فهرست مندرجات

۱ مروری بر تحلیل پوششی داده‌ها ۱۱

۱—۱ پیشینه تاریخی تحلیل پوششی داده‌ها ۱۲

۱—۲ تعاریف و مفاهیم اولیه ۱۳
۱—۱.۲ تعریف تابع تولید : ۱۳
۱—۲.۲ تعریف مرز تولید ۱۴
۱—۳.۲ مزایای کاربردی تحلیل پوششی داده‌ها: ۱۴
۱—۴.۲ معایب تحلیل پوششی داده‌ها ۱۵
۱—۵.۲ مجموعه امکان تولید ۱۶

۱—۳ مفاهیم و تعاریف اولیه تحلیل پوششی داده‌ها ۱۷
۱—۱.۳ تعریف واحد تصمیم‌گیرنده ۱۷
۱—۲.۳ تعریف عامل ورودی ۱۸
۱—۳.۳ تعریف عامل خروجی ۱۸
۱—۴.۳ تعریف کارایی مطلق ۱۸
۱—۵.۳ تعریف کارایی پاراتو — کوپمن ۱۸
۱—۶.۳ تعریف مجموعه مرجع ۱۹
۱—۷.۳ تعریف کارای رأسی ۱۹
۱—۸.۳ تعریف کارای غیر رأسی ۱۹

۱—۴ مدل‌های پایه‌ای DEA ۱۹

۱—۱.۴ مدل CCR با ماهیت ورودی: ۲۰
۱—۲.۴ تعریف کارایی CCR ۲۱
۱—۳.۴ کارایی — CCR ، کارایی نسبی، کارایی تکنیکی ۲۲
۱—۴.۴ تعریف کارایی ضعیف ۲۲
۱—۵.۴ تعریف کارایی فارل ۲۳
۱—٦.۴ تعریف کارایی تکنیکی و ناکارایی تکنیکی ۲۳
۱—۷.۴ مدل CCR با ماهیت خروجی ۲۳

۱—۵ بازده به مقیاس ۲۴
۱—۱.۵ بازده به مقیاس CCR ۲۴

۲ مروری اجمالی برتخصیص منصفانه هزینه ۲٦

۲—۱ مقدمه‌ای برتخصیص هزینه ۲۷

۲—۲ تخصیص منصفانه هزینه‌های مشترک (کوک و کرس) ۲۷

۲—۳ تخصیص منصفانه هزینه‌های مشترک (جهانشاهلو) ۳۰

۲—۴ تخصیص منصفانه هزینه‌های مشترک (کوک وژو) ۳۱

۲—۵ تخصیص منصفانه هزینه‌های ثابت (لین) ۳۳

۲—٦ مراحل تخصیص هزینه از دیدگاه لین ۳۷

۲—۷ حالت خاص برای DMUهای کارا ۳۷

۳ مروری بر مقدمات زنجیره تأمین ۴۲

۳—۱ مقدمه ۴۳

۳—۲ زنجیره تأمین چیست؟ ۴۳

۳—۳ تعریف مدیریت زنجیره تأمین ۴۴
۳—۳—۱ اجزا و عوامل SCM(تأمین/تولید/توزیع) ۴۵

۳—۴ فازهای تصمیمی در یک زنجیره تأمین ۴۶

۳—۵ انواع زنجیره تأمین ۴۷

۳—۶ عوامل موثر بر عملکرد زنجیره تامین ۴۸

۳—۷ مدل سازی زنجیره تامین ۴۹
۳—۷—۱ مدل‌های کمی ۴۹
۳—۷—۲ مدل‌های شبکه‌ای ۵۰

۴ کاربرد تخصیص هزینه در زنجیره تأمین ۵۱

۴—۱ مقدمه ۵۲

۴—۲ DEA در ارزیابی عملکرد زنجیره تامین ۵۳

۴—۳ الگو برداری ۵۴
۴—۳—۱ انواع الگوبرداری ۵۴
۴—۳—۲ مراحل الگوبرداری ۵۵

۴—۴ اندازه‌گیری کارایی سیستم‌های دو عضوی ۵۵

۴—۵ مجموعه‌امکان‌تولیددرزنجیره‌تامین ۵۸
۴—۵—۱ زیرکامل مجموعه‌امکان‌تولیدزنجیره‌تامین ۶۰

