دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته آمار ریاضی

عنوان:

استنباط آماری بر اساس داده‌های سانسور پنجره‌ای

استاد راهنما:
جناب آقای دکتر جعفر احمدی

استاد مشاور:
جناب آقای دکتر مهدی دوست پرست

نگارنده:
منصوره رزمخواه

دی ماه ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر دلسوز و همسر مهربانم

« مَن لَم یَشکُرِ المَخلوق لَم یَشکُرِ الخالِق »

از زحمات بی‌دریغ و راهنمایی‌های کارساز استاد گرامی و فرزانه جناب آقای دکتر احمدی که به عنوان استاد راهنما زحمت این رساله را به عهده گرفتند و همچنین جناب آقای دکتر دوست‌پرست که عهده‌دار مشاوره اینجانب در انجام امور بودند، کمال تشکر را دارم.

از داوران گرامی جناب آقای دکتر عبدالحمید رضایی رکن‌آبادی و جناب آقای دکتر غلامرضا محتشمی برزادران که با حضور خود اطمینان خاطر بنده را فراهم نمودند، سپاسگزارم.

از کمک‌های کارساز پدر و مادر و راهنمایی‌ها و کمک‌های برادر عزیزم و همراهی همسر مهربانم که با همراهی و صبر خود موجبات دلگرمی مرا فراهم آورده و باعث سرعت بخشیدن به روند کار شدند، صمیمانه قدردانی می‌نمایم.

همچنین از همکاری‌های مسئولین محترم کتابخانه و آموزش و سرکار خانم سلیمانی و جناب آقای وطن‌دوست بسیار تشکر می‌نمایم.

