بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه مراغه
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان:

حل معادله پخش زمان-کسری با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی تعمیم یافته

استاد راهنمای اول:

دکتر محمد مهدیزاده خالسرایی

استاد راهنمای دوم:

دکتر ابوالفضل تاری مرزآباد

استاد مشاور:

دکتر سهراب بزم

پژوهشگر:

اصغر اسفندیاری کهلان

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر بزرگوار و مادر مهربانم

که هر آنچه دارم از وجود پر مهر و محبت آنهاست

و همسر فداکارم و دختران شیرین‌تر از جانم

که مایه سعادت، برکت و پیشرفت زندگیم هستند.

خدایا...

اگر خواهی بر ما ببخشایی به فضل خود، و اگر خواهی کیفر دهی به عدل خود، پس منت نه و بر ما ببخشای و آسان گیر و از ما درگذر و از عذاب خود پناه ده که یارایی عدل تو را نداریم، و بی بخشایش تو کسی از ما نجات نیابد.

ای بی نیازترین بی نیازان، اینک ما بنده گان تواییم در پیشگاه تو، و من از همه محتاج تر. پس به توانگری خویش ما درویشان را نیکو گردان، و به منع عطا قطع امیدمان مکن تا آن کسی که از تو طلب سعادت می کند بدبخت نگردد، و آن که از فضل تو چشم عطا دارد ناامید نشود. اگر از جانب تو نومید شویم سوی که باز گردیم از در خانه تو کجا رویم.

خدایا تو پاکی ما فروماندگانیم و تو اجابت فروماندگان را واجب کردی مستمندانیم که گشودن مشکل آنها را نوید دادی. سزاوار مشیت و شایسته عظمت و بزرگی توست که بر مستمندان ببخشایی و آن کس که فریادرس خواهد به فریاد رسی. به زاری ما رحمت آر و چون خویش را بر آستان تو افکندیم ما را بی نیاز کن.

خدایا، شیطان شادگشت که در گناه پیروی او کردیم پس بر محمد و آل او درود فرست و پس از اینکه او را رها کردیم و به تو روی آوردیم او را شاد مکن.

سپاس خداوند را که نخستین موجود است و پیش از او هیچ نبود و آخرین موجود است و پس از او هیچ نباشد. دیده بینندگان از مشاهده ذات او فرومانده و اندیشه گویندگان از ذکر اوصاف او عاجز است. به قدرت خود آفریدگان را از نیستی به هستی آورد و به خواست خویش آنها را از عدم ایجاد فرمود. آنگاه در راهی که خود خواست آنها را سالک گردانید و در طریق محبت خویش برانگیخت. بدان سوی که کشانید، یارای باز پس شدن ندارند و از آن سو که آنها را باز داشت توانایی پیش رفتن نه! برای هر زنده نصیبی معلوم و رزقی مقسوم فرمود. کسی نتواند از روزی او اگر وافر است بکاهد و اگر ناقص است، چیزی بیفزاید. آنگاه که برای عمر هریک انجامی معلوم مقرر داشت و مدتی معین. هر روز که بگذرد گامی است که به سوی اجل برداشته و هر سال که برآید تختی از عمر است که تباه شود. چون به منتهی رسد و نشان آخرین گام بر زمین نقش بندد و حصه خویش را از عمر، مطابق حساب معلوم دریافت دارد، خداوند بدان جای که فرخوانده است از ثواب موفور یا عقاب محذور، به قهر ببرد تا بدکاران را به عمل زشت کیفر کند و نیکوکاران را به عمل نیک پاداش دهد. رفتار او عدل است، نامهای او پاک است و نعمت های او پی در پی، هرچه کند مسئول دیگران نیست و دیگران همه مسئول اویند. سپاس خداوند را که با بخشش عطایای پیوسته و تکمیل نعمت های پی در پی، اگر ایشان را از معرفت حمد خویش باز می داشت، همه در نعمت او مستغرق بودند، بی آنکه شکر او را به جای آورند و به فراخی از روزی او بهره مند می گشتند بی آنکه سپاس او گزارند. و اگر چنین بودند از حد انسانی بیرون رفته، از چهارپایان به شمار می