۴—۲.۵ مجموعه‌امکان‌تولیدزیرکامل‌زنجیره‌تامین ۶۱

۴—۶ مدل ارزیابی عملکرد زنجیره تامین ۶۲

۴—۷ کاربرد مورد مطالعه ۶۴

۴—۸ زنجیره‌های تأمین چند عضوی ۶۸

۴—۹ نتیجه گیری از پایان نامه: ۷۳

لیست اشکال

۱.۱ یک واحد تصمیم‌گیرنده ۱۷

۱.۳ ساختار ساده از یک زنجیره تأ مین ۴۴

۲.۳ ساختار زنجیره‌ی تأمین و میزان پاسخگویی ۴۹

۱.۴ یک سیستم دوعضوی از زنجیره تامین ۵۶

۲.۴ یک زنجیره تامین دو عضوی با ورودی جدید اضافه شده ۶۵

لیست جداول

۱.۲ ۱۲ واحد تصمیم گیری ۳۹

۲.۲ تخصیص با روش کوک و کرس ۳۹

۳.۲ تخصیص با روش دکتر جهانشاهلو و همکاران ۴۰

۴.۲ تخصیص با روش کوک و ژو ۴۰

۵.۲ تخصیص با روش لین ۴۱

۱.۴ تخصیص با روش کوک و کرس در حالت اول ٦۹

۲.۴ تخصیص با روش دکتر جهانشاهلو در حالت اول ٦۹

۳.۴ تخصیص با روش کوک و ژو در حالت اول ۷۰

۴.۴ تخصیص با روش لین در حالت اول ۷۰

۵.۴ تخصیص با روش کوک و کرس در حالت دوم ۷۱

٦.۴ تخصیص با روش دکتر جهانشاهلو در حالت دوم ۷۱

۷.۴ تخصیص با روش کوک و ژو در حالت دوم ۷۲

۸.۴ تخصیص با روش لین در حالت دوم ۷۲

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) که اولین بار توسط چارنز [۱] با ارایه مدل CCR معرفی شد توسط بنکر[۲] با ارایه مدل BCC گسترش یافتَ مدل بسیار مفیدی در ارزیابی واحدهای مختلف صنعتی با مشاهده و تحلیل اطلاعات ورودی‌ها و خروجی‌ها می‌باشد. تخصیص منابع یا هزینه‌های ثابت در تحلیل پوششی داده‌ها در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. در بسیاری از موارد مربوط به تحلیل پوششی داده‌ها اغلب هزینه‌ها و یا منابع ثابت وجود دارد که روی واحدهای تصمیم‌گیری (DMU) اعمال می‌شوند. از طرفی مهم‌ترین مسئله که ذهن پژوهشگران را به خود مشغول کرده طراحی مدلی برای تخصیص منصفانه موارد مذکور می‌باشد. تخصیص منصفانه برای اولین بار طی مقاله‌ای توسط کوک و کرس [۳] بیان گردید. ایده‌ی اساسی بیان شده در این مقاله بر دو اصل استوار بود:

۱) اصل تغییر ناپذیری

۲) اصل حداقل پاراتو ورودی

با توجه به این مطلب، آنها تصمیم گرفتند که در تخصیص هزینه ثابت به هر DMU، سهم مشترکی از مجموع ورودی را در نظر بگیرند و با یک مثال تک ورودی — تک خروجی شروع به کار کردند ولی نتوانستند از این روش به طور مستقیم برای تخصیص روی DMUها استفاده کنند. پس از آن دکتر جهانشاهلو و همکارانش با مثال عددی نشان که روش کوک وکرس در اصل حداقل پاراتو ورودی صدق نمی کند و فرمول مشابهی را برای رسیدن به تخصیص هزینه بدون حل مسائل برنامه‌ریزی خطی پیچیده ارائه کردند. سپس کوک و ژو [۴] مقاله‌کوک و کرس را توسعه داده و در مقاله خود با عنوان تخصیص منابع و هزینه‌های مشترک به واحدهای تصمیم‌گیری (DMU) روشی برای چگونگی این تخصیص ارائه دادند.

