که همـــانا

زیبنده هر دفتـــر

و آغاز و پایان هر کلامی است ...

دانشـــــگاه یـــزد
دانشــکده ریاضی
گـروه ریاضی مـحض

پایان‌نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشــد
آنالیــز ریاضی

کاربــردهای قضایای نقطه ثابت در نظریه زیرفضاهای پــایا

استاد راهنما : دکتر سید محمد مشتاقیون

استاد مشاور : دکتر سید محمد صادق مدرس مصدق

پژوهش و نگارش : علیــر ضا زارع

مهـــرماه ۱۳۹۲

تقدیم به :

همســــر

و فرزندانم

سپاس‌نامه

با سپاس به درگاه ایزد منان که رب الارباب است و مربی مطلق همه موجودات، بدان‌گونه که هر تربیت و تعلیم آدمی، تنها سایه‌ای کم‌رنگ از ذات مقدس اوست، او که اول معلم است (عَــلَمَ آدم اَلاســماءِ کُلّــها) و تعلیم و تربیتش را بر آن داشت تا به آدمی سجده کنند.

با سپاس از سرور گرامی و استـاد ارجمند، جناب آقای

دکتــر سید محمد مشتاقیـون

که با تلاش و کوشش وصف‌ناپذیر موجب شدند که این پژوهش به سرانجام برسد. به این وسیله مراتب تقدیر و تشکر خود را از زحمات بی‌شائبه ایشان اعلام نموده و از خداوند سبحان توفیق روزافزون مسئلت دارم و نیز تشکر و قدردانی از استاد معظم، جناب آقای

دکتــر سید محمد صادق مدرس مصدق

که با راهنمایی‌های عالمانه خود راه را برای من هموار ساختند. همچنین از اساتید معزز، جناب آقای **دکتر قاسم بریدلقمانی** و جناب آقای **دکتر حسین جوانشیری** به عنوان هیات داوران که قبول زحمت فرموده و با انتقادات و پیشنهادات خود مسیر رو به پیشرفت را برای من هموار ساختند، کمال تشکر و قدردانی دارم. همچنین از نماینده محترم تحصیلات تکمیلی نیز تشکر می‌شود.

چکیده

وجود زیرفضاهای پـایا، نسبت به خانواده‌ای از عملگرهای کراندار روی فضای هیلبرت جدائی‌پذیر با بعد نامتناهی، را مسئله زیرفضاهای پـایا گوییم که یک مسئله بـاز در نظریه عملگرها می‌باشـد. تلاش برای حل این مسئله، نظریه عملگرها را در بحث وجود زیرفضاهای پـایا به چالـش و تکاپو درآورده است. در این راستا، قضایای نقطه ثابت، به عنوان یک ابزار کلیدی در این تلاش نقش به‌سزائی بر عهده داشته است. اهمیت این قضایا از دیرباز تا امروز، در کاربردهایش می‌باشـد که یکی از کاربردهای آن، حل برخی مسائل پیرامون بحث وجود زیرفضاهای پـایا است که محتوای این پژوهش، بیان این کاربرد است.

در این تحقیق روی آن قسمت‌هایی از سیر تکاملی حل مسئله مذکور، متمرکز می‌شویم که در بیان راه‌کار، مستقیماً از قضایای نقطه ثابت استفاده شده است. اثبات وجود زیرفضاهای پـایا تحت هر عضو یک زیرجبر از جبر عملگرهای کراندار روی فضای باناخ که شامل عملگرهای فشرده می‌باشد، یکی از این موارد است که به آن می‌پردازیم. سپس روی وجود زیرفضای پـایا تحت عملگرهای اساساً نرمال تمرکز می‌کنیم. در ادامه قضیه برنساید که دلالت بر وجود زیرفضاهای پـایا غیربدیهی تحت یک عملگر کراندار روی فضای باناخ با بعد متناهی دارد را به فضاهای هیلبرت، باناخ و شبکه باناخ تعمیم می‌دهیم. همچنین می‌بینیم که حل معادله عملگری ریکاتی ارتباط مستقیم با وجود زیرفضاهای پایا تحت عملگرهای ماتریسی روی فضای کرین دارد که در این تحقیق به آن نیز پرداخته‌ایم.