منصوره رزمخواه

۱۳۹۰/۱۱/۹

فهرست مندرجات

پیشگفتار ۱

۱ فرآیند پواسن ۷

۱—۱ مقدمه ۸

۱—۲ فرآیند پواسن ۸

۱—۳ فرآیند پواسن همگن ۱۰

۱—۴ فرآیند تجدید ۱۰

۲ فرآیند تعمیرات ۱۴

۲—۱ مقدمه ۱۵

۲—۲ مفاهیم اولیه ۱۵

۲—۳ مدل‌بندی سیستم‌ها ۱۸

۲—۳—۱ سیستم با شبکه متوالی ۱۸

۲—۳—۲ سیستم با شبکه موازی ۱۸

۲—۳—۳ سیستم با شبکه متوالی—موازی ۱۹

۲—۳—۴ سیستم با شبکه k از n ۱۹

۲—۳—۵ سیستم با برخی عضوهای مازاد ۲۰

۲—۳—٦ مدل بندی با تابع نرخ خطر ۲۲

۲—۴ فرآیند تعمیرات ۲۳

۲—۴—۱ تعمیرات پیشگیرانه ۲۴

۲—۴—۲ تعمیر کامل ۲۵

۲—۴—۳ تعمیر مینیمال ۲۵

۲—۴—۴ تعمیر $p-q$ (ناکامل) ۲۹

۳ فرآیند تجدید سانسور پنجره‌ای ($WCRP$) ۳۰

۳–۱ مقدمه ۳۱

۳–۲ نظریه توزیع برای داده‌های یک $WCRP$ ۳۲

۳–۲–۱ توزیع گاما ۳۲

۳–۲–۲ توزیع زمان اولین خرابی ۳۳

۳–۳ تابع درستنمایی ۳۴

۳–۳–۱ توزیع تجدید نمایی ۳۸

۳–۴ شبیه سازی متغیر Y از یک $WCRP$ ۳۹

۳–۴–۱ توزیع گاما ۴۰

۳–۵ شبیه سازی یک $WCRP$ ۴۱

۴ اطلاع فیشر در داده‌های سانسور پنجره‌ای ۴۳

۴–۱ اطلاع فیشر ۴۴

۴–۲ معرفی اطلاع فیشر در داده‌های سانسور پنجره‌ای ۴۵

۴–۲–۱ توزیع تجدید نمایی ۴۹

۴—۲—۲ توزیع تجدید گاما ۵۱

۴—۳ خواص حدی اطلاع فیشر ۵۸

۴—۳—۱ توزیع نمایی ٦۸

۴—۳—۲ توزیع گاما ٦۹

۴—۴ توزیع مجانبی MLE ۷۴

۵ استنباط پارامتری بر اساس داده‌های یک $WCRP$ ۷٦

۵—۱ توزیع نمایی ۷۷

۵—۲ روش نیوتون—لایک ۷۸

۵—۳ توزیع گاما ۷۹

۵—۳—۱ MME ۷۹

۵—۳—۲ MLE ۸۱

۵—۴ پیش‌بینی زمان تجدید بعدی ۸۳

۵—۴—۱ توزیع نمایی ۸۵

۶ فرآیند تعمیرمینیمال سانسور پنجره‌ای ($WCMRP$) ۸۶

۶—۱ مقدمه ۸۷

۶—۲ تابع درستنمایی ۸۷

۶—۳ توزیع $N(w)$ ۸۹

۶—۳—۱ توزیع نمایی ۹۰

۶—۴ اطلاع فیشر ۹۱

۶—۴—۱ توزیع نمایی ۹۲

۶—۴—۲ توزیع گاما ۹۳

۷ حالات خاص فرآیند تعمیرات در سانسور پنجره‌ای ۹۸

۷—۱ فرآیند آمیخته مدل (۱) ۹۹

۷—۲ فرآیند آمیخته مدل (۲) ۱۰۰

۷—۳ فرآیند آمیخته مدل (۳) ۱۰۰

۸ جمع‌بندی و آینده تحقیق ۱۰۳

A ضمائم ۱۰۶

پیشگفتار

در مباحث قابلیت اعتماد، معمولاً سیستم‌ها به دو دسته قابل تعمیر و غیر قابل تعمیر تقسیم می‌شوند. یک سیستم قابل تعمیر سیستمی است که با رخ دادن یک خرابی در آن، به جای تعویض کل سیستم، می‌تواند به وسیله برخی تعمیرات به شرایط مؤثر کاری برگردد. برای مثال اتومبیل سیستمی قابل تعمیر است، زیرا در اکثر خرابی‌ها مانند ناتوانی در روشن شدن به دلیل یک استارت بد، بدون تعویض کل سیستم میتوان آن را تعمیر کرد. در برخی تعمیرها نیازی به تعویض هیچ قسمتی از سیستم نیست، مثلاً اتومبیل به دلیل ارتباط بد با باتری با یک استارت خراب می‌شود. در این حالت با تمیز کردن کابل‌ها و رابط‌هایشان با باتری مشکل برطرف می‌شود. از طرفی یک لامپ روشنایی سیستمی قابل تعمیر نیست. تنها راه برای تعمیر یک لامپ سوخته تعویض آن با یک لامپ سالم است، که تعویض کل سیستم را در بر می‌گیرد. در واقع یک سیستم غیر قابل تعمیر پس از خرابی دور انداخته می‌شود.

امروزه سیستم‌های الکتریکی زیادی وجود دارند که غیرقابل تعمیر هستند و یا هزینه تعمیر آن‌ها از هزینه تعویض‌شان بیشتر است. یک قطعه نرم افزاری را به عنوان یک سیستم قابل تعمیر می‌توان در نظر گرفت. یک نرم افزار توسعه داده می‌شود. عیب‌ها کشف و سپس تصحیح می‌شوند. پس از اصلاح، این قطعه مورد استفاده قرار می‌گیرد تا زمانی که خرابی دیگری رخ دهد. سیستم‌های بسیاری مانند اتومبیل‌ها، هواپیماها و رایانه‌ها سیستم‌هایی قابل تعمیر می‌باشند.

حال اگر فرآیند از کار افتادگی سیستمی را در طول بازه‌ای خاص بررسی کنیم با نوعی سانسور