ولی لین [۵] در مقاله خود با عنوان تخصیص هزینه و منابع ثابت و تنظیم اهداف با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها ثابت کرد که هنگامی که محدودیت جدیدی به مدل کوک و ژو

[۱] Charnes
[۲] Banker
[۳] Cook , Kress
[۴] Cook , Zhu
[۵] Ruiyue Lin

اضافه شود، این مدل دیگر جواب شدنی نخواهد داشت.
در این رساله سعی به بررسی مسئله تخصیص هزینه یا منابع ثابت با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها به عنوان مسئله‌ای پایه‌ای برگرفته از مقاله لین و کاربرد آن در زنجیره تأمین داریم.

زنجیره تأمین

بسیاری از سازمان‌ها، بنگاه‌ها و شرکت‌های دولتی و خصوصی که در صدد دستیابی به عملکرد مطلوب و کارایی بیشتر در حوزه

رقابتی بازار هستند، پتانسیل عملکرد زنجیره تأمین[1] را دریافته‌اند. از این رو در عصر رقابتی امروزی، تغییرات سریع در عرصه‌ی فعالیت‌های صنعتی، تجاری، اقتصادی و پیچیده‌تر شدن فضای رقابتی بین بنگاه‌ها و سازمان‌ها، آنها را بر آن داشته تا از ابزارها، استراتژی‌ها و رویکردهای نوینی جهت بهبود عملکرد و کارایی خود بهره بگیرند، به طوری که امروزه زنجیره تأمین یک شاخه مهم و زیربنایی در مدیریت تولید و خدمات است.
کسب توانمندی‌های رقابتی در جهان امروز به یکی از چالش‌های اساسی کشورهای مختلف در سطح بین‌المللی تبدیل شده است، به طوی که حساسیت نسبت به نیاز مشتریان و بررسی مداوم سلائق آنان، پاسخگویی و نوآوری، کیفیت بالای محصولات تولیدی و هم چنین خدمات رسانی را از توان شرکت خارج کرده است، بنابراین نیاز شدید به همکاری شرکت‌ها و سازمان‌های مرتبط با تولید محصول خاص و مدیریت یکپارچه‌سازی و هماهنگی بین آنها بیشتر از پیش در عرصه‌ی رقابتی بازار احساس می‌شود. زنجیره تأمین یکی از گزینه‌های موفق در پاسخگویی به این نیاز می‌باشد. در واقع زنجیره تأمین همه‌ی فعالیت‌های مرتبط با جریان و انتقال کالا از مرحله مواد خام تا مصرف محصول توسط مصرف کننده را شامل می‌شود و مدیریت زنجیره تأمین[2] در برگیرنده‌ی این فعالیت‌های تجاری به صورت یکپارچه است که از طریق آنها محصولات، خدمات و اطلاعاتی که برای مشتریان ارزش افزوده ایجاد می‌کند را تامین می‌نماید. هم چنین SCM بر منافع و مزیت‌های کلی و بلندمدت برای تمامی اعضاء زنجیره از طریق همکاری و تسهیم اطلاعات تاکید دارد. فرآیند توسعه ابزار سنجش عملکرد زنجیره تامین به علت پیچیدگی زنجیره تامین مشکل است. در سال‌های اخیر در اغلب کشورهای جهان برای ارزیابی عملکرد نهادها و دیگر فعالیت‌های رایج در

[1] Supply Chain
[2] Supply Chain Management

زمینه‌های مختلف، کاربردهای متفاوتی از تحلیل پوششی داده‌ها[1] دیده شده است. از این رو هدف ما در این رساله این است که گامی موثر در جهت تخصیص منصفانه هزینه‌ها یا منابع به ارگان‌های مختلف و نیز کاربرد آن در زنجیره تامین برداریم.