آمدند چنانکه در کتاب محکم خود وصف ایشان کرد. (آنها نیستند مگر چهارپایان بلکه گمراه تر) سپاس خداوند را که خود را به ما شناسانید و شکر خویش را به ما الهام فرمود و درهای معرفت را بر ما گشود. که پروردگار خود را شناختیم و ما را به توحید خالص رهبری کرد و از انکار و شک دور داشت سپاسی که تا زنده باشیم از سپاس گزاران او باشیم و چون عمر به پایان رسد، سوی رضا و عفو او بشتابیم. حمدی که تاریکی های عالم برزخ برای ما به سبب آن روشن گردد و راه رستاخیز را هموار سازد و جای ما را در موقف گواهان رفیع گرداند، روزی که هرکس پاداش رنج خویش را بیند و بر کسی ستم نشود، روزی که دوستان و بستگان به کار نیایند و کسی یاری کسی نکند. حمدی که تا اعلا علیین بالا رود و در نامه مرقوم گردد و نزدیکان بارگاه قدس بر آن گواهی دهند. سپاسی که چون چشم ها خیره گردد چشم ما بدان روشن شود و چون روی ها سیاه شود روی ما بدان سفید گردد. حمدی که ما را از آتش دردناک الهی آزاد ساخته در پناه خدای کریم محفوظ دارد. حمدی که ما را در گروه فرشتگان مقرب جای دهد و به پیامبران مرسل پیوندد، در سرای جاوید که پیوسته باقی است و جای نوازش و کرامت او که هرگز تغییر نپذیرد.

سپاس‌گزاری...

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمد مهدیزاده خالسرایی و جناب آقای دکتر ابوالفضل تاری مرزآباد از دانشگاه شاهد تهران صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای دکتر سهراب بزم که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان‌نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. از جناب آقای دکتر علی شکری که زحمت داوری این پایان‌نامه را تقبل فرمودند تقدیر و تشکر می‌کنم.
همچنین از کسانی که به هر نحوی در تکمیل این مجموعه به اینجانب کمک نمودند تشکر می‌نمایم. و در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

اصغر اسفندیاری کهلان
شهریور ۱۳۹۲

نام خانوادگی: اسفندیاری کهلان نام: اصغر

عنوان پایان‌نامه: حل معادله پخش زمان- کسری با استفاده از تبدیل دیفرانسیلی تعمیم یافته

استاد راهنمای اول: دکتر محمد مهدیزاده خالسرایی
استاد راهنمای دوم: دکتر ابوالفضل تاری مرزآباد
استاد مشاور: دکتر سهراب بزم
استاد داور: دکتر علی شکری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد
رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: مراغه دانشکده: علوم پایه
تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۱۳۹۲ تعداد صفحه: ۸۷

کلیدواژه‌ها: روش‌های عددی، جواب تحلیلی، معادله پخش زمان- کسری، روش تبدیل دیفرانسیلی تعمیم یافته، تابع میتیج-لفلر.

چکیده
در این پایان‌نامه، یک رابطه بازگشتی کلی برای توصیف جواب‌های معادله پخش زمان- کسری با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی تعمیم یافته ارائه شده است. رابطه به دست آمده، به ما کمک خواهد کرد تا معادلات پخش زمان- کسری را توسط نیروهای بیرونی متفاوت و شرایط اولیه حل کنیم. برای توضیح بیشتر چند مثال ارائه شده است.

فهرست مطالب

فصل ۱
مقدمه

مقدمه

نظریه انتگرالها و مشتقات مرتبه غیر صحیح (کسری [۱])حساب کسری نامیده شده است که کاربردهای آن به‌طور روزافزون اهمیت زیادی پیدا کرده است. هر دوی معادلات دیفرانسیل معمولی و با مشتقات جزئی از مرتبه کسری در دهه‌های اخیر برای مدل‌سازی پروژه‌های فیزیک، شیمی و مهندسی مورد استفاده قرار گرفته‌اند، برای اطلاعات بیشتر در خصوص کاربردهای حساب کسری به [۱۵] مراجعه شود.

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری برای مدل‌سازی رخدادهای طبیعی و تئوری سیستم‌های مختلط اهمیت خاصی پیدا کرده است. دلیل اصلی سودمندی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری، رابطه بین این معادلات در حرکت براونی [۲] و هم چنین سایر رخدادهای طبیعی است.