واژه های کلیدی: زیرفضاهای پایا، جبر انتقالی، جبـر موضعی، فضای کرین، معادله ریکاتی، قضیه نقطه ثابت.

فهرست مطالب

مقدمه

بیش از نیم قرن است که در نظریه عملگرها مسئله‌ای برجسته، مشهور و چالش‌برانگیز، به نام «**مسئله زیرفضاهای پایا**» وجود دارد. این مسئله هنوز به‌عنوان مسئله باز شناخته می‌شود. در جریان حل این مسئله، در نظریه عملگرها دستاوردهای قابل توجهی، حتی با فاصله زمانی طولانی داشته‌ایم ولی با امید و ناامیدی در حل این مسئله، هنوز این مسئله، باز مانده‌است.

در این تحقیق سعی داریم راه‌کارهای اولیه که برای حل حالات خاص مسئله بیان‌شده را بیاوریم و خود را، در این مسیـر، سریع به نقطه‌ای برسانیم که لومونوزوف[1] برای حل نوع خاصی از این مسئله، قضیه نقطه ثابت شودر[2] را به عنوان یک ابزار استفاده می‌نماید به عبارتی او با این ایده، یک ابزار مهم در حل این مسئله را ارائه می‌دهد.

در این راستـا ابتدا تاریخچه‌ای از سیر تکاملی حل مسئله بیان می‌نماییم. سپس در فصل اول همراه با بیان مفاهیم اولیـه، به ذکر مبانی زیرساخت فصل‌های آتی، مشتمل بر خواص جبرهای موضعی و انتقالی، ساختار فضای کرین و شبکه باناخ و قضایای نقطه ثابت می‌پردازیم.

در فصل دوم، کار لومونوزوف به‌عنوان بنیان‌گذار ایده استفاده از قضیه نقطه ثابت در مسئله

[1] V. Lomonosov
[2] J. Schauder

زیرفضاهای پایا روی جبرهایی از عملگرها که شامل عملگرهای فشرده می‌باشند، را بیان می‌کنیم.

در فصل سوم، فضای بحث را به فضای کرین محدود نموده، در آن به حل معادله ریکاتی که ارتباط مستقیم با وجود زیرفضاهای پایا تحت عملگر با نمایش ماتریسی دارد، می‌پردازیم.

در فصل چهارم، با استفاده از قضیه نقطه ثابت کی‌فن[1] وجود زیرفضاهای پایا برای عملگرهای اساساً نرمال را بررسی می‌نماییم، در این راستا از جبرهای موضعی جایگزین جبرهای قویاً فشرده استفاده می‌شود.

در فصل آخر قضیه‌ی برنساید که دلالت بر وجود زیرفضاهای پایا غیربدیهی در فضای برداری دارد را به فضاهای باناخ، هیلبرت و شبکه باناخ می‌بریم.

در این مجموعه چارچوب کار تمرکز روی قضایایی است که به طور مستقیم از قضیه نقطه ثابت برای اثبات آنها استفاده شده است و در نهایت می‌خواهیم به این نتیجه برسیم که قضیه نقطه ثابت به‌عنوان یک شاهکار در آنالیز تابعی و نظریه عملگرها در اثبات خیلی از قضایا، ازجمله قضایای مرتبط با زیرفضاهای پایا، نقش کلیدی دارد.

[1] Ky Fan

تاریخچه

در سراسر این متن H را فضای هیلبرت و X, Y را فضاهای باناخ می‌گیریم. جبر $\mathcal{B}(X, Y)$ و $\mathcal{K}(X, Y)$ به‌ترتیب شامل عملگرهای خطی کراندار و عملگرهای خطی فشرده است که از فضای باناخ X به فضای باناخ Y نگاشته می‌شود. در حالت خاص که $X = Y$، به‌جای این دو رده از جبرها، به‌ترتیب از دو نماد $\mathcal{B}(X)$ و $\mathcal{K}(X)$ استفاده می‌شود.

زیرفضای بسته M از فضای باناخ X را زیرفضای پایا تحت عملگر $T \in \mathcal{B}(X)$ گوییم هرگاه برای هر $x \in M$ داشته باشیم $Tx \in M$ به عبارت ساده‌تر

$$TM \subseteq M.$$

اگر M زیرفضای پایا تحت عملگر T باشد، M را زیرفضای $T-$پایا نیز گوییم. همچنین زیرفضای بسته $M \subseteq X$ را زیرفضای پایا تحت زیرجبر $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(X)$ یا زیرفضای پایا مشترک زیرجبر $\mathcal{S}$ گوییم، اگر M تحت هر عملگر $T \in \mathcal{S}$ پایا باشد.