مواردی که در این پایان نامه مورد بررسی قرار گرفته است به شرح ذیل می‌باشد:

در فصل اول مروری بر تحلیل پوششی داده‌ها صورت گرفته و مدل‌های ابتدایی آن بیان شده است و در فصل دوم مقدمات تخصیص منصفانه هزینه یا منابع ثابت بیان گردیده است. در فصل سوم نگاهی اجمالی به زنجیره تامین داشته و سپس در فصل چهارم مدل‌های ارزیابی عملکرد زنجیره و کاربرد تخصیص هزینه در زنجیره تامین بیان گردیده است.

[1] Data envelopment analysis

فصل ۱

مروری بر تحلیل پوششی داده‌ها

۱–۱ پیشینه تاریخی تحلیل پوششی داده‌ها

در اواخر دهه ۷۰ میلادی تحلیل پوششی داده‌ها به وسیله چارنز و کوپر [۱] به عنوان یک روش برای تعیین کارایی نسبی واحدهای تصمیم گیرنده متجانس مطرح شد. در حقیقت این بحث از سال ۱۹۷۸ با پایان نامه دکتری رودز [۲] آغاز شد. او با راهنمایی‌های کوپر و چارنز، توسعه و پیشرفت تحصیلی مدارس ملی آمریکا را ارزیابی کرد. این مقاله که به مقاله CCR [۳] معروف است با تبدیل ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه یک واحد (بنگاه) به یک ورودی مجازی و یک خروجی مجازی، روش فارل را که براساس دو ورودی و یک خروجی ارائه شده بود، جامعیت بخشید، به گونه‌ای که فرآیند تولید با چند عامل ورودی و چند خروجی را در برمی‌گیرد.

این روش که عمدتاً به عنوان روش ارزیابی کارایی در جهان استفاده می‌شود، علاوه بر اندازه‌گیری کارایی، نوع بازده به مقیاس تولید را نیز ارائه می‌نماید.

در سال ۱۹۸۴ بنکر [۴]، چارنز و کوپر مدل دیگری را تحت عنوان BCC [۵] معرفی کردند.

پس از آن مدل‌های دیگری مانند مدل مضربی در سال ۱۹۸۲ و مدل جمعی در سال ۱۹۸۵ توسط چارنز و مدل نسبت مخروطی توسط چارنز، کوپر و وی‌هوانگ و مدل ناحیه اطمینان [۶] و ... در حوزه تحلیل پوششی داده‌ها ارائه شدند. [۷] در حال حاضر روش تحلیل پوششی داده‌ها یکی از حوزه‌های فعال تحقیقاتی در اندازه‌گیری کارایی بوده و به طور چشمگیری مورد استقبال پژوهشگران قرار گرفته است. در حقیقت این روش که بر مبنای برنامه‌ریزی خطی بنا

---

[۱] Charnes Cooper

[۲] Rudes

[۳] Charnes, Cooper , Rudes (CCR)

[۴] Banker

[۵] Banker,Charnes, Cooper (BCC)

[۶] Assurance Region

[۷] Forsund, F.R.Sarafoglou,N2000, on the origins of data envelopment analysis.

شده است به ما اجازه می‌دهد که واحدهایی که با بکارگیری ورودی‌های هم‌نوع، خروجی‌های هم‌نوع تولید می‌کنند را با هم مقایسه کنیم.

