پیتمن و دارمویس ۳۷
۳-۲ خاصیت تقسیم‌پذیری نامتناهی توزیع پواسن و گاما ۴۰
۳-۳ توزیع فواصل زمانی پیشامدهای پواسن ۴۳

عنوان **صفحه**

۳-۳-۱ مثالهای کاربردی ۵۵
۳-۴ استفاده از رابطه توزیع پواسن و گاما در تحلیل قابلیت اعتماد سیستمهای
تعمیر شدنی ۶۰
۳-۷ رابطه پواسن و گاما در مدلهای Shot-noise ۶۱
فصل چهارم : برآورد بیز پارامترهای مدل مارکف پنهان پواسن ۶۴
۴-۱ توزیع پیشین و توزیع پسین ۶۴
۴-۲ تابع زیان ۶۶
۴-۳ توزیع آمیخته پواسن و گاما ۶۸
۴-۴ مدل مارکف پنهان ۷۰
۴-۵ مدل مارکف پنهان پواسن ۷۷
۴-۶ مقایسه برآوردگرها... ۷۹
۴-۶-۱ تفسیر نتایج حاصل از نمودارها ۸۴
۴-۷ مقایسه نموداری توزیع پواسن و گاما با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده ۸۵
پیوست الف : اثبات قضایا ۸۷
پیوست ب : برنامه نمودار شکل(۳-۴) در Matlab ۹۲
پیوست ج : الگوریتم یافتن $\hat{\Omega}_n\big|_{x_1=0}$ و مقادیر H_n ۹۲
پیوست د : برنامه‌نویسی با Splus ۹۴
منابع و مآخذ.. ۹۵

چکیده:

در این پایان‌نامه توزیع‌های پواسن و گاما و رابطه بین آنها بحث شده است. در فصل اول توزیع پواسن و فرایندهای پواسن مورد مطالعه قرار گرفته است، در فصل دوم ضمن معرفی توزیع گاما ، حالتهای خاص این توزیع نیز بحث خواهد شد. در فصل سوم خاصیت تقسیم‌پذیری نامتناهی توزیع‌های پواسن و گاما و همچنین کاربرد رابطه‌ی این دو توزیع در تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌های تعمیر شدنی بحث می‌شود. در فصل چهارم ، برآورد بیز پارامترهای مدل مارکف پنهان پواسن ارائه می‌شود و در انتها با استفاده از شبیه-سازی برآورد بیز پارامتر توزیع پواسن ، مورد بحث واقع می‌شود.

واژه‌های کلیدی : توزیع پواسن تعمیم‌یافته ، توزیع پواسن بریده شده ، تابع گامای ناقص ، توزیع گامای دومتغیره ، خانواده نمایی ، تقسیم‌پذیری نامتناهی ، مارکف پنهان ، قابلیت اعتماد ، برآورد بیزی ، شبیه‌سازی.

Abstract

In this thesis, poisson and gamma distributions and relation between them is discussed. In chapter 1 poisson distribution and poisson processes is studied. In chapter 2, nomination of gamma distribution is studied. In chapter 3, property of infinit divisibility of poisson and gamma distributions and also application of their relation reliability analysis of repairable systems is discussed. In chapter 4, bayes estimation of parameters poisson hidden markov models is presented and finally, bayes estimation of parameter of poisson distribution is discussed by using simulation.

Key words : Generalized poisson distribution, Truncated poisson distribution, Exponential family, Infinite divisibility, Hidden markov model, reliability, Bayesian method, simulation .

مقدمه

جامعه ما از جوامع در حال توسعه محسوب می‌شود و هنوز درگیر مسایلی مانند ترافیک ، قوانین نه چندان منظم اقتصادی و قضایی و ... می‌باشد که حل هر یک از این مسایل مستلزم آگاهی از علم آمار و داشتن مهارت کافی در بکارگیری این علم ، خصوصا توزیع‌های آماری که در زمینه‌های یاد شده کاربرد فراوان دارد، می‌باشد. تقریبا همه قوانین موجود در هر رخداد یا پدیده ای که در جهان مادی صورت می‌گیرد را می‌توان بصورت قالبی از توزیع‌های احتمال درآورد. شبیه‌سازی حرکت شهاب سنگها و اجرام آسمانی و برخورد آنها با زمین یا با سیارات دیگر و برنامه‌ریزی در این زمینه، شیوه شیوع بیماریها وچگونگی پیشگیری و مبارزه با آن و ... مثالهایی از این دست می‌باشند. لذا پرداختن هر چه بیشتر به این مقوله مهم در جامعه ما امری ضروری است تا بهتر و راحت‌تر بتوان به نظم موجود در پدیده‌ها پی‌برد و از آن برای راحت‌تر شدن زندگی افراد جامعه بهره‌مند گردید.