واضح است که $TX \subseteq X$ و $T0 = 0$، بنابراین زیرفضاهای X و $\{0\}$ تحت هر $T \in \mathcal{B}(X)$ پایا می‌باشند. این دو زیرفضا را زیرفضاهای بدیهی T-پایا می‌نامیم.

مجموعه $\mathrm{Lat}(T)$ را گردایه‌ی همه‌ی زیرفضاهای $T-$پایا می‌گیریم. اگر $\mathcal{A}$ زیرجبر $\mathcal{B}(X)$

باشد آنگاه

$$\mathrm{Lat}(\mathcal{A}) = \cap \{\mathrm{Lat}\, T : T \in \mathcal{A}\}.$$

در اینجا $\mathrm{Lat}(T)$ همواره دارای دو عضو بدیهی X و $\{0\}$ می‌باشـد.

این سوال مطرح می‌شود که آیا $\mathrm{Lat}(T)$ می‌تواند عنصر غیربدیهی نیز داشته باشد یا به عبارت دیگر آیا هر عملگـر کراندار روی یک فضای باناخ دلخواه، زیرفضای پایـا غیربدیهی دارد؟

جواب این سؤال ساده که بیش از شصت سال نظریه عملگـرها را به چالش واداشته است، در فضاهای باناخ منفی است، این سوال در سال ۱۹۷۶ توسط انفلو[1] جواب داده شد. می‌توان این پاسخ را به عنوان دستاورد جالب نظریه عملگرها در دهه هشتاد دانست. او اعلام کرد که یک فضای باناخ و یک، عملگـر کراندار روی آن بدون زیرفضای پایـا غیربدیهی وجود دارد البته او به‌صورت رسمی در سال ۱۹۸۵ آن را به‌صورت یک مقاله [۱۵] منتشر کرد. اما قبل از انتشار مثال انفلو، مقاله رید[2] در سال ۱۹۸۴ حاوی مثالی از عملگر کراندار در فضای دنباله‌ای l^1 که $\mathrm{Lat}(T)$ برای آن فقط دو عضوی بود، داوری و منتشر شد. ولی برای رده‌هایی از عملگرهای خطی پاسخ این مسئله مثبت است، زیرا اخیراً در سال ۲۰۰۹ آرگیروس[3] و هایدون[4] فضای باناخ جدائی‌پذیر با بعد نامتناهی ساختند، که هر عملگر پیوسته روی آن، مجموع یک عملگـر فشرده و یک عملگـر اسکالری است در نتیجه هر عملگر پیوسته روی آن فضای باناخ دارای زیرفضای پایـا غیربدیهی است [۵].

اما به هر حال کسی نمی‌داند که اولین بار این مسئله توسط چه کسی بیان شده، ولی به نظر می‌رسد که این مسئله بعد ازمقاله [۱۱] از بورلینگ[5] که در سال ۱۹۴۹ منتشر شد به وجود آمده است، یا می‌توان آن را از نتایج منتشر نشده فون نیومن[6] روی عملگرهای فشرده دانست. برای این که دید مناسبی روی مسئله داشته باشیم، آن را روی فضای هیلبرت که لااقل یکی از سه ویژگی جدائی ناپذیری، با بعد نامتناهی و یا مختلط بودن را نداشته باشنـد، مورد بحث قرار می‌دهیم.

[1] P. Enflo
[2] C. J. Read
[3] S. A. Argyros
[4] R. G. Haydon
[5] A. Beurling
[6] J. Von Neumann

از طرف دیگر این سؤال مطرح شد که فضای باناخ X دارای چه خاصیتی باشد به طوری که برای هر عملگر $T \in \mathcal{B}(X)$، زیرفضای غیربدیهی T-پایـا موجود باشد. در اینجا مشاهده می‌شود که انعکاسی بودن فضای باناخ X کفایت می‌کنـد. به عبارتی *اگر X فضای باناخ انعکاسی باشـد آنگاه برای هر $T \in \mathcal{B}(X)$، مجموعه $\mathrm{Lat}(T)$ بیش از دو عضو دارد.*