۱—۲ تعاریف و مفاهیم اولیه

۱—۱.۲ تعریف تابع تولید :

رابطه عملکرد با عوامل تأثیر گذار تابعی به صورت زیر می‌باشد:

$$y=f(u,v)$$

که در آن بردار ورودی[۱] (u,v) خروجی[۲] y را تولید می‌نماید. بردار ورودی از دو قسمت تشکیل شده است، u عوامل قابل کنترل و v عوامل غیرقابل کنترل می‌باشد. وقتی که از یک ترکیب از ورودی‌ها، ماکزیمم خروجی عاید گردد، یعنی y ماکزیمم خروجی باشد که از به کار بردن بردار ورودی (u,v) عاید گردد در این صورت می‌گوییم f تابع تولید[۳] می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تابع تولید، تابعی است که برای هر ترکیب از ورودی‌ها، ماکزیمم خروجی را بدهد.

در اغلب موارد تابع تولید در دست نیست و این به دلیل پیچیدگی فرآیند تولید، تغییر در تکنولوژی تولید و چند مقداره بودن تابع تولید می‌باشد. از این رو ناچاریم تقریبی از تابع تولید را در دست داشته باشیم. تعریف تابع تولید به دو صورت امکان‌پذیر است:

۱— روش پارامتری ۲— روش غیرپارامتری

---

[۱] Input

[۲] Output

[۳] Production function

۱ — ۲.۲ تعریف مرز تولید

حداکثر مقادیر خروجی‌هایی که به ازای مصرف ورودی‌ها بدست می آیند، مرز تولید [1] را به وجود می آورند.

۱ — ۳.۲ مزایای کاربردی تحلیل پوششی داده‌ها:

۱) امکان ارزیابی عملکرد و کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده با چندین ورودی و چندین خروجی.

۲) برخلاف برخی روش‌های عددی، مشخص بودن وزن‌ها از قبل و تخصیص آنها به ورودی‌ها و خروجی‌ها لازم نیست.

۳) نیاز به شکل تابع تولید از قبل تعیین شده (مانند روش رگرسیون آماری) و یا شکل صریح تابع تولید (مانند برخی از روش‌های پارامتری) نیست.

۴) امکان بکارگیری ورودی‌ها و خروجی‌های مختلف با مقیاس‌های اندازه‌گیری متفاوت.

۵) تحلیل پوششی داده‌ها فرصت‌های زیادی را برای همکاری میان تحلیل‌گر و تصمیم‌گیرنده ایجاد می‌کند. این همکاری‌ها می‌تواند در راستای ورودی وخروجی واحدهای تحت ارزیابی و چگونگی عملکرد و الگویابی نسبت به مرز کارا باشد.

٦) استفاده از کلیه مشاهدات گردآوری شده برای اندازه‌گیری کارایی: برخلاف رگرسیون که با میانگین‌سازی در مقایسه واحدها به بهترین عملکرد موجود در مجموعه واحدهای تحت بررسی دست می‌یابد، تحلیل پوششی داده‌ها هر کدام از مشاهدات را در مقایسه با مرز کارا بهینه می‌کند.

۷) فراهم آوردن یک شیوه‌ی اندازه‌گیری جامع و منحصر به فرد برای هر واحد که از ورودی‌ها (متغیرهای مستقل) برای ایجاد خروجی‌ها (متغیرهای وابسته) استفاده می‌کند.

---

[1] Production Frontier

۸) الگویابی نسبت به مرز کارا: میزان تغییرات ورودی‌ها و خروجی واحدهای ناکارا برای تصویر کردن آنها بر مرز کارا (منبع و مقدار ناکارایی برای هر ورودی و خروجی) رامی‌توان محاسبه نمود. در نتیجه علاوه بر تعیین میزان کارایی نسبی، نقاط ضعف واحدهای تصمیم‌گیرنده در شاخص‌های مختلف تعیین می‌شود و با ارائه میزان مطلوب آنها، خط مشی واحد تصمیم‌گیرنده را به سوی ارتقای کارایی و بهره‌وری مشخص می‌کند.

