بسم الله الرحمن الرحیم

الله نور السموات والارض

دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

دانشکده علوم پایه

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

گرایش ریاضی محض

عنوان:

# آنالیز و روش های عددی معادلات دیفرانسیل کسری تاخیری

استاد راهنما:

دکتر عزیزاله باباخانی

استاد مشاور:

دکتر سید هاشم رسولی

نگارش:

مینا طهماسبی بالی

شهریور ۱۳۹۲

خدایا من به ستایش تو آغاز سخن می کنم و زبان به تو می گشایم و بزرگواری تو را مدح می گویم در صورتیکه مدح و ثنای تو را حد و نهایت نیست.

مینا طهماسبی بالی - شهریور ماه ۱۳۹۲

تقدیم به

همه کسانی که لحظه ای بعد انسانی و وجدانی خود را فراموش نمی کنند و بر آستان گران سنگ انسانیت سر فرود می آورند و انسان را با همه تفاوت هایش ارج می نهند.

# چکیده:

در این پایان نامه، پس از معرفی مفاهیم مورد نیاز در فصل اول، معروف ترین تعاریف مشتق های کسری، یعنی، تعریف مشتق کسری گرونوالد-لتنیکوف، ریمان-لیوویل و کاپوتو را در فصل دوم مطرح می کنیم و سپس در پایان این فصل تبدیل لاپلاس معادلات دیفرانسیل کسری را ارائه می نماییم، که نقش مهمی را در فصل آخر دارد. در فصل سوم، کلاسی از معادلات دیفرانسیل کسری تاخیری خطی را در نظر می گیریم. همچنین، قضیه وجود و یکتایی و قضیه ای را نیز در مورد ناپیوستگی های مشتق ارائه می دهیم. به علاوه، وابستگی جواب روی پارامترهای معادله را مطرح کرده و در پایان با روش های عددی به حل چند مثال می پردازیم. در فصل چهارم، چندین روش آنالیزی و عددی برای تحلیل پایداری معادلات دیفرانسیل کسری تاخیری خطی ارائه شده است. که البته توجه اصلی روی پایداری مجانبی است، اما پایداری $(BIBO)$ نیز مطرح می شود. علاوه بر این، کاربرد تبدیل لاپلاس برای پایداری مجانبی، توام با معادله مشخصه متشابه، که کاملا در تحلیل پایداری $(BIBO)$ استفاده می شود را بررسی می کنیم.

**کلمات کلیدی :**

معادلات دیفرانسیل کسری تاخیری؛ مشتق و انتگرال کسری ؛ تابع میتاگ - لفلر؛ تبدیل لاپلاس؛ پایداری مجانبی، پایداری $(BIBO)$ ، اصل استدلال.

# فهرست مطالب

# فصل ۱

# مفاهیم اولیه و معرفی توابع خاص

## ۱.۱ مقدمه

توابع متعالی یکی از ابزارهای مهم و پایه ای در حساب کسری می باشند، که خواننده ی علاقمند به این شاخه از ریاضیات لازم است با این توابع و برخی از خواص آنها آشنا باشد. لذا در این فصل، پس از معرفی تعدادی از این توابع، نظیر توابع گاما، بتا، میتاگ لفلر و ... که در حل تحلیلی و عددی معادلات دیفرانسیل کسری مورد استفاده قرار می گیرند، به تعریف و بررسی حساب دیفرانسیل کسری و مباحث مربوط به آن می پردازیم. توابع متعالی دارای خواص بسیاری هستند، بدیهی است که اثبات و بیان تمام این خواص و قضایای مربوطه، از حوصله این رساله خارج است و بحث های تکمیلی این قسمت را می توان در منابع معرفی شده یافت.

## ۲.۱ تابع لگاریتم طبیعی و تابع نمائی

تابع لگاریتم به روش جبری، در سال ۱۶۱۴ توسط یک اسکاتلندی به نام جان نپر [۱] منتشر شد. اما ایجاد روش معمولی لگاریتم ها که از تغییر کم و بیش تابع اولیه لگاریتم نپر به وجود آمد، منسوب به تلاش مشترک نپر و هنری بیگز [۲] در سال ۱۶۲۴ می باشد. تابع لگاریتم طبیعی را می توان به صورت زیر تعریف نمود:

