دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش جبر

جبرهای خوشه‌ای- پنهانی

استاد راهنما

آقای دکتر علیرضا نصر اصفهانی

پژوهشگر

سمیه صادقی

چکیده

جبرهای خوشه‌ای-اریب، حلقه‌های درون‌ریختی از اشیاء اریب T در رسته‌های خوشه‌ای هستند. یک جبر خوشه‌ای-اریب را، خوشه‌ای-پنهانی نامیم، هرگاه T یک مدول پیش تصویری و اریب باشد؛ برای مثال، همه‌ی جبرهای خوشه‌ای-اریب نمایش متناهی، جبرهای خوشه‌ای پنهانی هستند. در این پایان نامه نشان می‌دهیم که اگر C یک جبر خوشه‌ای-اریب نمایش متناهی باشد، آن‌گاه C-مدول‌های تجزیه ناپذیر توسط بردارهای بعدی مشخص می‌شوند.

واژگان کلیدی: جبرهای خوشه‌ای-اریب، جبرهای نمایش متناهی، بردارهای بعدی، جبرهای پنهانی، رسته‌ی ماتریس‌ها و زوج تابی.

فهرست مطالب

فهرست نمادها

مقدمه

در سال ۲۰۰۲، فومین[۱] و زیلوینسکی[۲] مفهوم جبرهای خوشه‌ای را برای ایجاد یک ساختار ترکیبیاتی در مطالعه‌ی پایه‌های کانونی در گروه‌های کوانتوم و گروه‌های جبری در [۱۲]، معرفی کردند. آن‌ها در یک سری از مقالات، نظریه‌ی جبرهای خوشه‌ای را گسترش دادند. این نظریه در سال‌های اخیر یک اثر بسیار شدید روی نظریه نمایش جبرها داشته است. اولین ارتباط آن با نمایش‌های کویور در [۲۰]، توسط مارش[۳]، راینیکه[۴] و زیلوینسکی حدس زده شد. سپس در سال ۲۰۰۶، رسته‌های خوشه‌ای توسط بوآن[۵]، مارش، راینیکه، ریتن [۶] و تودورو [۷] در [۷]، معرفی شدند. برای این هدف، نظریه‌ی اریب در رسته‌های خوشه‌ای گسترش پیدا کرد و این پیشرفت باعث شد که جبرهای خوشه‌ای-اریب معرفی شوند. جبرهای خوشه‌ای-اریب توسط بوآن، مارش و ریتن در [۸]، معرفی شدند. نظریه‌ی جبرهای خوشه‌ای-اریب و رسته‌های خوشه‌ای به نظریه‌ی اریب معمولی بسیار نزدیک است و بسیاری از نتایج در آن از نظریه‌ی اریب معمولی الهام می‌شود.

در مورد جبرهای خوشه‌ای، مسائل باز زیادی وجود دارد. یکی از مسائلی که وجود دارد، این

[۱] Fomin

[۲] Zelevinsky

[۳] Marsh

[۴] Reineke

[۵] Buan

[۶] Reiten

[۷] Todorov

است که آیا یک خوشه در جبر خوشه‌ای به طور یکتا توسط مخرج آن مشخص می‌شود یا نه؟ این سؤال در نظریه نمایش معادل این است که آیا مدول‌های تجزیه ناپذیر روی جبرهای خوشه‌ای-اریب نمایش متناهی، به طور یکتا توسط بردارهای بعدی مشخص می‌شوند یا نه؟ هدف ما در این پایان‌نامه پاسخ به این سؤال می‌باشد. در واقع نشان می‌دهیم که اگر C یک جبر خوشه‌ای-اریب نمایش متناهی باشد، آن‌گاه C-مدول‌های تجزیه ناپذیر به طور یکتا توسط بردارهای بعدی مشخص می‌شوند.

این پایان‌نامه که بر اساس مرجع [۲۱]، تدوین شده است، مشتمل بر پنج فصل می‌باشد.

فصل اول در هشت بخش تنظیم گردیده است. بخش‌های اول تا پنجم، شامل مفاهیم اولیه و مقدماتی است که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در بخش ششم، ابتدا به تعریف کویور می‌پردازیم و ارتباط آن با یک K-جبر با بعد متناهی را بررسی می‌کنیم. در بخش هفتم، مطالبی از نظریه‌ی اسلاندر-ریتن[۸] را بیان می‌کنیم و در بخش هشتم مفهوم جبر موروثی و قضایای مربوط به آن‌را بیان می‌کنیم.