۹) ارائه مجموعه مرجع: الگوهای کارا که ارزیابی واحدهای ناکارا براساس آنها انجام گرفته است به واحدهای ناکارا معرفی می‌شوند و این دلیلی بر منصفانه بودن مقایسه در DEA خواهد بود.

۱ — ۴.۲ معایب تحلیل پوششی داده‌ها

۱) تحلیل پوششی داده‌ها به عنوان یک تکنیک بهینه‌سازی امکان پیشگیری خطا در اندازه‌گیری و سایر خطاها را ندارد.

۲) این تکنیک جهت اندازه‌گیری کارایی نسبی به کار گرفته شده و کارایی مطلق را نمی‌سنجد.

۳) تفاوت بین اهمیت ورودی‌ها و خروجی‌ها موجب انحراف در نتایج می‌گردد، اما با محدود سازی وزن‌های ورودی و خروجی این مشکل تا حدودی قابل رفع است.

۴) از آنجا که تحلیل پوششی داده‌ها تکنیکی غیرپارامتری است، انجام آزمون‌های آماری برای آن مشکل است.

۵) تعداد مدل‌های مورد نیاز و حل آنها به تعداد واحدهای تحت بررسی است که تاحدودی حجم محاسبات را افزایش می‌دهد.

٦) اضافه کردن یک واحد جدید به مجموعه واحدهای بررسی شده موجب تغییر در امتیاز کارایی تمامی واحدها می‌گردد.

۷) تغییر در نوع و تعداد ورودی‌ها ممکن است در نتایج ارزیابی تغییر دهد.

۸) با افزایش تعداد متغیرهای ورودی و خروجی، تعداد واحدهای کارا نیز افزایش می‌یابد.

۱ — ۵.۲ مجموعه امکان تولید

همانطوری که در بخش‌های قبل اشاره شد، به دلایل مختلف تابع تولید را نمی‌توان به راحتی محاسبه کرد. از این رو مجموعه‌ای به نام مجموعه امکان تولید [۱] می‌سازیم ولی آن را تقریبی از تابع تولید می‌گیریم. در واقع مجموعه امکان تولید شامل تمامی ترکیبات ممکن از ورودی‌ها و خروجی‌ها می‌باشد که با T نشان می‌دهیم و به صورت زیر بیان می‌شود:

$T = \{(x, y) \mid$ { بردار نامنفی x بتواند بردار نامنفی y را تولید کند.

که این مجموعه شامل n مشاهده به صورت (x_j, y_j) , $(j = ۱, \cdots, n)$ می‌باشد که بردار ورودی x_j، بردار خروجی y_j را تولید می‌کند. لازم به ذکر است که مجموعه T را طوری در نظر می‌گیریم که در اصول زیر صدق نماید:

۱ — اصل شمول مشاهدات: [۲] این اصل بیانگر آن است که تمام مشاهدات متعلق به مجموعه امکان تولید است ، یعنی

$$\forall\, j, \quad j = ۱, \cdots, n \quad (x_j, y_j) \in T$$

این اصل با هر تکنولوژی تولید قابل قبول است.

۲ — اصل بیکرانی اشعه: [۳] با قبول این اصل فرض می‌کنیم که تکنولوژی تولید بازده به مقیاس ثابت دارد، یعنی:

$$\forall\, (x, y), \forall \lambda, \lambda \geq ۰ ((x, y) \in T \Rightarrow (\lambda x, \lambda y) \in T)$$

۳ — اصل امکان پذیری: [۴] این اصل بیانگر آن است که اگر با ورودی x، خروجی y تولید شود، با ورودی بزرگتر یا مساوی x حداقل خروجی y تولید می‌شود و از ورودی x ، خروجی

[۱] Production Possibility Set (PPS)

[۲] Non-Empty

[۳] Ray Unboundness

[۴] Possibility

کمتر از y نیز می‌تواند تولید شود. یعنی:

$$\forall(x,y),\ \forall\bar{x}\ ,\ \forall\bar{y}\,[(x,y)\in T\ ,\ \bar{x}\geq x\ ,\ \bar{y}\leq y\Rightarrow(\bar{x},\bar{y})\in T]$$