هدف اصلی محقق، اشاره به یکی از زیبایی‌های علم آمار می‌باشد. از اهداف دیگر می‌توان به کاربردی‌تر نمودن توزیع‌های آماری در حل مسایل کنونی جامعه از جمله ترافیک ، قضاوت و امور ورزشی اشاره نمود. از جمله این توزیع‌های احتمال که در این پایان نامه به آن پرداخته شده است ، توزیع‌های پواسن و گاما می‌باشد که دارای خواص منحصر بفرد جالبی می باشند. به علت دامنه وسیع رشته آمار ، در دوره کارشناسی و حتی در مقطع کارشناسی ارشد مجال بحث عمیق و جدی درباره این دو توزیع وجود نداشته است. بنابراین لازم است تا با ارائه انواع مختلف توزیع پواسن (کلاسیک ، مرکب ، غیر همگن ، نقطه‌ای و بریده شده) و همچنین تشریح حالتهای مختلف توزیع گاما (نمایی ، کای دو ، ارلانگ و گامای تعمیم یافته) و نیز بررسی رابطه موجود میان این دو توزیع ، بتوان در حل مسایل یاد شده ، بهره مند شد.

توزیع گاما توزیعی پیوسته و توزیع پواسن گسسته می‌باشد. با این حال این دو توزیع رابطه جالبی با هم دارند که بررسی آن حائز اهمیت فراوان می‌باشد. زیرا همانطور که نشان داده خواهد شد ، با بکار

بردن این رابطه حل بسیاری از مسائل واقعی بسیار آسان می باشد و محاسبه احتمال رخداد یا عدم رخداد بسیاری از مسائل ، فوق العاده راحت خواهد بود. جهت آشنایی اجمالی ، اشاره‌ای به تاریخچه وچگونگی پیدایش این توزیع‌ها می‌شود. پواسن کلمه فرانسوی است که در لغت به معنای ماهی می-باشد. و دلیل نام‌گذاری توزیع پواسن به این نام ، به خاطر نام شخص سیمون دنیس پواسن[۱] است . وی شخصی است که برای اولین بار این مفهوم را معرفی نمود. پواسن (۱۷۸۱-۱۸۴۰) ریاضی‌دان و فیزیک‌دان معروف فرانسوی ، به عنوان اولین کاربرد توزیع پواسن ، از آن برای تشریح تعداد مرگ و میرهایی که توسط ضربات سم اسبان در ارتش پروس به وقوع پیوسته بود ، استفاده کرد و آن را در کتابی معرفی نمود که کاربرد نظریه احتمال را در دعاوی حقوقی محاکمه مجرمین و مسائل مشابه مطرح می‌نمود. این کتاب در سال ۱۸۳۷ منتشر گردید.

توزیع پواسن کاربردهای مختلف و متنوعی دارد. یکی از این کاربردها نظریه‌ی گردش ترافیک می‌باشد که می‌تواند برای تعیین تعداد اتومبیل‌ها در یک طول ثابت از جاده یا تعیین تعداد اتومبیلهای گذرنده از یک نقطه در یک بازه ی زمانی خاص ، مورد استفاده قرار گیرد. این می‌تواند به حل مشکلات ترافیکی کمک کند، مثلا برای تعیین اینکه آیا چراغهای راهنمایی برای یک قسمت خاص از جاده برای کنترل جریان ترافیک مورد نیاز هستند یا خیر.

توزیع گاما از توزیع‌های بسیار سودمند برای تحلیل داده‌های طول عمر می‌باشد. بررسی مشخصه-های اقتصادی بوسیله یک توزیع مناسب نیز از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مشخصه‌های اقتصادی کمّی مانند درآمد ، مقادیر مثبت را اختیار می‌کنند و برای بررسی آنها لازم است از توزیع‌ها برای متغیرهایی که مقادیر مثبت اختیار می‌کنند، استفاده شود. در این رابطه توزیع گاما به عنوان خانواده‌ای از این گونه توزیع‌ها با انعطاف‌پذیری بالا (به دلیل داشتن دو پارامتر) برای بررسی این‌گونه مشخصه‌های اقتصادی به کار می‌روند.