اما اگر فضای باناخ X در حالت خاص، فضای هیلبرت جدایی‌پذیر مختلط با بعد نامتناهی H باشد سوال در مورد وجود یا عدم وجود زیرفضای T-پایـا غیربدیهی برای هر عملگر $T \in \mathcal{B}(H)$، همان مسئله معروف زیرفضاهای پایـا می‌باشد که تاکنون جواب داده نشده است. از آنالیز حقیقی یادآور می‌شویم که عدد مختلط λ را مقدار ویــژه $T \in \mathcal{B}(H)$ گوئیم اگر بردار ناصفر x موجود باشد به طوری که

$$Tx = \lambda x,$$

در این حالت x را بردار ویــژه T نسبت به مقدار ویــژه λ می‌نامیم. به عنوان مثال در $\mathbb{R}^۲$ بردارهای $u = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$ و $v = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}$ بردارهای ویــژه‌ی عملگر $T = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ به ترتیب با مقدار ویــژه $\lambda = ۶$ و $\lambda = ۱$ می‌باشد.

در فضای n بعدی نرمدار Y هر عملگر خطی $T : Y \to Y$ را می‌توان به‌صورت یک ماتریس $n \times n$ نمایش داد، زیرا اگر $e = \{e_۱, e_۲, \cdots, e_n\}$ پایه‌ای برای Y باشد در این صورت

$$Te_i = \sum_{k=۱}^{n} \alpha_{ik} e_K, \quad i = ۱, ۲, \cdots, n,$$

در نتیجه ماتریس $T_e = [\alpha_{ik}]_{n\times n}$ متناظر با عملگر T خواهد بود، لذا λ مقدار ویــژه $T \in \mathcal{B}(H)$ است، هرگاه معادله ماتریسی (دستگاه n معادله، n مجهول همگن)

$$(T_e - \lambda I)x = ۰,$$

جواب غیرصفر داشته باشد به عبارتی

$$\det(T_e - \lambda I) \neq ۰.$$

معادله اخیر، معادله ای از درجه‌ی n برحسب λ حاصل می‌شود. چون X فضای هیلبرت با میدان

مختلط می‌باشد، طبق قضیه‌ی اساسی جبر این معادله حتما یک ریشه دارد، پس هر عملگر خطی در فضای هیلبرت مختلط با بعد متناهی دارای مقدار ویــژه است. به عبارتی دقیق‌تر مقادیر ویــژه عملگر T در فضای هیلبرت با بعد متناهی n زیرمجموعه‌ایی از $\mathbb{C}$ خواهد بود که تعداد نقاط این مجموعه از n تجاوز نمی‌کند.

زیرفضای ویــژه عملگر T به ازای مقدار ویــژه λ به صورت

$$M_\lambda = \{x \neq \circ : Tx = \lambda x\},$$

بیان می‌شود. واضح است که M_λ یک زیرفضای T-پایــا است، زیرا به ازای $x \in M_\lambda$،

$$T(Tx) = T\lambda x = \lambda Tx \Rightarrow Tx \in M_\lambda.$$

اگر $M_\lambda = H$ آنگاه T یک عملگر اسکالری است، به عبارتی به ازای هر $x \in H$،

$$Tx = \lambda x.$$

پس اگر T غیراسکالری و H با بعد متناهی و مختلط باشد، آنگاه H زیرفضای T-پایــا غیربدیهی دارد، به عبارت دیگر $\mathrm{Lat}(T)$ غیربدیهی است.

پس مسئله برای فضای هیلبرت با بعد متناهی حل شد. حال اگر H فضای هیلبرت مختلط با بعد نامتناهی و جدایی‌ناپذیر فرض شود، وجود زیرفضای پایــا برای هر عملگـر $T \in \mathcal{B}(H)$ را نشان می‌دهیم.

فضای H را جدائی‌پذیر می‌نامیم هرگاه زیرمجموعه‌ی شمارا چگال در H موجود باشــد. مثلاً فضاهای خط حقیقی $\mathbb{R}$ و صفحه مختلط $\mathbb{C}$ جدائی‌پذیرند ولی فضای دنباله‌ای l^∞ جدائی‌ناپذیر می‌باشــد.