۴– *اصل تحدب:* [۱] با پذیرفتن این اصل می‌پذیریم که هر ترکیب نامنفی از واحدهای متعلق به مجموعه امکان تولید، باز متعلق به خود مجموعه می‌باشد. یعنی:

$$\forall(x_j,y_j),(x_j,y_j)\in T, j=۱,\cdots,n\ \ ,\ \forall\lambda_j,\lambda_j\geq ۰\ ,\sum_{j=۱}^{n}\lambda_j=۱\Rightarrow(\sum_{j=۱}^{n}\lambda_j x_j,\sum_{j=۱}^{n}\lambda_j x_j)\in T$$

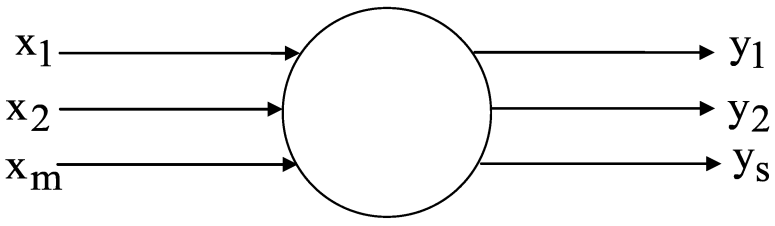
یعنی مجموعه T، محدب است.

۵– *اصل کمینه درون‌یابی* [۲]**:** با قبول این اصل می‌پذیریم که T کوچکترین مجموعه‌ای است که در اصول اول تا باچهارم صدق می‌نماید.

۱–۳ مفاهیم و تعاریف اولیه تحلیل پوششی داده‌ها

۱.۳–۱ تعریف واحد تصمیم‌گیرنده

منظور از یک واحد تصمیم‌گیرنده [۳] عبارت است از واحدی که با دریافت بردار ورودی مانند $X=(x_۱,\cdots,x_m)$ ، بردار خروجی مانند $Y=(y_۱,\cdots,y_n)$ را تولید نماید. (مطابق شکل ۱)



شکل ۱.۱: یک واحد تصمیم‌گیرنده

[۱] convexity

[۲] Minimality

[۳] Decision Making - Unit

۱—۲.۳ تعریف عامل ورودی

ورودی عاملی است که با افزایش آن و با حفظ تمام عوامل دیگر، کارایی DMU موردنظر کاهش می‌یابد.

۱—۳.۳ تعریف عامل خروجی

خروجی عاملی است که با افزایش آن و با حفظ تمام عوامل دیگر، کارایی DMU موردنظر افزایش می‌یابد.

۱—۴.۳ تعریف کارایی مطلق

فرض کنیم برای واحدهای تصمیم‌گیرنده خاص استاندارد جهانی برای یک واحد ورودی، خروجی برابر با y^* باشد، اگر واحد تصمیم‌گیرنده با مصرف یک واحد ورودی، $y_\circ$ واحد خروجی تولید کند، در این صورت کارایی مطلق [۱] θ_j به صورت زیر خواهد بود: $\theta_j = \frac{y_\circ}{y^*}$ حال اگر برای یک واحد تصمیم‌گیرنده، قیمت همه خروجی‌ها مشخص و هزینه همه ورودی‌های واحد معلوم باشد، کارایی از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\theta_j = \frac{u_1 y_1 + \cdots + u_s y_s}{v_1 x_1 + \cdots + v_m x_m}$$

که در آن u قیمت خروجی rام یعنی $(r = 1, \cdots, s)$ ، y_r و v هزینه ورودی iام یعنی $(i = 1, \cdots, m)$ ، x_i می‌باشد.