۱.Simon denis poisson

از حالتهای خاص توزیع گاما ، توزیع ارلانگ می‌باشد. که دارای کاربردهای فراوانی است. این توزیع اولین بار توسط اگنر کراروپ ارلانگ ، دانشمند دانمارکی ، زمانی که بر روی تعداد تلفن‌های همزمان به یک اپراتور در ایستگاه سوئیچ مطالعه می‌کرد پیشنهاد شد.

از توزیع گاما در موارد دیگر مانند گردش اقلام در فرآیندهای تولید و توزیع کالا، لود شدن وب سرورها و حالات بسیار زیاد و متنوعی از تبادلات ارتباطی و همچنین به عنوان مدلی در آب و هوا شناسی که مدلی کارآمد برای میزان بارش باران می‌باشد یا مواردی از قبیل خدمات مالی، مثلا به عنوان مدلی برای مطالبات بیمه‌ای یا قراردادهای وام دهی و کلا مواردی در احتمال‌های مربوط به موفقیت و شکست در محاسبات ریسک‌پذیر بکار برده می‌شود. توزیع پواسن و توزیع گاما هر دو عضو خانواده‌ی توزیع‌های نمایی‌اند. هردو تقسیم‌پذیر نامتناهی‌اند. در برآورد بیزی توزیع گاما ، توزیع پیشین مزدوج توزیع پواسن است. با استفاده از رابطه بیز این دو توزیع می‌توان پارامترهای مدل مارکف پنهان پواسن را برآورد نمود. توزیع گاما ، توزیع زمان انتظار تا وقوع n‌امین پیشامد توزیع پواسن است و از دیگر کاربردهای توزیع پواسن و گاما می‌توان به موارد ذیل اشاره نمود :

امور ورزشی: محاسبه احتمال به ثمر رسیدن گل در وقت اضافه‌ی یک بازی فوتبال .

صنعت: یافتن قابلیت اعتبار ماشین آلات با نگاه کردن به تعداد از کارافتادگی‌ها در یک دوره‌ی داده شده.

کشاورزی و جانورشناسی: گونه‌های گیاهان و جانوران هر منطقه از توزیع پواسن پیروی می‌کند.

زیست شناسی : نمونه‌گیری از باکتری‌ها در یک حجم داده شده و تخمین ارقام در سری‌های رقیق سازی شده.

پزشکی : برای شمارش تعداد قربانی‌های یک بیماری خاص مثلا تعیین تعداد مرگ و میرهای ناشی از مالاریا در یک سال، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مخابرات : تعداد تماس‌ها در یک بازه‌ی زمانی داده شده که می‌تواند مثلا برای تعیین تعداد خطوط آزاد بکار رود.

رده بندی‌ها و صفوف انتظار : صف‌های انتظار پزشکان، بیمارستانها ، جاده‌ها، ترافیک هوایی .

علم هوا فضا : برای تعیین تعداد ستارگان در حجم مورد نظر از کهکشان‌ها.

در این پایان نامه ، در فصل اول ضمن آشنایی با توزیع پواسن ، فرایند پواسن و برآورد پارامتر آن محاسبه می‌شود. در فصل دوم ، حالتهای مختلف توزیع گاما و همچنین توزیع گامای تعمیم‌یافته و توزیع گامای دومتغیره مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل سوم ، رابطه بین توزیع پواسن و گاما و خواص مشترک این دو توزیع در خانواده کوپمن ، پیتمن و دارمویس مورد بررسی قرار می‌گیرد. خاصیت تقسیم‌پذیری نامتناهی دو توزیع و کاربرد توزیع پواسن و گاما برای تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌های تعمیر شدنی و رابطه بین فرایند پواسن نقطه‌ای و توزیع گاما و توزیع گامای تعمیم یافته نیز در همین فصل مورد بحث واقع می‌شود. بالاخره در فصل چهارم رابطه‌ی بیز توزیع پواسن و گاما و توزیع آمیخته‌ی این دو توزیع و همچنین برآورد پارامترهای مدل مارکف پنهان ، بحث خواهد شد. در نهایت با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده ، برآورد ماکزیمم درستنمایی و برآورد بیز پارامتر توزیع پواسن ، با هم مقایسه می‌شود.