قضیــه ۱.۰.۰. *اگر A زیرمجموعه‌ی شمارا از یک فضای نرمدار باشد آنگاه $[A]$ جدائی‌پذیر است. که در آن $[A]$ زیرفضای بسته تولید شده توسط A می‌باشــد.*

عملگر $T \in \mathcal{B}(H)$ و بردار ناصفر $x \in H$ را در نظر می‌گیریم، زیرفضای بسته تولید شده توسط مجموعه $\{x, Tx, T^{۲}x, \cdots\}$ را M می‌نامیم، M زیرفضای T-پایــا است زیرا به ازای هر عنصر

دلخواه $M \ni \cdots + \alpha_1 Tx + \alpha_0 x$ که می‌باشند داریم

$$T(\alpha_0 x + \alpha_1 Tx + \cdots) = \alpha_0 Tx + \alpha_1 T^2 x + \cdots \in M.$$

واضح است که $M \neq \{0\}$ و با توجه به گزاره (۱.۰.۰)، M جدائی‌پذیر است لذا $M \neq H$، بنابراین هر عملگر T روی فضای هیلبرت مختلط جدائی‌ناپذیر با بعد نامتناهی دارای زیرفضای T-پایـا غیربدیهی می‌باشـد.

در اینجا عملگر فشرده و چند جمله‌ای فشرده را یادآوری می‌نماییم .

برای فضاهای باناخ X و Y، عملگـر خطی $T : X \longrightarrow Y$ را عملگر فشرده (کاملا پیوسته) گوییم هرگاه برای هر مجموعه کراندار M از X ، مجموعه $\overline{T(M)}$ در فضای Y فشرده باشد. همچنین عملگـر T را به صورت چندجمله‌ای فشرده گوییم، هرگاه چندجمله‌ای P موجود باشد به طوری که $P(T)$ فشرده شـــود.

جان فان نیومن اشاره کرد که هر عملگر فشرده در فضای هیلبرت، دارای زیرفضای پـایا غیربدیهی است، ولی این مطلب توسط آرونزجان[1] و اسمیت [2] در سال ۱۹۵۴ اثبات شد [۶]. در سال ۱۹۶۶ برنشتین[3] و رابینسون[4] ثابت کردند که هر عملگر چندجمله‌ایی فشرده در فضای هیلبرت، زیرفضای پایـا غیر بدیهی دارد [۱۰]. لذا با توجه به این که هر عملگر فشرده به صورت چندجمله‌ایی فشرده است ولی برعکس آن درست نیست. نسبت به آروزجان و اسمیت، وجود زیرفضاهای پـایا در فضای هیلبرت تحت طیف گسترده‌تری از عملگرها را بیان می‌کند.

در اینجا بنا به ضرورت استفاده از مبحث آنالیز طیفـی، مختصراً اشاره‌ای به آن می‌نماییم.

اگر $Y \neq \{0\}$ فضای نرمدار مختلط و $T : \mathscr{D}_T \to Y$ عملگـر خطی با دامنه‌ی $\mathscr{D}_T \subseteq Y$ باشـد به ازای $\lambda \in \mathbb{C}$ و عملگر همانی I، عملگر

$$T_\lambda := T - \lambda I,$$

[1] N. Aronszajn
[2] K. T. Smith
[3] A. R. Bernstein
[4] A. Robinson

را روی $\mathscr{D}_T$ تعریف می‌نماییم. اگر T_λ وارون‌پذیر باشد آنگاه

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1},$$

را **عملگر حلال** T می‌نامیم.

یک **مقدار منظم** λ از T، عدد مختلطی است که $R_\lambda(T)$ موجود، کراندار و روی یک مجموعه چگال در X تعریف شود. **مجموعه حلال** T را با $\rho(T)$ نشان داده، شامل تمام مقادیر منظم λ از T است. متمم مجموعه حلال T را با $\delta(T)$ نشان داده و آن‌را **طیف** T می‌نامیم.

شعاع طیفی $r_\delta(T)$ از عملگر $T \in \mathcal{B}(X)$ روی فضای باناخ مختلط X، شعاع کوچکترین قرص بسته به مرکزیت مبدا در صفحه مختلط که شامل $\delta(T)$ می‌باشد، است. به عبارتی

$$r_\delta(T) = \sup_{\lambda \in \delta(T)} |\lambda| = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

حال اگر

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0,$$

عملگر T را **شبه پوچ توان** گوییم، به عبارتی شعاع طیفی T صفر باشد.