مطالب این پایان‌نامه در سه فصل مجزا به صورت زیر تنظیم شده است:

در فصل اول، به معرفی محاسبات کسری، انتگرال مشتق کسری ریمن-لیوویل [۳]، مشتق کاپوتو [۴]،

[۱] Fractional
[۲] Brownian motion
[۳] Riemann-Lioville
[۴] Caputo

توابع میتیج-لفلر [۱]، فرمول تیلور تعمیم یافته و معادلات دیفرانسیل کسری پرداخته‌ایم. در فصل دوم به روش تبدیل دیفرانسیلی (DTM) [۲]، برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات انتگرال و تبدیل دیفرانسیلی تعمیم یافته تک-بعدی اشاره کرده‌ایم. در فصل سوم، ابتدا روش تبدیل دیفرانسیلی تعمیم یافته دو-بعدی ($GDTM$) [۳] را توضیح داده و سپس به حل معادله پخش زمان-کسری [۴] با استفاده از تبدیل دیفرانسیل تعمیم یافته پرداخته‌ایم.

مطالب اصلی این پایان‌نامه بر اساس مقاله

A. Cetinkaya, O. Kiymaz, The solution of the time-fractional diffusion equation by generalized differential transform method, Mathematical and Computer Modelling (impact factor: 1.35). 01/2013; 57(9-10):2349-2354.

تنظیم شده است.

[۱] Mittage-Leffler
[۲] Differantial transform method
[۳] Generalized differential transform method
[۴] Time-Fractional diffusion

فصل ۲

محاسبات کسری

۱.۲ تاریخچه

اولین بار نماد $\frac{d^n y}{dx^n}$ را لایبنیتز [۱] برای مشتق مرتبه n–ام بکار برد که در آن n عددی صحیح است. شاید یک بازی ساده با نمادها در سی‌ام سپتامبر سال ۱۶۹۵ کافی بود تا هوپیتال [۲] از لایبنیتز بپرسد اگر $n = \frac{۱}{۲}$ باشد، نتیجه چه خواهد شد؟ لایبنیتز در پاسخ نوشت این یک تناقض آشکار از چیزی است که یک روز نتایج مفیدی خواهد داد. در سال‌های بعد پیشرفت‌های کوچکی در توسعه محاسبات کسری ایجاد شد. اولین اشاره به مشتق از مرتبه دلخواه در سال ۱۸۱۹ توسط لاکرویکس [۳] ارائه شد. او با $y = x^m$، که m یک عدد صحیح مثبت است، شروع کرد. لاکرویکس مشتق n–ام آن را توسعه داد

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \qquad m \geq n,$$

و با استفاده از نماد لژاندر برای تعمیم فاکتوریل یا همان تابع گاما، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(x) = \int_{۰}^{\infty} t^{x-۱} e^{-t} dt,$$

[۱] Leinniz
[۲] Hopital
[۳] Lacroix

به‌دست آمد

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+۱)}{\Gamma(m-n+۱)} x^{m-n}.$$

سپس مثال $y = x$ و $n = \frac{۱}{۲}$ را ارائه داد

$$\frac{d^{\frac{۱}{۲}} y}{dx^{\frac{۱}{۲}}} = \sqrt{\frac{۴x}{\pi}} = \frac{۲\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

روش لاکرویکس نمی توانست برای توابع زیادی کاربرد داشته باشد. برای مشتق از مرتبه دلخواه، قدم بعدی توسط فوریه [۱] برداشته شد. او ابتدا تابع $f(x)$ را به‌صورت زیر معرفی کرد [۱۸]

$$f(x) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \cos p(x-\alpha) dp.$$

از طرفی برای n صحیح داریم

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos p(x-\alpha) = p^n \cos\Big(p(x-\alpha) + \frac{۱}{۲} n\pi\Big).$$

فوریه با جایگذاری n با u تعمیم زیر را به‌دست آورد

$$\frac{d^u}{dx^u} f(x) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^u \cos\Big(p(x-\alpha) + \frac{۱}{۲} u\pi\Big) dp,$$

که این رابطه تعریفی از مشتق مرتبه $u-$ام را برای هر مقدار دلخواه u فراهم می‌کند.