فصل اول

آشنایی با توزیع پواسن

فصل اول

آشنایی با توزیع پواسن

(۱-۱) توزیع پواسن

آزمایشی که تعداد موفقیت‌ها در یک فاصله زمانی یا ناحیه مشخص را به دست دهد یک آزمایش پواسن نامیده می شود. این فاصله زمانی می‌تواند هر فاصله زمانی مانند ثانیه ، دقیقه و... باشد و ناحیه مشخص شده نیز می‌تواند یک فاصله خطی یا مساحت یا حجم یا ... باشد. اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود، آنگاه X را یک متغیر تصادفی پواسن گویند.

X = تعداد موفقیت‌ها در یک فاصله زمانی یا ناحیه مشخص

یک آزمایش پواسن بایستی دارای خواص زیر باشد:

۱. تعداد موفقیت‌هایی که در یک فاصله زمانی یا ناحیه مشخص اتفاق می افتد از تعداد موفقیت‌هایی که در یک فاصله زمانی دیگر یا ناحیه دیگر اتفاق می افتد مستقل باشد.

۲. احتمال اینکه یک موفقیت در یک فاصله زمانی کوتاه یا ناحیه کوچک روی دهد متناسب با طول فاصله زمانی یا ناحیه مشخص شده باشد و بستگی به تعداد موفقیتها در خارج از فاصله زمانی یا ناحیه نداشته باشد.

۳. احتمال روی دادن بیش از یک موفقیت در یک فاصله زمانی کوتاه یا ناحیه مشخص کوچک ، قابل صرفنظر باشد.

۴. شانس دو یا چند موفقیت همزمان در یک بازه زمانی یا یک ناحیه را بتوان صفر فرض کرد.

بعضی از مثالهایی که در آن متغیر تصادفی از قاعده‌ی احتمال پواسن تبعیت می‌کند عبارتند از :

۱. تعداد گل‌هایی که در یک بازی فوتبال به ثمر می‌رسد.

۲. تعداد زدگی‌ها در یک متر مربع پارچه.

۳. تعداد باکتریها در یک حجم مورد نظر از نوعی سرم.

اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد موفقیت‌ها در یک فاصله زمانی یا ناحیه مشخص باشد آنگاه $X \sim P(\lambda)$ و

$$f_X(x) = P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad , \quad x = ۰,۱,۲,K$$

امید و واریانس توزیع پواسن بترتیب عبارتند از $E(X) = \lambda$ و $Var(X) = \lambda$. و ضریب تغییرات این توزیع $\frac{۱}{\sqrt{\lambda}}$ است. برای یافتن ماکزیمم توزیع پواسن قرار می‌دهیم :

$$\frac{dp(\lambda)}{dx} = \frac{e^{-\lambda} x(\gamma - H_x + \ln\lambda)}{x!} = ۰$$

که در آن ، γ ثابت اویلر- ماشرونی[1] و H_n یک عدد هارمونی است ، رابطه فوق به معادله غیر جبری $\gamma - H_x + \ln\lambda = ۰$ هدایت می‌شود که با حل آن مد این توزیع برابر می شود با :

$\lfloor\lambda\rfloor = \lambda$ نزدیک ترین عدد صحیح به.

و

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k} - \ln n\right) = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) \approx ۰/۵۷۷۲۱۵۶۶۴۹۰۱۵۳۲۸۶...$$

چولگی و کشیدگی آن به ترتیب برابر است با $\lambda^{-\frac{۱}{۲}}$ و $\lambda^{-۱}$. تابع توزیع تجمعی و تابع مولد گشتاور و تابع مولد احتمال و تابع مشخصه[۲] توزیع پواسن به ترتیب برابر است با :

$$F(x) = p(X \le x) = \sum_{t=۰}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^t}{t!} = \frac{\Gamma(x+۱,\lambda)}{x!}$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=۰}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} e^{tx} = \exp(\lambda(e^t - ۱))$$

---

[1].Euler-Mascheroni constant

[۲].Characteristic Function

$$p_X(t)=E(X^t)=\exp(\lambda(t-۱))$$
$$\varphi_X(t)=E(e^{itX})=\exp(\lambda(e^{it}-۱))$$