در سال ۱۹۶۷ آروسن [1] و فولدمن [2] به نتیجه زیر رسیدند [۷].

اگر T عملگر شبه‌پوچ توان و جبر یکنواخت بسته تولید شده توسط T شامل عملگر فشرده ناصفر باشد در این صورت T دارای زیرفضای پایا غیربدیهی است.

که در آن زیرجبر $\mathcal{A}$ از $\mathcal{B}(X)$ را به طور یکنواخت بسته گوییم هرگاه زیرجبر $\mathcal{A}$ نسبت به نرم عملگری بسته باشد به عبارتی برای هر دنباله $\{T_n\} \subseteq \mathcal{A}$ که به T همگرا شود آنگاه $T \in \mathcal{A}$.

درسال ۱۹۷۳ لومونوزوف با استفاده از قضیه نقطه ثابت شودر ثابت نمود که اگر عملگر T در فضای باناخ با یک عملگر فشرده ناصفر جابجا شود در این صورت T دارای زیرفضای پایاست. از نظر سیر تاریخی بعد از ارائه مثال توسط انفلو و رید در سال ۱۹۸۵ این مثال توسط بیوزامی[3] ساده‌تر شد.

[1] W. B. Arveson
[2] J. Feldman
[3] B . Beauzamy

البته تاکنون کارهای بسیار مهمی در این راستا انجام شده است لیکن هنوز به رد یا اثبات مسئله زیرفضای پایا منجر نشده است.

فصل ۱

مفاهـیم پایه

مقدمه

در این فصل پیش‌نیازهای فصل‌های آینده را مرور می‌نماییم این پیش‌نیازها شامل تعاریف و قضایای مقدماتی مرتبط به نقطه ثابت، جبرهای انتقالی، جبرهای موضعی، فضای کرین و شبکه باناخ می‌باشد.

البته فرض بر این است که خواننده با مفاهیم آنالیز حقیقی و آنالیز تابعی آشنا است. در عین حال، بعضی از مفاهیم و قضایای آنالیز تابعی که احتمالاً در یک درس مقدماتی آنالیز تابعی بیان نمی‌شوند، یادآوری خواهد شد.

در سراسر این متن H را فضای هیلبرت، X, Y را فضاهای باناخ یا نرم‌دار، V را فضای برداری می‌گیریم و همچنین (M, d) نمایانگر فضای متریک M با متر d می‌باشد. جبر $\mathcal{B}(X, Y)$ و $\mathcal{K}(X, Y)$ به‌ترتیب شامل عملگرهای خطی کراندار و عملگر های خطی فشرده است که از فضای باناخ X به فضای باناخ Y نگاشته می‌شود. در حالت خاص که $X = Y$، به‌جای این دو رده از جبرها، به‌ترتیب از دو نماد $\mathcal{B}(X)$ و $\mathcal{K}(X)$ استفاده می‌شود. همچنین مجموعه‌های اعداد حقیقی، اعداد مختلط و یک میدان را با حروف $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$ و $\mathbb{F}$ نمایش می‌دهیم. اگر X فضای باناخ باشد فضای تمام تابعک‌های خطی روی X را با X^* نشان می‌دهیم و به آن فضای دوگان X گوییم و با X^* نمایش می‌دهیم، همچنین متناظر به هر $x \in X$ و $x^* \in X^*$، دوگانگی بین x و x^* را با نماد $\langle x, x^* \rangle$ نمایش داده می‌شود.

از نماد $\mathrm{cl}(A)$ یا نماد $\overline{A}$ برای بستار مجموعه A استفاده می‌کنیم که کوچکترین مجموعه بسته شامل A را نشان می‌دهد.