مواجه هستیم که به سانسور پنجره‌ای معروف است. اگر زمان‌های از کار افتادگی در این بازه یک فرآیند تجدید را تشکیل دهند، بر اساس مجموعه داده‌های این فرآیند در سانسور پنجره‌ای تحقیق‌های زیادی انجام شده است. واردی (۱۹۸۲) [۱] برآورد ناپارامتری توزیع تجدید از این مجموعه داده را معرفی نمود، و در کار خود از روش‌های عددی برای ماکسیمم‌سازی تابع درستنمایی تحت برداری از احتمالات استفاده نمود. سوون و وودروف (۱۹۹۶) [۲] زمانی‌که در این سانسور هیچ از کار افتادگی رخ ندهد را مطالعه کردند و برآوردگر درستنمایی ماکسیمم پارامترها را به دست آوردند. دِنبای و واردی (۱۹۸۵) [۳] یک روش کوتاه با استفاده از برآوردگر ناپارامتری کپلن—میر برای برآورد F بر اساس این فرآیند تعریف نمودند. نلسن (۲۰۰۳) [۴] روش‌های استنباط ناپارامتری برای مجموعه داده‌های حوادث تکراری در این مدل را معرفی کرد و برآوردی برای متوسط تعداد تجدیدها در این سانسور ارائه داد. الورز (۲۰۰۶) [۵] فرآیند تجدید متناوب در این سانسور را مورد مطالعه قرار داد و در کار خود از توزیع تجدید پارامتری استفاده نموده و MLE برای پارامترها و احتمالات انتقال (گذر) زمانی‌که توزیع تجدید، نمایی باشد را به دست آورد. ژائو و ناگاراجا (۲۰۱۱) [۶] به استنباط پارامتری بر اساس فرآیندهای تجدید چندگانه پرداختند و اطلاع فیشر مربوط به داده‌های یک فرآیند تجدید در حالت پارامتری در توزیع‌های نمایی، گاما، لگ‌نرمال و وایبل را به دست آوردند و با مقادیر به دست آمده و خواص حدی اطلاع فیشر در این مجموعه داده، طول پنجره بهینه برای سانسور پنجره‌ای را پیشنهاد دادند. کار آن‌ها در دو مدل اثرات ثابت و اثرات تصادفی انجام گرفت.

[۱] [18] Vardi, Y.
[۲] [17] Soon, G. and Woodroofe, M.
[۳] [8] Denby, L. and Vardi, Y.
[۴] [13] Nelson, W. B.
[۵] [2] Alvarez, E. E.
[۶] [20] Zhao, Y. and Nagaraja, H. N.

در این پایان‌نامه به موارد زیر خواهیم پرداخت:

در فصل اول، فرآیند پواسن و برخی از ویژگی‌های آن معرفی و حالات خاص آن از جمله فرآیند پواسن همگن و فرآیند تجدید بررسی می‌شوند. سپس با متغیر زمان بازگشتی پیشرو آشنا می‌شویم.

در فصل دوم، ابتدا به برخی مفاهیم اولیه در مدل‌بندی انواع سیستم‌ها می‌پردازیم، سپس حالات مختلف چیدمان یک سیستم پیچیده بیان می‌شود و در آخر با انواع خرابی سیستم‌ها و چگونگی تعمیر آن‌ها آشنا می‌شویم.

در فصل سوم، فرآیند تعمیر کامل در سانسور پنجره‌ای معرفی می‌شود که در سال ۲۰۱۱ توسط ژائو و ناگاراجا بیان شد.

در فصل چهارم، ابتدا اطلاع فیشر و موارد استفاده آن معرفی و سپس اطلاع فیشر موجود در یک مجموعه داده از فرآیند تعمیر کامل در سانسور پنجره‌ای محاسبه می‌شود.

در فصل پنجم، با استفاده از یک مجموعه داده از فصل سه، پارامترهای توزیع تجدید به روش‌های گشتاوری و درستنمایی ماکسیمم برآورد می‌شوند.

در فصل ششم، سانسور پنجره‌ای با فرآیند تعمیر مینیمال بررسی می‌شود و توزیع تعداد از کار افتادگی‌های یک سیستم در این سانسور معرفی و در پایان اطلاع فیشر موجود در یک مجموعه داده از این فرآیند محاسبه می‌شود.

در فصل هفتم، چند فرآیند تعمیر خاص در سانسور پنجره‌ای که تلفیقی از تعمیر کامل و تعمیر مینیمال است، معرفی و مدل احتمال این فرآیندها مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

مقاله‌ای تحت عنوان « مدل‌های احتمال برای فرآیند تعمیرات در سانسور پنجره‌ای » مستخرج از مطالب فصل‌های شش و هفت در هشتمین سمینار احتمال و فرآیندهای تصادفی به چاپ رسیده

است.[۷]

برنامه‌های مربوط به شبیه‌سازی (نرم‌افزار R) در فصل ضمائم آورده شده است.

[۷] [۱] رزمخواه، م.، احمدی، ج.