آنتروپی توزیع پواسن $\lambda[۱-\ln(\lambda)]+e^{-\lambda}\sum_{x=۰}^{\infty}\frac{\lambda^x \ln(x!)}{x!}$ می‌باشد. آنتروپی متغیر تصادفی X بصورت $E(-\log f(x))$ تعریف می‌شود که در آن $f(x)$ تابع چگالی احتمال یا تابع احتمال متغیر تصادفی است. از کاربردهای آنتروپی آزمون نیکویی برازش بر مبنای آن است.

(۱-۲) توزیع پواسن تعمیم‌یافته

فرم تعمیم یافته‌ی توزیع پواسن بصورت زیر می‌باشد:

$$f_b(N)=\frac{\overline{N}}{N!}(۱-b)\left[\overline{N}(۱-b)+Nb\right]^{N-۱}e^{\overline{N}(۱-b)-Nb} \quad , N=۰,۱,۲,... \qquad (۱-۲-۱)$$

که در آن N تعداد ستاره‌ها در حجم مورد نظر V می‌باشد. و $۰\le b\le ۱$ ، نسبت انرژی جاذبه به انرژی گریز از مرکز دورانی است. فرم تعمیم یافته‌ی توزیع پواسن در مدل saslow استفاده می‌شود که مدل مشاهده دسته‌ای از کهکشان‌ها در جهان است. به ازای $b=۰$ رابطه (۱-۲-۱) به صورت زیر در می‌آید.

$$f_۰(N)=\frac{e^{-\overline{N}}\overline{N}^N}{N!}$$

که فرم توزیع پواسن با پارامتر $\lambda=\overline{N}$ است . و به ازای $b=۱$ ، داریم $f_۱(N)=۰$.

(۱-۳)تقریب توزیع دوجمله‌ای به وسیله توزیع پواسن

در شرایط خاص $(p<۰/۱, n>۵۰)$ می‌توان از توزیع پواسن بعنوان تقریبی برای توزیع دوجمله‌ای استفاده نمود.

فرض کنید X یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای (n,p) باشد و $np=\lambda$ آنگاه :

$$P(X=x)=\frac{n!}{(n-x)!x!}P^x(۱-P)^{n-x}$$

$$=\frac{n!}{(n-x)!x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$=\frac{n(n-۱)....(n-x+۱)}{n^x}\frac{\lambda^x}{x!}\frac{\left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

برای n های بزرگ داریم :

$$\left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^x=۱ \qquad \left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cong e^{-\lambda} \qquad \frac{n(n-۱)....(n-i+۱)}{n^x}\cong ۱$$

برای نشان دادن دقت این تقریب فرض کنید، یک کارخانه توپهای پارچه را در بسته‌های ۵۰۰ تایی بسته‌بندی می‌کند. احتمال آنکه یک توپ پارچه معیوب باشد، ۰٫۰۰۲ می‌باشد. احتمال اینکه یک بسته دارای دو توپ پارچه معیوب باشد با استفاده از توزیع دوجمله‌ای برابر است با

$$X \sim Bin(۵۰۰,۰/۰۰۲)$$

$$p(X=r)=C_r^n p^r(۱-p)^{n-r}=p(X=۲)$$

$$=C_۲^{۵۰۰}(۰/۰۰۲)^۲(۰/۹۹۸)^{۴۹۸}=۰/۱۸۴۱۲۳۸\cong ۰/۱۸$$

با استفاده از توزیع پواسن داریم:

$$\lambda=np=(۵۰۰)(۰/۰۰۲)=۱$$

$$p(X=۲)=\frac{e^{-۱}۱^۲}{۲!}=۰/۱۸۳۹۳۹۷\cong ۰/۱۸$$

این توزیع حتی برای وقتی که آزمایشهای ساده مستقل نبوده و وابستگی ضعیفی داشته باشند، نیز توزیع تقریبی مناسبی است . برای مثال به مسأله انطباق توجه می‌کنیم که در کتاب مبانی احتمال شادون راس [۲] آمده است. وقتی که n مرد به تصادف کلاه‌هایشان را از مجموعه‌ای شامل یک کلاه برای هر نفر انتخاب می‌کنند، می‌توانیم انتخاب تصادفی را نتیجه‌ای از n آزمایش ساده در نظر بگیریم که نتیجه آزمایش ساده iام $(i=۱,۲,...,n)$ موفقیت است هر گاه فرد iام کلاه خود را انتخاب کند. با تعریف پیشامدهای E_i، $(i=۱,۲,...,n)$ به صورت زیر داریم :