در سال ۱۸۳۲ لیوویل مطالعه اصلی خود را در محاسبات کسری شروع کرد. نقطه شروع توسعه نظریه اش، نتیجه مشهور مشتقات از مرتبه صحیح بود

$$D^m e^{ax} = a^m e^{ax}.$$

[۱] Fourier

او مشتقات از مرتبه دلخواه را به‌صورت زیر بسط داد

$$D^{\alpha}e^{ax} = a^{\alpha}e^{ax}.$$

لیوویل فرض کرد که اگر $f(x)$ به‌صورت سری زیر بسط داده شود

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \qquad Re(a_n) > 0. \tag{۱.۲}$$

آنگاه مشتق دلخواه $f(x)$ چنین است

$$D^{\alpha}f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^{\alpha} e^{a_n x}. \tag{۲.۲}$$

رابطه (۲.۲) به اولین فرمول لیوویل معروف است. اگر چه این رابطه یک مشتق از مرتبه دلخواه را نمایش می‌دهد، اما فقط برای توابعی به فرم (۱.۲) مفید است.

شاید لیوویل از این محدودیت آگاه بود و فرمول بندی تعریف دومی را آغاز کرد. او با یک انتگرال معین وابسته به تابع گاما شروع کرد

$$I = \int_{0}^{\infty} u^{a-1}e^{-xu}du, \qquad a > 0, x > 0.$$

با تغییر متغیر $xu = t$ به‌دست آورد

$$I = x^{-a}\int_{0}^{\infty} t^{a-1}e^{-t}dt = x^{-a}\Gamma(a)$$

یا بصورت ساده‌تر

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)}I.$$

سپس عملگر D^α را روی هر دو طرف معادله فوق بکار برد تا رابطه زیر به‌دست آید

$$D^\alpha x^{-a}\frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(a)}\int_0^\infty u^{\alpha+a-1}e^{-xu}du.$$

بنابراین لیوویل به دومین تعریف از مشتق کسری رسید

$$D^\alpha x^{-a}=\frac{(-1)^\alpha\Gamma(a+\alpha)}{\Gamma(a)}x^{-a-\alpha}, \qquad a>0.$$

این تعریف نیز محدود به توابع به شکل $f(x)=x^{-a}$ با $a>0$ بود.

احتمالاً، بیشترین پیشرفت مفید در توسعه محاسبات کسری در یک مقاله ای از ریمان [۱] بود که در دوران دانشجویی نوشته بود، اما پس از مرگش، در سال ۱۸۹۲ منتشر شد. او از تعمیم سری تیلور، برای به‌دست آوردن انتگرال از مرتبه کسری استفاده کرد. او چنین تعریف کرد

$$D^\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_c^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt+\psi(x).$$

به خاطر ابهام در حد پائین انتگرال گیری، لیوویل مناسب دید به تعریف خود، تابع متمم $\psi(x)$ را اضافه کند.

نخستین کارهایی که سرانجام به آنچه که ما آن را تعریف ریمن-لیوویل [۲] می‌شناسیم، منتهی شد به مقاله‌ای که توسط سونین [۳] در سال ۱۸۶۹ با عنوان مشتق با شاخص دلخواه، ظاهر شد، که با فرمول انتگرال کوشی شروع کرده بود. در موضوع محاسبات کسری، از سال ۱۸۶۸ تا ۱۸۷۲ لتنیکوف [۴] چهار مقاله نوشت. مقاله وی با عنوان شرحی بر مفاهیم اصلی نظریه مشتق با نمای دلخواه، تعمیمی از مقاله

[۱] Riemann
[۲] Riemann-Lioville
[۳] Sonin
[۴] Letnikov

سونین بود، که آن دو منتهی به این شد که انتگرال از مرتبه دلخواه α به این صورت تعریف شود

$$ {}_cD_x^{-\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_c^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \qquad \mathrm{Re}(\alpha)>0. \tag{۳.۲}$$

بنابراین برای $x>c$ در رابطه (۳.۲) همان تعریف ریمن بدون تابع متمم است. بیشترین تعریف کاربردی زمانی است که $c=0$ باشد

$$ {}_0D_x^{-\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \qquad \mathrm{Re}(\alpha)>0. \tag{۴.۲}$$

که این فرمول از انتگرال کسری را انتگرال ریمن-لیوویل می‌نامیم.