---

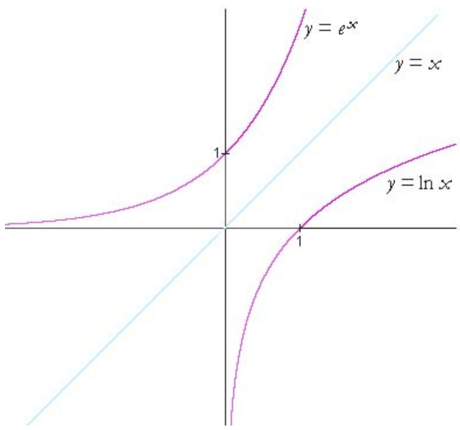
[۱] *John Napier*

[۲] *Henry Biggs*

$$\ln(y) = \int_{۱}^{y} \frac{۱}{t} dt, \qquad y > ۰ \tag{۱.۱}$$

که دامنه آن شامل تمام اعداد حقیقی مثبت است و همچنین در سراسر دامنه اش پیوسته و مشتق پذیر می باشد. بین تابع لگاریتم و وارون آن، رابطه ای به این صورت وجود دارد که اگر، $x = \ln y$ آنگاه $y = \exp(x) = e^x$ می شود.

یعنی برای هر تابع لگاریتمی، یک تابع نمایی وجود دارد که ما آنرا وارون تابع لگاریتمی می نامیم. مهم ترین خاصیت تابع نمائی این است که مشتق آن برابر خودش (در حالت کلی تر از جنس خودش) می باشد. این خاصیت، پایه و اساس روش های حل معادلات دیفرانسیل معمولی و همگن با ضرایب ثابت است. شکل ذیل نمونه ای از تابع لگاریتمی را به همراه معکوس آن یعنی تابع نمایی نشان می دهد.




شکل ۱: نمودار تابع لگاریتم و معکوس آن

## ۳.۱ تابع گاما

تابع گاما [۳] در اواخر سال ۱۷۲۰ جهت یافتن دنباله تحلیلی تابع فاکتوریل، توسط اویلر [۴] کشف شد. اویلر نمایش خود را به عنوان یک انتگرال نامتناهی و یک حد از حاصلضرب متناهی پایه گذاری کرد. بدین ترتیب، تابع گامای اویلر که تعمیمی از تابع فاکتوریل $(n!)$ است به عنوان یکی از توابع

[۳] *Gama*
[۴] *Euler*

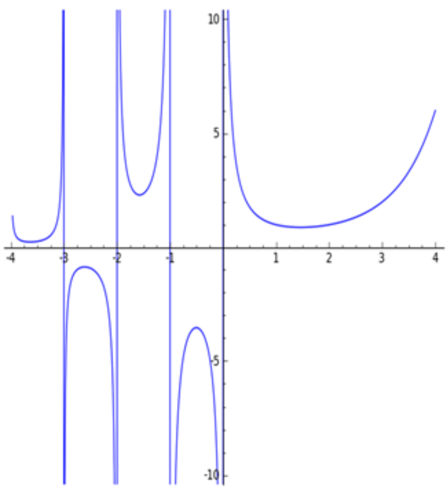
اساسی حساب دیفرانسیل کسری، این امکان را فراهم می کند که $n$، مقادیر غیرصحیح و حتی مختلط را بپذیرد. با وجود اینکه احتمالا خواننده با تابع گاما آشناست، اما معرفی این تابع را با تعریف ذیل شروع می کنیم.

## تعریف تابع گاما

تابع گاما $\Gamma(z)$ برای $z \in \mathbb{C}\backslash\{۰,-۱,-۲,...\}$ توسط انتگرال زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(z) = \int_{۰}^{\infty} e^{-t} t^{z-۱} dt, \tag{۲.۱}$$

این انتگرال، در نیمه راست صفحه مختلط یعنی $Re(z) = x > ۰$ همگرا می باشد. شکل ذیل نمودار تابع گاما را به ازای مقادیر حقیقی $x$ نشان می دهد.