۱.۱ قضیه نقطه ثابت

یکی از موضوعات جذاب در ریاضیات و علی‌الخصوص در آنالیز تابعی مبحث وجود نقطه ثابت برای یک نگاشت می‌باشد. نگاشت T از X به توی خودش را **خودنگاشت** گوییم بنابراین نقطه‌ی $x_۰ \in X$ را نقطه ثابت خودنگاشت T گوییم هرگاه

$$Tx_۰ = x_۰.$$

این مبحث دارای کاربردهای بسیاری در ریاضیات بوده که یکی از کاربردهای جالب آن، استفاده ابزاری از این تکنیک، برای پیش‌برد مفهوم نظریه زیرفضاهای پایـا است، که در این پژوهـش مد نظر ما می‌باشـد. حال سعی بر این است که مفاهیم اولیه و قضایای متنوع وجود نقطه ثابت با شرایط متفاوت، آن‌گونه که در این متن لازم است را ذکر نموده و برخی از قضایا را اثبات نماییم.

تعـریف ۱.۱.۱. اگر (M, d) فضای متریک، خودنگاشت f روی M را **لیپشیتس** گوییم هرگاه اسکالر مثبت λ موجود باشد که برای هر $x_۱, x_۲ \in M$ داشته باشیم

$$d\left(f(x_۱), f(x_۲)\right) \leq \lambda d(x_۱, x_۲).$$

کوچکترین مقدار λ ، صادق در نامساوی فوق را **ثابت لیپشیتس** f گوییم. همچنین اگر $\lambda = ۱$، نگاشت f را **ناانبساطی** ، اگر $\lambda < ۱$، نگاشت f را **انقباض** و اگر $\lambda \leq ۱$، نگاشت f را **انقباضی** می‌نامیم.

در حالت خاص، اگر T یک عملگر خطی کراندار بین دو فضای نرمدار باشـد، از اینکه $\|T\| \leq \|T\| . \|x\|$، واضح است که $\|T\|$ همان ثابت لیپشیتس می‌باشد. بنابراین می‌توان تعاریف مرتبط به نگاشت‌های انقباض، ناانبساطی و انقباضی از این‌چنین عملگرهای خطی را به‌صورت زیر بازنویسی نمود.

عملگر خطـی کراندار T بین دو فضای نرمدار X و Y انقباضی است اگـر $\|T\| \leq ۱$، ناانبساطی است اگر به ازای هر $x \in X \neq \circ$ داشته باشیـم، $\|Tx\| \leq \|x\|$ و انقباض است هرگاه $\|T\| < ۱$.

قضیه زیر به نام **اصل انقباض باناخ یا قضیه نقطه ثابت باناخ** معروف است که از ابتدایی‌ترین و در عین حال مهم‌ترین قضایای وجود و یکتایی نقاط ثابت نگاشت‌های انقباض است.

قضیـه ۲.۱.۱. [۳] *اگر نگاشت f روی فضای متریک غیرتهی و کامل (M, d)، انقباض باشـد، آنگاه f یک نقطه ثابت یکتا در M دارد.*

مثـال ۳.۱.۱. دیده می‌شود که تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲} + ۲x & \circ \leq x \leq \frac{۱}{۴} \\ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۴} < x \leq ۱ \end{cases}$$

بازه $[\circ, ۱]$ را به توی خودش نگاشت می‌کند. این نگاشت انقباض بوده لذا دارای نقطه ثابت یکتا است، به سادگی می‌توان دید که $f(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}$.

در این قضیه کامل بودن فضای M ضروری است به‌عنوان مثال تابع $f : (\circ, ۱] \to (\circ, ۱]$ با ضابطه $f(x) = \frac{x}{۲}$ و متر معمولی انقباض است ولی نقطه ثابت ندارد. قضیه زیر که بنام **قضیه بوید ـ وونگ** [۱] معروف است، یک توسیع مناسبی از قضیه انقباض باناخ می‌باشـد.

قضیـه ۴.۱.۱. [۳] *فرض کنید (M, d) فضای متریک کامل و f یک خودنگاشت روی M است. تابع $\varphi : [\circ, \infty) \to [\circ, \infty)$ از راست پیوسته بوده و برای هر $r > \circ$ در شرط $\varphi(r) < r$ صدق می‌کند. اگر برای هر $x_۱, x_۲ \in X$ نامساوی*

$$d\left(f(x_۱), f(x_۲)\right) \leq \varphi\left(d(x_۱, x_۲)\right),$$

برقـرار باشد، آنگاه f دارای نقطه ثابت یکتا در M است.

واضح است که با انتخاب $\varphi(r) = \lambda r$ در قضیه اخیر، قضیه نقطه ثابت باناخ حاصل می‌شود.

[۱] Boyd - Wong Theorem