وقتی c منفی بی‌نهایت باشد، رابطه (۴.۲) به‌صورت زیر است

$$ {}_{-\infty}D_x^{-\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \qquad \mathrm{Re}(\alpha)>0. \tag{۵.۲}$$

مشتقات و انتگرال‌های از مرتبه کسری ریمن-لیوویل در حل معادلات دیفرانسیل کسری کاربرد دارند، اما اگر دنیای واقعی را با معادلات دیفرانسیل کسری مدل سازی کنیم، این معادلات جواب نمی‌دهند، چون در مشتقات و انتگرال‌های از مرتبه کسری ریمن-لیوویل، شرایط اولیه به‌صورت یک مقدار حدی ظاهر می‌شوند، به‌طور مثال

$$\lim_{t\to a}D_t^{\alpha-1}=b_1,$$

$$\lim_{t\to a}D_t^{\alpha-2}=b_2,$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\lim_{t\to a}D_t^{\alpha-n}=b_n,$$

که در آن b_k ، $(k = ۱, ۲, ۳, ..., n)$ اعداد ثابتی هستند. با اینکه مسائل مقدار اولیه فوق با چنین شرایط اولیه از لحاظ ریاضی قابل قبول بودند ولی جواب‌های به‌دست آمده در تعبیر رخدادهای طبیعی و کاربردهای فیزیکی عملاً غیر قابل استفاده بودند. در اینجا یک خلاء بین قضایای ظریف ریاضی و کاربردهای عملی مشاهده گردید. لذا هنگام مدل‌سازی رخدادهای دنیای واقعی با معادلات دیفرانسیل کسری، مشتقات و انتگرالهای از مرتبه کسری ریمن-لیوویل اشکالات عمده‌ای به‌وجود آوردند. به همین دلیل عملگر کسری D_t^α توسط کاپوتو پیشنهاد شد، که در قسمت ۵.۲ به آن خواهیم پرداخت.

۲.۲ انتگرال کسری ریمن-لیوویل

در این بخش تعریف اولیه‌ای از عملگرهای انتگرال و دیفرانسیل کسری یعنی J_a^n و D_a^n برای $n \notin \mathbb{N}$ ارائه می‌دهیم. ابتدا با عملگر انتگرال شروع می‌کنیم. فضای $L_۱[a,b]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$L_۱[a,b] = \Big\{ f : [a,b] \to R \quad \text{اندازه پذیر است } [a,b] \text{روی} f, \quad \int_a^b |f(x)| dx < \infty \Big\}.$$

به نظر می رسد از ملاحظات فصل گذشته، مفهوم زیر بدیهی باشد

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید $n \in \mathbb{R}^+$, عملگر J_a^n روی $L_۱[a,b]$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید

$$J_a^n f(x) = \frac{۱}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-۱} f(t) dt, \qquad a \leq x \leq b. \tag{۶.۲}$$

J_a^n عملگر انتگرال کسری از مرتبه n ریمن-لیوویل نامیده می‌شود.

بررسی برای حالت $n = ۰$ را به آینده موکول می‌کنیم. بدیهی است که انتگرال کسری ریمن-لیوویل با تعریف کلاسیک J_a^n در حالت $n \in \mathbb{N}$ منطبق می‌شود، به استثناء حالتی که دامنه توابع انتگرال پذیر

به توابع انتگرال پذیر لبگ [۱] توسیع داده شده است. (که مشکلی در توسیع به وجود نمی آید). بعلاوه در حالت $n \geq ۱$، واضح است که انتگرال $J_a^n f(x)$ به ازای هر $x \in N$ وجود دارد. زیرا تابع زیر انتگرال، حاصل ضرب یک تابع انتگرال پذیر با یک تابع پیوسته است. در حالت $۰ < n < ۱$، هر چند در نگاه اول وضعیت روشنی وجود ندارد، با این حال، نتیجه زیر تاکید می کند که این تعریف موجه است.