شکل ۲ : نمودار تابع گاما به ازای مقادیر حقیقی $x$

### تعریفی دیگر از تابع گاما:

علاوه بر تعریف تابع گاما به صورت انتگرال، تعریف دیگری نیز همراه با نمایش حدی، با فرض اولیه $Re(z) > ۰$ ، برای تابع گاما موجود می باشد که به صورت ذیل نشان داده می شود:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+۱)(z+۲)...(z+n)}. \tag{۳.۱}$$

## برخی از خواص تابع گاما

شاید مهمترین خاصیت تابع گاما رابطه بازگشتی زیر باشد:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{4.1}$$

که با استفاده از انتگرال گیری به روش جزء به جزء به سادگی قابل اثبات است. به وضوح دیده می شود که $\Gamma(1) = 1$ ، حال با استفاده از رابطه بازگشتی تابع گاما برای $z = 2, 3, ...$ خواهیم داشت:

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$$
$$\vdots$$
$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$$

علاوه بر رابطه بازگشتی، از دیگر خواص مهم تابع گاما می توان به موارد زیر اشاره کرد :

- $\Gamma(z) > 0, \qquad z > 0,$
- $\Gamma(n+1) = n!, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$
- $\Gamma(z+n)\Gamma(-z-n+1) = (-1)^n\Gamma(z)\Gamma(1-z),$
- $\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}),$
- $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \qquad 0 < z < 1,$
- $\Gamma(1-z) = \frac{\pi z}{\Gamma(1+z)\sin \pi z}, \qquad 0 < z < 1,$
- $\frac{\Gamma(z+k)}{\Gamma(z)} = (z+k-1)...(z-1)z, \qquad z \in \mathbb{R}\backslash\{-\mathbb{N}_0\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$

دقت کنید، ما نماد فاکتوریل را حتی اگر $n$ یک عدد صحیح مثبت نباشد، به صورت $n! = \Gamma(n+1)$ تعریف می کنیم. آنگاه به عنوان مثال، ضرایب دو جمله ای را می توان بر حسب تابع گاما به صورت

زیر نوشت:

$$\binom{-z}{\xi}=\frac{\Gamma(۱-z)}{\Gamma(\xi+۱)\Gamma(۱-z-\xi)},$$

که در حالت خاص، اگر $\xi$ یک عدد صحیح نامنفی مانند $n$ باشد، آنگاه:

$$\binom{-z}{n}=\frac{\Gamma(۱-z)}{n!\Gamma(۱-z-n)}=(-۱)^n\frac{\Gamma(z+n)}{n!\Gamma(z)}=(-۱)^n\binom{z+n-۱}{n}.$$

## برخی از مقادیر خاص تابع گاما

- $\Gamma(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\pi},$
- $\Gamma(\frac{۳}{۲})=\frac{۱}{۲}\Gamma(\frac{۱}{۲})=\frac{\sqrt{\pi}}{۲},$

.

.

.

- $\Gamma(n+\frac{۱}{۲})=\frac{۱\cdot۳\cdot۵\cdots(۲n-۱)}{۲^n}\sqrt{\pi}.$

## ۴.۱ تابع پسی اویلر

یکی دیگر از موارد قابل توجه در مورد تابع گاما، مشتق این تابع می باشد. تابع پسی اویلر [۵] یا تابع دی ـ گاما، به عنوان مشتق لگاریتمی تابع گاما به صورت ذیل تعریف می شود:

$$\psi(z)=D\ln\Gamma(z)=\frac{D\Gamma(z)}{\Gamma(z)}=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)},\qquad z\neq-۱,-۲,... \tag{۵.۱}$$

در ذیل به چند مورد از خواص تابع پسی اویلر اشاره شده است: [۲۰]

- $\psi(z+۱)=\frac{۱}{z}+\psi(z),$

[۵] $psi-Euler$

- $\psi(1-z)-\psi(z)=\pi\cot(\pi z)$,

- $\psi(z)+\psi(z+1/2)+2\ln 2=2\psi(2z)$.

با استفاده از فرمول های فوق می توان مقادیر خاص ذیل از تابع پسی اویلر را به دست آورد.

$$\psi(1)=\Gamma'(1)=-\gamma,$$
$$\psi(\frac{1}{2})=-\gamma-\ln 4,$$
$$\psi(n+\frac{1}{2})=-\gamma-\ln 4+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1},$$

که $\gamma=0.57721566...$ ثابت اویلر است.