فصل دوم، شامل چهار بخش می‌باشد. در بخش اول برخی مطالب مقدماتی برای تعریف کلاسی از مدول‌ها که نقش بسیار مهمی در نظریه نمایش جبرهای با بعد متناهی دارند، به نام مدول‌های اریب، آورده شده است. در بخش دوم مدول‌های اریب را معرفی می‌کنیم و در بخش سوم که مهمترین بخش این فصل می‌باشد، به مقایسه‌ی رسته‌ی مدول‌های دو جبر با بعدهای متناهی می‌پردازیم. در بخش چهارم محمل یک مدول را تعریف می‌کنیم و با استفاده از آن خاصیتی به نام خاصیت انفصال را که در فصل ۴ مورد استفاده قرار می‌گیرد، به دست می‌آوریم.

فصل سوم، شامل چهار بخش می‌باشد. هدف ما در این فصل، تعریف جبرهای خوشه‌ای-اریب است. برای این منظور باید رسته‌های خوشه‌ای تعریف شوند که تعریف آن مستلزم تعریف رسته‌های مشتق شده، رسته‌های مثلثی و رسته‌های هموتوپی است که در بخش‌های این فصل، آن‌ها را بیان می‌کنیم.

[۸] Auslander-Reiten

فصل چهارم، که مهمترین فصل این پایان‌نامه است، شامل هفت بخش می‌باشد. در بخش اول این فصل، ابتدا رسته‌ی E-ماتریس‌ها را معرفی می‌کنیم که در آن E یک دومدول است، سپس فرم دوتایی r_E را روی آن تعریف می‌کنیم. در بخش‌های دوم تا ششم، دو رسته‌ی ماتریسی با دومدول‌های $E_۱ = \mathrm{Ext}^۱_A(-,-)$ و $E_۲ = \mathrm{Hom}_A(-,-)$ را معرفی و خواص آن‌را بررسی می‌کنیم. در بخش هفتم، که مهمترین بخش این فصل است و با استفاده از قضیه‌ای در [۹]، نشان می‌دهیم که یک رابطه‌ی دوسویی بین اشیاء تجزیه ناپذیر در جبر A و اشیاء تجزیه ناپذیر در جبر خوشه‌ای-اریب C وجود دارد.

فصل پنجم، شامل دو بخش می‌باشد. در بخش اول مفهوم بردار بعدی، فرم درجه دوم اویلر، فرم صحیح و فرم دوتایی کویور Q را معرفی می‌کنیم و در انتها قضیه‌ی اصلی را ثابت می‌کنیم. در بخش دوم، مثالی را با تمام جزئیات مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

در این پایان نامه، فرض می‌کنیم K یک میدان بسته جبری است و همواره فضاهای برداری روی میدان بسته جبری K در نظر گرفته می‌شوند.

۱.۱ K-جبر و مدول

تعریف ۱.۱.۱. حلقه‌ی یکدار A را یک K-جبر گوییم، هرگاه A یک K-فضای برداری باشد و هم‌چنین برای هر $\lambda \in K$ و $a, b \in A$ داشته باشیم:

$$\lambda(ab) = (a\lambda)b = a(\lambda b) = (ab)\lambda.$$

هم‌چنین بعد A به عنوان K-فضای برداری را، بعد K-جبر A، در نظر می‌گیریم.

اگر B یک زیرفضای برداری از K-جبر A باشد، به طوری‌که $1_A \in B$ و برای $b, b' \in B$، $bb' \in B$، آن‌گاه B را یک K-زیرجبر A گوییم.

مثال ۲.۱.۱. اگر A یک K-جبر باشد و $n \in \mathbb{N}$، آن‌گاه مجموعه‌ی $\mathbb{M}_n(A)$، شامل تمام ماتریس‌های $n \times n$ با ضرایب در A، نیز یک K-جبر است.

مثال ۳.۱.۱. فرض کنیم A یک K-جبر باشد. جبر مخالف A^{op} از A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. مجموعه عناصر A^{op} همان مجموعه عناصر A است، جمع و ضرب اسکالر نیز، همان جمع و ضرب اسکالر A است با این تفاوت که ضرب حلقه‌ای $*$ در A^{op} به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\forall a, b \in A^{\text{op}} \quad a * b := ba.$$

در این صورت A^{op} یک K-جبر می‌باشد.