قضیه ۲.۲.۲. *فرض کنید $f \in L_۱[a,b]$ و $n > ۰$ باشد. در این‌صورت انتگرال $J_a^n f(x)$ به ازای هر $x \in [a,b]$ تقریبا همه جا وجود دارد. بعلاوه $J_a^n f$ عنصری از $[a,b]$ است.*

برهان. به فصل دوم از [۱۶] مراجعه شود.

۱.۲.۲ چند مثال از انتگرال کسری

مثال ۳.۲.۲. *فرض کنیم $f(x) = x^\beta$ که $\beta > -۱$ است. بنا به تعریف انتگرال کسری داریم*

$$J_۰^n x^\beta = \frac{۱}{\Gamma(n)} \int_۰^x (x-t)^{n-۱} t^\beta dt.$$

با تغییر متغیر $t = xu$ داریم

$$J_۰^n x^\beta = \frac{۱}{\Gamma(n)} x^{\beta+n} \int_۰^۱ u^\beta (۱-u)^{n-۱} du = \frac{\Gamma(\beta+۱)}{\Gamma(n+\beta+۱)} x^{n+\beta}.$$

پس

$$J_۰^n x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+۱)}{\Gamma(n+\beta+۱)} x^{n+\beta}, \qquad n > ۰, \qquad \beta > -۱, \qquad x > ۰.$$

در مثال فوق، اگر $\beta = ۰$ باشد، آنگاه انتگرال کسری تابع ثابت K به‌صورت زیر است

$$J_۰^n K = \frac{K}{\Gamma(n+۱)} x^n, \qquad n > ۰.$$

[۱] Lebesgu

برای ارائه مثال بعدی به تعریف زیر نیاز داریم

تعریف ۴.۲.۲. تابع $\gamma^*(n,t)$ برای $n>0$ که به‌صورت

$$\gamma^*(n,t)=\frac{1}{\Gamma(n)t^n}\int_0^t x^{n-1}e^x dx. \tag{۷.۲}$$

تعریف می‌شود را تابع گامای ناقص می‌نامند.

مثال ۵.۲.۲. *برای تابع $f(x)=e^{ax}$ باشد، که در آن a یک ثابت است، $J_0^n f(x)$ را برای $n>0$ به‌دست آورید. روش اول*

$$J_0^n e^{ax}=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^x (x-t)^{n-1}e^{ax}dt, \qquad n>0. \tag{۸.۲}$$

با تغییر متغیر $y=x-t$ داریم

$$J_0^n e^{ax}=\frac{e^{ax}}{\Gamma(n)}\int_0^x y^{n-1}e^{-ay}dy, \qquad n>0. \tag{۹.۲}$$

اگر در رابطه (۹.۲)، تغییر متغیر $ay=t$ را اعمال کنیم، خواهیم داشت

$$J_0^n e^{ax}=\frac{e^{ax}}{\Gamma(n)}\int_0^{ax} t^{n-1}e^{-t}dt, \tag{۱۰.۲}$$

و با استفاده از تعریف تابع گامای ناقص داریم

$$\gamma^*(n,at)=\frac{1}{\Gamma(n)(at)^n}\int_0^{at} x^{n-1}e^x dx.$$

در نتیجه رابطه (۱۰.۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$J_0^n e^{ax}=x^n e^{ax}\gamma^*(n,ax).$$

واضح است که انتگرال (۲.۱۰) یک تابع مقدماتی نیست، اما این تابع، به تابع گامای ناقص وابسته می‌باشد.

۳.۲ مشتق کسری ریمن-لیوویل

ویژگی های اساسی عملگرهای کسری ریمن-لیوویل را بیان کردیم. اکنون به عملگرهای دیفرانسیل کسری ریمن-لیوویل می‌پردازیم. قبل از ورود به بحث اصلی این فصل لازم است، روابط زیر را یادآوری کنیم

$$Df(x) = f^{'}(x),$$

که D همان عملگر مشتق کلاسیک و

$$J_a f(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

که J_a

عملگر انتگرال کلاسیک است، برای $x \in [a, b]$. و همچنین داریم

$$D^n J_a^n f = f$$

برای ایجاد انگیزه در تعریف موضوع فوق، لم زیر را بیان می‌کنیم

لم ۲.۳.۱. *اگر $m, n \in \mathbb{N}$ به طوری که $m > n$ و تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق n-ام پیوسته داشته باشد،*