نمادها

فرآیند تجدید سانسور پنجره‌ای	$WCRP$
فرآیند تعمیر مینیمال سانسور پنجره‌ای	$WCMRP$
اطلاع فیشر	IF
متغیر بازگشتی پیشرو	FRT
برآوردگر گشتاوری	MME
برآوردگر درستنمایی ماکسیمم	MLE
طول سانسور پنجره‌ای	w
تعداد پنجره‌های تحت مطالعه	m
زمان کل آزمایش	T
تعداد تجدیدها در سانسور پنجره‌ای	N
تعداد تعمیرات در بازه $(t, t+w)$	$N(w)$
تعداد تعمیرات در بازه $(0, t)$	$N(t)$
زمان از پایان پنجره تا تجدید بعدی	Q
یک مجموعه داده	D
یک مجموعه داده اگر $N = 0$	$D = (N = 0, w)$
یک مجموعه داده اگر $N = 1$	$D = (N = 1, Y, Z)$
یک مجموعه داده اگر $N = n$	$D = (N = n, Y, \underline{X}, Z)$
یک مجموعه داده اگر $N(w) = n, N(t) = i$	$D = (\mathbf{X}, N(t) = i, N(w) = n)$
یک مجموعه دادهاز iامین فرآیند	D_i
پارامتر توزیع مورد استفاده در مدل	θ
iامین عضو بردار پارامتر در مدل	θ_i
تابع احتمال X	$f(x;\theta)$
تابع توزیع X	$F(x;\theta)$
تابع احتمال Y	$g(y,\theta)$
تابع توزیع Y	$G(y;\theta)$
برآورد گشتاوری پارامتر از مجموعه داده‌های X	$\tilde{\theta}(X)$
برآورد گشتاوری پارامتر از مجموعه داده‌های Y	$\tilde{\theta}(Y)$
برآورد گشتاوری پارامتر از مجموعه داده‌ها	$\hat{\theta}$

kامین گشتاور نمونه‌ای X	m_{k_X}
میانگین توزیع X	μ_X
انحراف معیار توزیع X	$\sigma_X^۲$
تابع درستنمایی داده‌ها	$L(D;\theta)$
تابع درستنمایی داده‌ها اگر $N = ۰$	$L_۰(D;\theta)$
تابع درستنمایی داده‌ها اگر $N = n$	$L_n(D;\theta)$
تابع درستنمایی داده‌ها اگر $N(t) = i$ و $N(w) = n$	$L_{i,n}(D;\theta)$
لگاریتم تابع درستنمایی	$\ell(D;\theta)$
ماتریس اطلاع فیشر از D	$I(D;\theta)$
دترمینان ماتریس اطلاع فیشر از D	$\det[I(D;\theta)]$
k,lامین درایه ماتریس اطلاع فیشر از D	$I(D;\theta_k,\theta_l)$
ماتریس اطلاع فیشر تقریبی از D	$\hat{I}(D;\theta)$

فصل ۱

فرآیند پواسن

۱.۱ مقدمه

۲.۱ فرآیند پواسن

۳.۱ فرآیند پواسن همگن

۴.۱ فرآیند تجدید

۱—۱ مقدمه

فرآیند پواسن مدلی مناسب برای تعداد حوادث در طول زمان است. از فرآیند پواسن به خصوص به عنوان مدل مراجعه به فروشگاه‌ها، درخواست مکالمات تلفنی از طریق مرکز تلفن، تعداد ذرات رادیواکتیو که به یک شمارشگر برخورد می‌کنند و نظایر این‌ها استفاده می‌شود. علاوه بر این این فرآیند نقش مهمی در مدل‌بندی زمان‌های خرابی سیستم‌های قابل تعمیر ایفا می‌کند.

در این فصل ابتدا به معرفی فرآیند پواسن و قضایای مربوط به آن پرداخته و سپس با فرآیند پواسن همگن و فرآیند تجدید و در پایان با متغیر تصادفی زمان بازگشتی پیشرو آشنا می‌شویم.

۱—۲ فرآیند پواسن

متغیر تصادفی X دارای توزیع پواسن است اگر تابع جرم احتمال آن به صورت زیر باشد

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!}; \qquad x=0,1,2,\cdots, \qquad \lambda>0$$

و می‌نویسیم $X \sim Po(\lambda)$. فرض می‌کنیم $N(t)$ تعداد خرابی‌ها را از زمان صفر تا لحظه t، و $N(a,b]$ تعداد خرابی‌ها را در بازه $(a,b]$ نشان دهند.

تعریف ۱.۱ فرآیند شمارشی $N(t)$، یک فرآیند پواسن نامیده می‌شود اگر

۱. $N(0)=0$

۲. برای هر $a<b\leq c<d$ متغیر تصادفی $N(a,b]$ و $N(c,d]$ مستقل باشند. به این خاصیت نموهای مستقل گویند.