تعریف ۴.۱.۱. الف) زیرفضای برداری I از K-جبر A را یک ایده‌آل راست A گوییم، هرگاه برای هر $i \in I$ و $a \in A$ داشته باشیم $ia \in A$.

ب) زیرفضای برداری I از K-جبر A را یک ایده‌آل چپ A گوییم، هرگاه برای هر $i \in I$ و $a \in A$ داشته باشیم $ai \in A$.

ج) اگر I هم ایده‌آل راست باشد و هم ایده‌آل چپ، آن‌گاه I را ایده‌آل دو طرفه گوییم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم A یک K-جبر باشد. اشتراک تمام ایده‌آل‌های راست ماکسیمال A را، رادیکال A نامیم و با نماد $\text{rad}\, A$ نشان می‌دهیم.

تذکر ۶.۱.۱. طبق لم ۱.۳ فصل ۱ از [۲]، رادیکال A برابر اشتراک تمام ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال A است، لذا $\text{rad}\, A$ ایده‌آلی دو طرفه از A است.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم A یک K-جبر باشد. یک A-مدول راست، یک زوج $(M, \cdot)$ است، که در آن M یک K-فضای برداری و $\cdot : M \times A \longrightarrow M$ به طوری‌که $(m, a) \mapsto ma$ یک عمل دوتایی است، که برای هر $a, b \in A$، $x, y \in M$ و $\lambda \in K$ در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱) $(x+y)a = xa + ya$،

۲) $x(a+b) = xa + xb$،

۳) $x(ab) = (xa)b$،

۴) $x1 = x$،

۵) $(x\lambda)a = x(a\lambda) = (xa)\lambda$.

در این حالت بعد M به عنوان K-فضای برداری را بعد مدول M، در نظر می‌گیریم.

معمولاً به جای نوشتن $(M, \cdot)$ می‌نویسیم M یا M_A. یک A-مدول چپ نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم A و B دو K-جبر باشند. یک $A-B$-دومدول، یک سه تایی $_AM_B = (M, *, \cdot)$ می‌باشد، به‌طوری‌که $_AM = (M, *)$ یک A-مدول چپ، $M_B = (M, \cdot)$ یک B-مدول راست است و برای هر $m \in M$، $a \in A$ و $b \in B$، $(a*m)\cdot b = a*(m\cdot b)$.
برای سادگی به جای نوشتن $a*m$ و $m\cdot b$، می‌نویسیم am و mb.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم M و S دو A-مدول چپ باشند.

الف) زیرفضای برداری M' از M را یک زیرمدول M گوییم، هرگاه برای هر $a \in A$ و $m \in M'$، $am \in M'$.

ب) مدول S را ساده گوییم، هرگاه S غیر صفر باشد و تنها زیرمدول‌های آن، مدول‌های بدیهی صفر و S باشند.

تعریف ۱۰.۱.۱. عناصر $m_1, \cdots, m_s \in M$ را مولدهای A-مدول چپ M گوییم، هرگاه برای هر $m \in M$، عناصر $a_1, \cdots, a_s \in A$ موجود باشند، به طوری‌که $m = a_1m_1 + \cdots + a_sm_s$.
اگر M دارای تعداد متناهی مولد باشد، آن‌گاه M را با تولید متناهی می‌نامیم.

به آسانی می‌توان دید که اگر K-جبر A با بعد متناهی باشد، آن‌گاه A-مدول چپ M با تولید متناهی است اگر و فقط اگر دارای بعد متناهی باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم M و N دو A-مدول چپ باشند. نگاشت $h : M \longrightarrow N$ را یک همریختی A-مدولی (یا به طور ساده‌تر A-همریختی) نامیم، هرگاه برای هر $m_۱, m_۲ \in M$ و $a \in A$ داشته باشیم :

$$h(m_۱ + m_۲) = h(m_۱) + h(m_۲),$$

$$h(am) = ah(m).$$

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم M یک A-مدول چپ باشد.