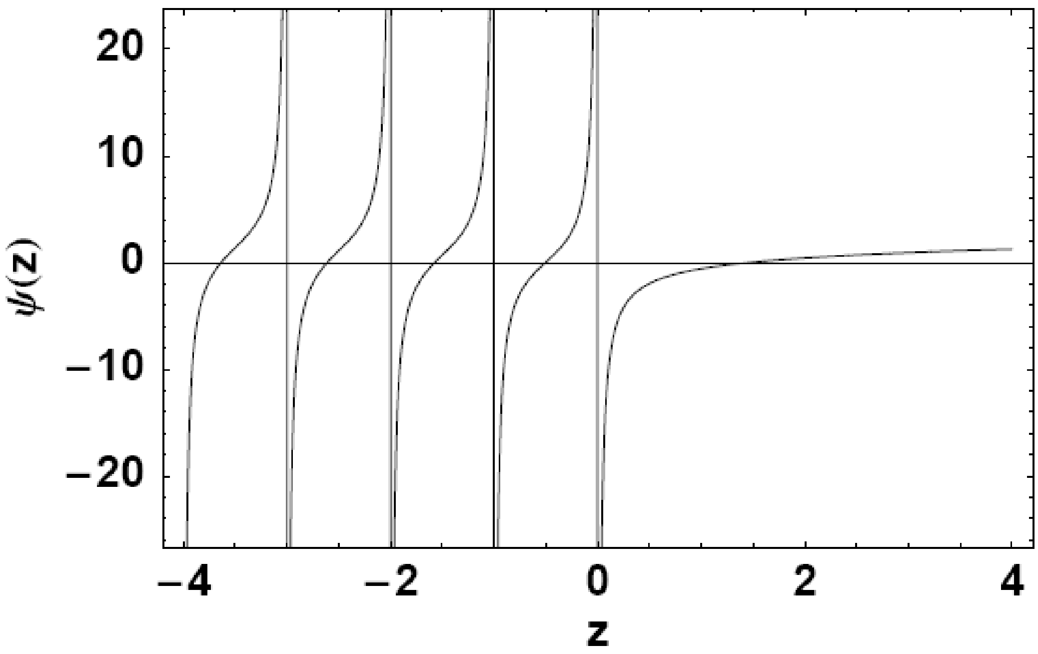
همچنین، اگر $z$ یک عدد صحیح نامنفی نباشد، $\psi(z+1)$ می تواند به صورت سری نامتناهی ذیل توسیع یابد:

$$\psi(z+1)=-\gamma+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z}{k(z+k)} \tag{۶.۱}$$

و در حالتی که $z$ ، یک عدد صحیح مثبت مانند $n$ باشد، رابطه (۶۰۱) به صورت سری متناهی ذیل نشان داده می شود:

$$\psi(n+1)=-\gamma+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}. \tag{۷.۱}$$

شکل ذیل نمودار تابع پسی-اویلر را در دامنه $-4\le z\le 4$ نشان می دهد:




شکل ۳: نمودار تابع پسی-اویلر

## ۵.۱ تابع گامای ناقص

از بین توابع متعالی که در حساب کسری مورد استفاده قرار می گیرند، تابع گامای ناقص [۶] و توابع مربوط به آن از اهمیت ویژه ای برخوردار هستند. به همین دلیل، این بخش به بررسی مختصری از این تابع مهم اختصاص یافته است. تابع گامای ناقص $\gamma^*(v,z)$ می تواند به صورت ذیل تعریف شود:

$$\gamma^*(v,z) = e^{-z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(v+k+1)}, \quad \nu, z \in \mathbb{C} \tag{۸.۱}$$

که یک تابع تام، هم نسبت به $z$ و هم نسبت به $v$ است، یعنی در تمام صفحه تحلیلی است. اگر $Re(z) > 0$، آنگاه $\gamma^*(v,z)$ دارای نمایش انتگرالی ذیل می باشد:

$$\gamma^*(v,z) = \frac{1}{\Gamma(v)z^v}\int_0^z t^{v-1}e^{-t}dt, \tag{۹.۱}$$

[۶] *Incomplete Gamma*

و

$$\lim_{z\to\infty} z^{v}\gamma^{*}(v,z)=1. \qquad (10.1)$$

## ۶.۱ تابع بتا

تابع بتا [۷] معروف به انتگرال نوع اول اویلر، یک رابطه مهم در حساب دیفرانسیل کسری می باشد. تابع بتا $B(z,w)$ کاملا مرتبط با تابع گاما می باشد. بنابراین، در بسیاری از موارد بهتر است بجای ترکیبی از مقادیر معین تابع گاما، از تابع بتا استفاده کنیم. اگر $Re(z)>0,\ Re(w)>0$ ، نمایش انتگرالی این تابع به صورت ذیل است:

$$B(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, \qquad (11.1)$$

با استفاده از رابطه فوق به آسانی می توان بدست آورد:

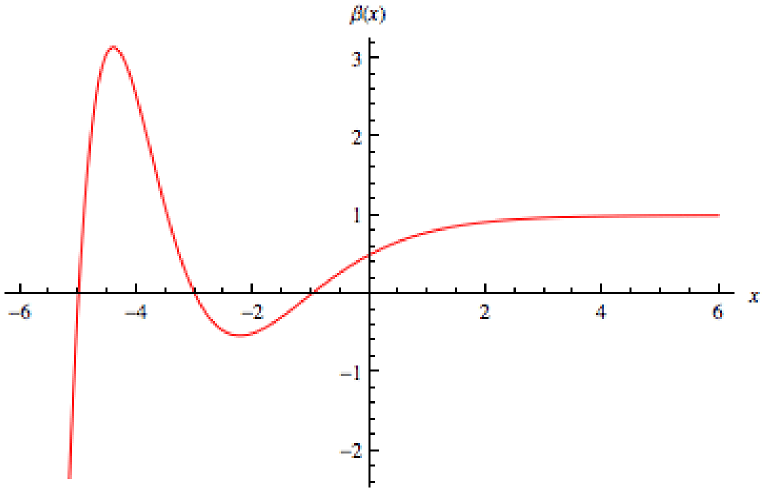
$$B(z,w)=B(w,z) \qquad (12.1)$$

زیرا با جایگذاری $t=1-s$ در (۱۱.۱) به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} B(z,w) &= -\int_1^0 (1-s)^{z-1}s^{w-1}ds \\ &= \int_0^1 s^{w-1}(1-s)^{z-1}ds=B(w,z). \end{aligned}$$

شکل ذیل نمودار تابع بتا را نشان می دهد:

[۷] $Beta$




شکل ۴: نمودار تابع بتا

ارتباط بین تابع بتا و تابع گاما را به آسانی می توان توسط قضیه ذیل نشان داد.

**قضیه ۱.۶.۱.**

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)},\qquad Re(z),Re(w)>۰. \tag{۱۳.۱}$$

*اثبات.* برای اثبات این قضیه از تعریف تابع گاما استفاده کرده و بدست می آوریم :

$$\Gamma(z)\Gamma(w)=\int_۰^\infty e^{-t}t^{z-۱}dt\int_۰^\infty e^{-s}s^{w-۱}ds=\int_۰^\infty\int_۰^\infty e^{-(t+s)}t^{z-۱}s^{w-۱}dtds.$$

حال، تغییر متغیر $t=xy$ و $s=x(۱-y)$ را برای انتگرال دوگانه به کار می بریم. توجه داشته باشید، $t+s=x$ و $۰<t<\infty$ و $۰<s<\infty$ ایجاب می کند که $۰<x<\infty$ و $۰<y<۱$ . ژاکوبین این تبدیل به صورت ذیل است:

$$\frac{\partial(t,s)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ ۱-y & -x \end{vmatrix}=-xy-x+xy=-x.$$

چون $x>۰$ نتیجه می گیریم که $dtds=\left|\frac{\partial(t,s)}{\partial(x,y)}\right|dxdy=x\;dx\;dy$.

از اینرو داریم:

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_۰^۱\int_۰^\infty e^{-x}x^{z-۱}y^{z-۱}x^{w-۱}(۱-y)^{w-۱}x\;dx\;dy\\ &= \int_۰^\infty e^{-x}x^{z+w-۱}dx\int_۰^۱ y^{z-۱}(۱-y)^{w-۱}dy=\Gamma(z+w)B(z,w).\end{aligned}$$

□

همچنین، به کمک تابع بتا می توان خواصی از تابع گاما را بدست آورد. یکی از این خواص، که با استفاده از تابع بتا به آسانی قابل دستیابی است و در بخش قبل نیز به آن اشاره شد، خاصیت ذیل می باشد:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

در حالت خاص، اگر $z=\frac{1}{2}$ ، رابطه معروف $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ حاصل می شود که برای محاسبه مقدار تابع گاما، در بسیاری از نقاط مورد استفاده قرار می گیرد.
خاصیت دیگر تابع گاما که به سادگی از تابع بتا نتیجه می شود، فرمول لژاندر است:

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}2^{2z-1}\Gamma(2z),\quad 2z\neq 0,-1,-2,...$$

در اینجا از بیان اثبات این معادلات خودداری کرده ایم، اما علاقمندان به مطالعه روند اثبات خواص گفته شده، می توانند به مرجع [1] رجوع نمایند.