۳. تابع λ وجود داشته باشد به طوری که

$$\lambda(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{P(N(t, t+\triangle t] = 1)}{\triangle t}.$$

تابع λ، تابع نرخ خطر فرآیند پواسن نامیده می‌شود.

۴.

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{P(N(t, t+\triangle t] \geq 2)}{\triangle t} = 0.$$

خاصیت چهارم می‌گوید که احتمال وقوع شکست‌های هم‌زمان ناچیز است.

قضیه ۱.۱ اگر $N(t)$ یک فرآیند پواسن با تابع نرخ خطر λ باشد، آن‌گاه

$$P(N(t) = n) = \frac{1}{n!}\Big(\int_0^t \lambda(x)dx\Big)^n \exp\Big(-\int_0^t \lambda(x)dx\Big), \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

نتیجه ۱.۱ در یک فرآیند پواسن، متغیر تصادفی $N(a, b]$ دارای توزیع پواسن با میانگین $\int_a^b \lambda(x)dx$ است.

قضیه ۲.۱ فرآیند شمارشی $N(t)$، یک فرآیند پواسن است اگر و تنها اگر

۱. $N(0) = 0$،

۲. با نموهای مستقل باشد،

۳. برای هر $a < b$، $N(a, b] \sim Po(\int_a^b \lambda(x)dx)$.

برای اثبات و جزئیات بیشتر در قضایای فوق به ریجن و باسو (۲۰۰۰) [1] مراجعه کنید.

[1] [15] Rigdon, S. E. and Basu, A. P.

۱—۳ فرآیند پواسن همگن

یک فرآیند پواسن با تابع نرخ خطر ثابت را فرآیند پواسن همگن گوئیم. این مدل ساده‌ترین نوع ممکن برای سیستم‌های قابل تعمیر است، اما باید با احتیاط به کار برده شود. به عنوان مثال از آن‌جایی که تابع نرخ خطر ثابت است، فرآیند پواسن همگن نمی‌تواند برای مدل‌بندی سیستمهایی که با گذشت زمان رو به بهبود هستند، مورد استفاده قرار گیرد. برای چنین سیستم‌هایی فرآیند پواسن با تابع نرخ خطر غیر ثابت کاربرد دارد.

فرآیند پواسن همگن با توزیع نمایی رابطه دقیقی دارد که در قضیه زیر نشان داده می‌شود.

قضیه ۳.۱ یک فرآیند، پواسن همگن با نرخ خطر λ است اگر و فقط اگر زمان بین خرابی‌ها مستقل و دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ باشند.

برای اثبات به ریجن و باسو (۲۰۰۰) [2] مراجعه شود.

۱—۴ فرآیند تجدید

زمان‌های بین دو خرابی (رخداد) متوالی برای فرآیند پواسن، متغیرهای تصادفی مستقل و توزیع مشترک آن‌ها نمایی است. حالت تعمیم یافته این مسئله فرآیند شمارشی است که در آن زمان‌های بین دو خرابی متوالی، مستقل و هم‌توزیعند ولی توزیع آن‌ها دلخواه است، این نوع فرآیند شمارشی به فرآیند تجدید معروف است.

[2] [15] Rigdon, S. E. and Basu, A. P.

تعریف ۲.۱ فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل نامنفی با توزیع مشترک F باشد، که X_n نشان دهنده زمان بین $(n-1)$امین و nامین خرابی است. با فرض $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, n \geq 1$ و $S_0 = 0$، $N(t)$ تعریف می‌شود

$$N(t) = Sup\{n; S_n \leq t\}.$$

که $N(t)$ تشکیل یک فرآیند تجدید را می‌دهد.

در این جا رابطه مهم زیر برقرار است

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t,$$

و اگر قرار دهیم $F_n(t) = p(S_n \leq t), t \geq 0$ آن‌گاه

$$M(t) = E(N(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} p(N(t) > n) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).$$

$M(t)$ به تابع تجدید معروف است.

در این راستا به معرفی قضیه تجدید و قضیه اساسی تجدید می‌پردازیم.

قضیه ۴.۱ اگر $\{X_i\}$ یک فرآیند تجدید با توزیع F و $\mu = E(X_1) < \infty$ باشد، آن‌گاه

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} M(t) = \frac{1}{\mu}.$$

برای اثبات به راس (۱۹۹۲) [3] مراجعه کنید.

[3] [16] Ross, S. M.