الف) زنجیر

$$۰ = M_۰ \subsetneqq M_۱ \subsetneqq \ldots \subsetneqq M_n = M$$

از زیرمدول‌های M را که از صفر شروع و به M ختم می‌شود، زنجیر سره از زیرمدول‌های M می‌نامیم و n را طول زنجیر تعریف می‌کنیم. اگر به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، مدول‌های خارج قسمتی $M_i/M_{i-۱}$ ساده باشند، زنجیر را سری ترکیبی برای M می‌نامیم و مدول‌های ساده $M_i/M_{i-۱}$ را فاکتورهای سری ترکیبی می‌نامیم.

ب) اگر M دارای سری ترکیبی باشد، M را با طول متناهی می‌نامیم.

۲.۱ رسته و تابعگون

تعریف ۱.۲.۱. یک رسته‌ی $\mathcal{C}$ عبارت است از:

۱) کلاسی از اشیاء که با نمادهای X، Y، Z و ... نمایش داده می‌شوند،

۲) به هر دو شیء X و Y، مجموعه $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ متناظر می‌شود، به طوری‌که برای هر چهار شیء X، Y، X' و Y' در $\mathcal{C}$ به طوری‌که $(X, Y) \neq (X', Y')$، داشته باشیم

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y') = \varnothing.$$

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ را مجموعه ریخت‌هایی از X به Y می‌نامیم و هر ریخت f در $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ را به صورت $f: X \longrightarrow Y$ نمایش می‌دهیم.

۳) برای هر سه شیء X، Y و Z، عمل ترکیب به صورت

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$$
$$(g,f) \longmapsto g \circ f$$

می‌باشد، به طوری‌که

الف) هرگاه $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$، $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ و $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,D)$، آن‌گاه

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

ب) برای هر شیء X در رسته $\mathcal{C}$، ریخت $۱_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ موجود باشد، به طوری‌که برای هر $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ و $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X)$، $f \circ ۱_X = f$ و $۱_X \circ g = g$.

تذکر ۲.۲.۱. معمولاً به جای نوشتن $g \circ f$، می‌نویسیم gf.

مثال ۳.۲.۱. الف) رسته‌ی A-مدول‌های چپ ($\mathrm{Mod}\ A$):

اشیاء در رسته‌ی $\mathrm{Mod}\ A$: کلاس تمام A-مدول‌های چپ می‌باشد،

ریخت‌ها در این رسته: برای هر دو A-مدول X و Y، $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\ A}(X,Y)$ مجموعه A-همریختی‌ها از X به Y است.

عمل ترکیب ریخت‌ها: همان ترکیب معمولی توابع است.

ب) رسته‌ی A-مدول‌های چپ با تولید متناهی ($\mathrm{mod}\ A$):

اشیاء در رسته‌ی $\mathrm{mod}\ A$: کلاس تمام A-مدول‌های چپ با تولید متناهی می‌باشد، ریخت‌ها و عمل ترکیب ریخت‌ها، همانند قسمت (الف) می‌باشد.

ج) رسته‌ی مجموعه‌ها (Sets):

اشیاء در رسته‌ی Sets: تمام مجموعه‌ها

ریخت‌ها در این رسته: برای دو مجموعه X و Y در Sets، $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(X,Y)$ مجموعه‌ی تمام توابع از X به Y است.

عمل ترکیب ریخت‌ها: همان ترکیب معمولی توابع است.

تعریف ۴.۲.۱. رسته‌ی $\mathcal{C}'$ یک زیررسته از رسته‌ی $\mathcal{C}$ می‌باشد، هرگاه

۱) اشیاء رسته‌ی $\mathcal{C}'$ از اشیاء رسته‌ی $\mathcal{C}$ باشند،

۲) برای هر دو شیء X و Y در رسته‌ی $\mathcal{C}'$، $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$،

۳) اگر $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y)$ و $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y,Z)$، آن‌گاه ترکیب $gf \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Z)$ برابر است با ترکیب $gf \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$،

۴) اگر X شیئی در رسته‌ی $\mathcal{C}'$ باشد، آن‌گاه ریخت همانی $۱_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,X)$ برابر است با ریخت همانی $۱_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$.

تعریف ۵.۲.۱. زیررسته‌ی $\mathcal{C}'$ از رسته‌ی $\mathcal{C}$ را زیررسته‌ی پر گوییم، هرگاه برای هر دو شیء X و Y در رسته‌ی $\mathcal{C}'$، $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

مثال ۶.۲.۱. رسته‌ی $\mathrm{mod}\ A$ یک زیررسته‌ی پر از $\mathrm{Mod}\ A$ است.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم X و Y دو شیء در رسته‌ی $\mathcal{C}$ باشند.