## ۷.۱ تابع میتاگ-لفلر

تابع

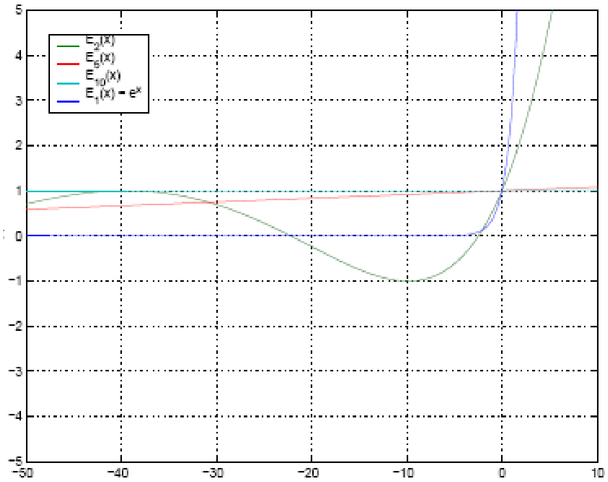
$$E_{\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1+k\alpha)},\qquad \alpha\geq 0, z\in\mathbb{C}, \tag{۱۴.۱}$$

که تعمیمی از تابع نمایی $e^z$ می باشد، در سال ۱۹۰۲ توسط ریاضیدان سوئدی به نام میتاگ-لفلر [8] در رابطه با روش او از جمع سری های واگرا ارائه شد و به تابع یک- پارامتری میتاگ-لفلر شهرت یافت. بررسی خواص این تابع و کاربردهایش با استفاده از تکنیک تبدیل لاپلاس، توسط آگاروال [9] و هامبرت [10] بدست آمد. علاوه بر این، تعمیم مهم

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\quad (\alpha>0,\beta>0)\quad \beta\in\mathbb{R},\quad z\in\mathbb{C}. \tag{۱۵.۱}$$

[8] $Mittag-Leffler$
[9] $Agarwal$
[10] $Humbert$

توسط آگاروال معرفی شد. با وجود اینکه این تابع می توانست تابع آگاروال نامیده شود، اما آگاروال و هامبرت با بلند نظری همان اصطلاح تابع یک - پارامتری میتاگ-لفلر را بکار بردند، و این دلیلی است که اکنون تابع دو - پارامتری، تابع میتاگ - لفلر نامیده می شود. شکل ذیل تابع میتاگ-لفلر را به ازای مقادیر مختلف $\alpha$ نشان می دهد.




شکل ۵: نمودار تابع میتاگ-لفلر به ازای مقادیر مختلف $\alpha$

در بالا اشاره کردیم که تابع میتاگ-لفلر تعمیمی از تابع نمایی است، در ذیل نشان می دهیم که با قرار دادن $\alpha = \beta = ۱$ در تابع دو پارامتری میتاگ-لفلر به تابع نمایی $e^z$ می رسیم.

$$E_{۱,۱}(z) = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+۱)} = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

و به همین ترتیب می توان مثال های زیر را استخراج کرد:

$$E_{۱,۲}(z) = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+۲)} = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{z^k}{(k+۱)!} = \frac{۱}{z}\sum_{k=۰}^{\infty} \frac{z^{k+۱}}{k+۱} = \frac{e^z - ۱}{z},$$

$$\vdots$$

$$E_{۱,m}(z) = \frac{۱}{z^{m-۱}}\left\{e^z - \sum_{k=۰}^{m-۲} \frac{z^k}{k!}\right\},$$

$$E_{۲,۱}(z) = \cosh(\sqrt{z}),$$

$$E_{۲,۲}(z) = \frac{\sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}},$$

$$E_{\frac{۱}{۲},۱}(z) = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\frac{k}{۲}+۱)} = e^{z^۲} erfc(-z), \qquad erfc(z) = \frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty} e^{-t^۲}dt.$$

همچنین لازم به ذکر است که اگر در تابع دو پارامتری میتاگ-لفلر $\beta = 1$ قرار گیرد، تابع یک پارامتری میتاگ-لفلر بدست می آید:

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \equiv E_\alpha(z). \tag{۱۶.۱}$$

## ۸.۱ تبدیل لاپلاس

از تبدیل لاپلاس، عموما در حل معادلات شامل تابع دیراک، توابع ناپیوسته که بر حسب تابع هویساید بیان می گردند و معادلات انتگرالی استفاده می شود.