۱—۵.۳ تعریف کارایی پاراتو — کوپمن

DMU را کارایی پاراتو — کوپمن [۲] گویند اگر و تنها اگر امکان بهبود در هیچ یک از ورودی‌ها و خروجی‌ها بدون بدتر کردن سایر عوامل (ورودی‌ها، خروجی‌ها) امکان‌پذیر نباشد که به آن کارای کامل یا کارای قوی نیز می‌گویند.

---

[۱] pure efficiency

[۲] Paretokoopmans Efficiency

۱—۶.۳ تعریف مجموعه مرجع

در ارزیابی DMU مجموعه مرجع[۱] به صورت زیر تعریف می‌شود:

$E_j = \{DMU_j \mid DMU_j$ مثبت باشد در ارزیابی $\lambda_j^*\}$ حداقل در یکی از جواب‌های بهین

۱—۷.۳ تعریف کارای رأسی

DMU را کارای رأسی[۲] گویند اگر و تنها اگر $E = \{DMU_j\}$. یعنی مجموعه مرجع آن فقط خودش باشد.

۱—۸.۳ تعریف کارای غیر رأسی

DMU را کارای غیر رأسی گویند، اگر و تنها اگر به مفهوم پاراتو، کارا بوده و مجموعه مرجع آن حداقل دو عضو داشته باشد. به عبارتی جواب بهینه‌ای در ارزیابی کارایی DMU_j موجود باشد که $\lambda_j^* = ۰$

۱—۴ مدل‌های پایه‌ای DEA

یکی از مهم‌ترین روش‌های غیرپارامتری برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها است (DEA) که کاربرد متعددی در سنجش بهره‌وری و ارزیابی کارایی در واحدهای بیمارستانی، بانک‌ها، دانشگاه‌ها و ... دارد. ذیلاً به نمونه‌هایی از مدل‌های طراحی شده اشاره می‌کنیم:

---

[۱] Reference set

[۲] Extreme Efficiency

۱.۴—۱ مدل CCR با ماهیت ورودی:

فرض کنید که با فرض وجود تعدادی داده، می‌خواهیم n مسئله بهینه سازی را حل کنیم و در هر بار کارایی یک DMU را محاسبه کنیم. فرض کنید هدف ما محاسبه DMU_o , $\{o = ۱, \cdots, n\}$ باشد. اگر وزن‌های تخصیص داده شده به ورودی‌ها را با v_i , $(i = ۱, \cdots, m)$ و خروجی‌ها را u_r , $(r = ۱, \cdots, s)$ نشان دهیم، آنگاه فرم کسری مدل CCR برای محاسبه وزن‌ها به صورت ذیل خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
(FP_o)\max \quad & \theta = \frac{u_۱ y_{۱o} + u_۲ y_{۲o} + \cdots + u_s y_{so}}{v_۱ x_{۱o} + v_۲ x_{۲o} + \cdots + v_m x_{mo}}, \\
& s.t. \ \frac{u_۱ y_{۱j} + u_۲ y_{۲j} + \cdots + u_s y_{sj}}{v_۱ x_{۱j} + v_۲ x_{۲j} + \cdots + v_m x_{mj}} \leq ۱ \ , \ j = ۱, \cdots, n, \quad (۱—۱) \\
& v_۱, v_۲, \cdots, v_m \geq ۰ \ , \\
& u_۱, u_۲, \cdots, u_m \geq ۰ \ .
\end{aligned}
$$

در این مدل تابع هدف به نحوی است که v_iها و u_r های به دست آمده، این نسبت را برای DMU را حداکثر می‌کنند. فرم برنامه‌ریزی خطی مدل CCR به صورت زیر به دست می‌آید که فرم مضربی مدل CCR نام دارد:

$$
\begin{aligned}
(LP_o)\max \quad & \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{ro} \\
& \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{io} = ۱ \\
& \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij} \leq ۰ \quad , j = ۱, \cdots, n, \quad (۱—۲) \\
& v_i \geq ۰, \quad , i = ۱, \cdots, m, \\
& u_r \geq ۰, \quad , r = ۱, \cdots, s \ .
\end{aligned}
$$