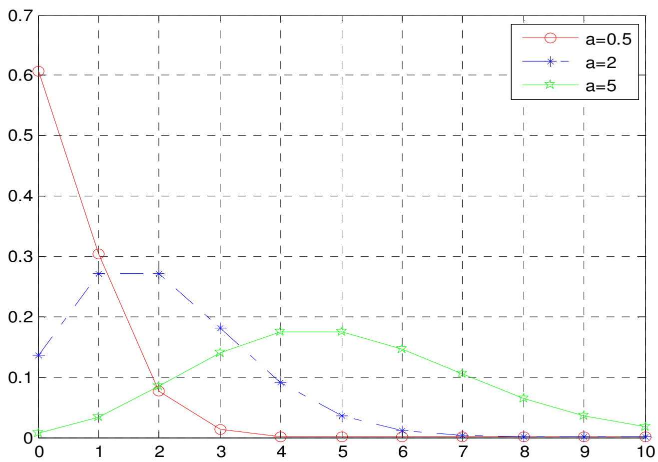
$$E_i=\{\text{آزمایش ساده } i \text{ ام یک موفیت است}\}$$

$$p(E_i)=\frac{۱}{n} \quad , \quad p(E_i|E_j)=\frac{۱}{n-۱} \quad , \quad i\neq j$$

بنابراین مشاهده می‌شود که اگر چه آزمایش‌های ساده‌ی E_i $(i=۱,۲,...,n)$ مستقل نیستند ولی وابستگی آنها برای n بزرگ بسیار ضعیف است. براین اساس منطقی به نظر می‌رسد که انتظار داشته باشیم تا تعداد موفقیت‌ها به طور تقریبی دارای توزیع پواسن با پارامتر $n\times\frac{۱}{n}=۱$ باشد.

(۱-۴) نمودار توزیع پواسن

نمودار توزیع پواسن برای پارامترهای $\lambda=۵,۲,۰/۵$ به صورت زیر رسم شده است.



شکل(۱-۱) نمودار توزیع پواسن به ازای $a=\lambda=۰/۵\,,\,۲\,,\,۵$

لازم به ذکر است که نمودار فقط در نقاط پر رنگ معنا دارد و وصل کردن نقاط به معنای پیوستگی نیست. و صرفا بدلیل آن است که راحت‌تر بتوان این نمودار را با نمودار تابع چگالی گاما مقایسه نمود.

(۱–۵) فرآیند پواسن[1] (توزیع پواسن اندیس گذاری شده با زمان)

فرآیند زمان پیوسته‌ای را در نظر بگیرید که در آن تعداد کل پیشامدها تا زمان t ی مورد نظر است . چنین فرآیندی را فرآیند شمارشی گویند . تعداد پیشامدها در بازه‌ی معینی را نمو (یا تغییر) فرآیند در بازه‌ی زمانی می‌نامند.

(۱–۵–۱) تعریف. فرایند شمارشی $\{N(t), t \geq ۰\}$ را فرایند پواسن گویند، هرگاه:

الف) $N(۰) = ۰$

ب) $\{N(t), t \geq ۰\}$ دارای نموهای مستقل باشد.

ج) تعداد پیشامدهایی که در هر فاصله‌ای به طول $\mathbf{t}$ رخ می‌دهند دارای توزیع پواسن با میانگین λt باشد. یعنی به ازای هر $h \geq ۰$ و t داشته باشیم:

$$pr[N(t+h) - N(h) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

توجه کنید که توزیع تعداد پیشامدها در بازه $[h$ و $t+h)$ مستقل از زمان h است. یعنی

$$\begin{aligned} pr[N(t+h) - N(h) = n] &= pr[N(t) = n] \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = ۰, ۱, ۲, \ldots \end{aligned} \qquad (۱–۵–۱)$$

این را خاصیت دارا بودن نموهای ایستا نامند و گویند فرایند دارای نموهای ایستاست.

---

[1] Poisson process