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برای $0 \leq t < \infty$ ، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = F(s) \tag{۱۷.۱}$$

که به طور مختصر با نماد $\mathcal{L}$ نشان داده می شود.

نماد $\mathcal{L}$ مشخص می سازد که انتگرال گیری همیشه روی فاصله $t = 0$ تا $t = \infty$ پیش می رود و انتگرال به جای $dt$ همیشگی، شامل تابع اولیه $e^{-st}dt$ است. این تفاوت های جزیی است که انتگرال لاپلاس را از انتگرال های معمولی برتر می سازد.

البته برای وجود تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ ، یک سری شرایطی وجود دارد که در ذیل به آنها اشاره می کنیم:

۱- تابع $f(t)$ باید از مرتبه نمایی باشد، یعنی بتوان اعداد حقیقی ثابتی چون $M$ و $\alpha$ یافت بطوریکه برای $t > 0$ داشته باشیم $|f(t)| < Me^{\alpha t}$ .

به عبارت دیگر وقتی $t \to \infty$، سرعت افزایش تابع $f(t)$ ، سریع تر از سرعت افزایش تابع $e^{\alpha t}$ نباشد.

**نکته:** کلیه توابع کراندار، توابع چند جمله ای، تابع $e^{at}$، توابع $\sinh at$ و $\cosh at$ از مرتبه نمایی می باشند.

۲- تابع $f(t)$ باید در فاصله $[0, \infty)$ قطعه به قطعه پیوسته باشد، یعنی اولا تعداد نقاط ناپیوستگی های تابع، در هر فاصله متناهی بوده و ثانیا در هر یک از نقاط ناپیوستگی، تابع دارای حدود چپ و راست باشد.

لازم به ذکر است که شرایط فوق، شرایط کافی برای همگرایی انتگرال هستند و جزء شرایط لازم نمی باشند. برای مثال تابع $\frac{1}{\sqrt{t}}$ در $t = 0$ دارای حد راست نیست، اما با این وجود دارای تبدیل لاپلاس می باشد.

همچنین به خوبی می دانید که با داشتن تبدیل لاپلاس یعنی $F(s)$ می توان تابع $f(t)$ را به دست آورد، که این کار توسط معکوس تبدیل لاپلاس انجام می شود.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}F(s) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}F(s)ds, \qquad c = Re(s) > c_0,$$

که در آن، $c_0$ در نیم صفحه راست همگرایی مطلق انتگرال لاپلاس واقع است.

اینک برخی از خواص تبدیل لاپلاس را در قالب قضایای بدون اثبات مطرح می کنیم. اثبات قضایای ذیل در بسیاری از کتاب های معادلات دیفرانسیل معمولی آمده است.

**قضیه ۱.۸.۱.** *از جمله خواص اساسی تبدیل لاپلاس عبارتند از :*

$$\mathcal{L}(f(t) + g(t)) = \mathcal{L}(f(t)) + \mathcal{L}(g(t)); \tag{۱۸.۱}$$

$$\mathcal{L}(cf(t)) = c\mathcal{L}(f(t)). \tag{۱۹.۱}$$

**قضیه ۲.۸.۱.** *فرض کنید $y(t)$ پیوسته و از مرتبه نمایی باشد، و همچنین فرض کنید که $y'(t)$ روی $t \geq 0$ تکه ای پیوسته باشد. آنگاه $\mathcal{L}(y'(t))$ وجود دارد و*

$$\mathcal{L}(y'(t)) = s\mathcal{L}(y(t)) - y(0). \tag{۲۰.۱}$$

**قضیه ۳.۸.۱.** *فرض کنید $g(t)$ برای $t \geq 0$ ، پیوسته و از مرتبه نمایی باشد، آنگاه*

$$\mathcal{L}(\int_0^t g(x)dx) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(g(t)). \tag{۲۱.۱}$$

**قضیه ۴.۸.۱.** *فرض کنید $f(t)$ از مرتبه نمایی باشد، آنگاه*

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f(t)). \tag{۲۲.۱}$$