الف) ریخت $u : X \longrightarrow X$ در $\mathcal{C}$ را درون‌ریختی از X، نامیم.

ب) ریخت $u : X \longrightarrow Y$ در $\mathcal{C}$ را تکریختی نامیم، هرگاه برای هر شیء Z در $\mathcal{C}$ و هر f, g در $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X)$ به طوری‌که $uf = ug$، داشته باشیم $f = g$.

ج) ریخت $p : X \longrightarrow Y$ در $\mathcal{C}$ را برو‌ریختی نامیم، هرگاه برای هر شیء Z در $\mathcal{C}$ و هر f, g در $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ به طوری‌که $fp = gp$، داشته باشیم $f = g$.

د) ریخت $u : X \longrightarrow Y$ در $\mathcal{C}$ را یکریختی نامیم، هرگاه ریخت $v : Y \longrightarrow X$ در $\mathcal{C}$ موجود باشد، به طوری‌که $uv = ۱_Y$ و $vu = ۱_X$. در این حالت دو شیء X و Y را یکریخت می‌نامیم و می‌نویسیم $X \cong Y$.

ه) یکریختی $u : X \longrightarrow X$ در $\mathcal{C}$ را خودریختی نامیم.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم $X_۱$، $X_۲$، ... و X_n اشیاء رسته‌ی $\mathcal{C}$ باشند. جمع مستقیم این اشیاء، شیء $X_۱ \oplus \ldots \oplus X_n$ به همراه ریخت‌های $u_j : X_j \longrightarrow X_۱ \oplus \ldots \oplus X_n$ برای $j = ۱, ..., n$، می‌باشد، به طوری‌که برای هر شیء Z در $\mathcal{C}$ و ریخت‌های $f_j : X_j \longrightarrow Z$، $j = ۱, ..., n$، ریخت منحصر به فرد $f : X_۱ \oplus \ldots \oplus X_n \longrightarrow Z$ وجود داشته باشد، به طوری‌که برای هر $j = ۱, ..., n$، $f_j = fu_j$.

با توجه به تعریف فوق، اگر شیء $X_۱ \oplus \ldots \oplus X_n$ وجود داشته باشد، در حد یکریختی، یکتاست. اغلب به جای نوشتن $X_۱ \oplus ... \oplus X_n$، می‌نویسیم $\bigoplus_{j=۱}^{n} X_j$.

تعریف ۹.۲.۱. رسته‌ی $\mathcal{C}$ را جمعی گوییم، هرگاه

۱) برای هر مجموعه‌ی متناهی از اشیاء $X_۱$ ، $X_۲$، ... و X_n در $\mathcal{C}$، جمع مستقیم $X_۱ \oplus ... \oplus X_n$ در $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد.

۲) برای هر جفت از اشیاء X و Y در رسته‌ی $\mathcal{C}$، $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ یک گروه آبلی باشد.

۳) قانون توزیع پذیری ریخت‌ها: برای اشیاء X، Y، X' و Y' در رسته $\mathcal{C}$ و ریخت‌های داده شده به صورت

$$X \xrightarrow{k} Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X' \xrightarrow{h} Y'$$

داشته باشیم:

$$(f+g)k = fk + gk \qquad , \qquad h(f+g) = hf + hg$$

۴) شیء صفر در رسته $\mathcal{C}$ موجود باشد، به طوری‌که ۱٫ عضو همانی گروه آبلی $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0,0)$ است.

تعریف ۱۰.۲.۱. برای هر رسته‌ی جمعی $\mathcal{C}$، رسته‌ی مخالف $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$، رسته‌ی جمعی است که اشیاء آن همان اشیاء رسته $\mathcal{C}$، برای هر دو شیء X و Y در رسته‌ی $\mathcal{C}$، $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ و برای هر دو ریخت f و g، عمل ترکیب $\circ'$ به صورت $g \circ' f = f \circ g$ می‌باشد که $\circ$ عمل ترکیب در رسته‌ی $\mathcal{C}$ است.

تعریف ۱۱.۲.۱. رسته‌ی $\mathcal{C}$ را یک K-رسته گوییم، هرگاه برای هر دو شیء X و Y در رسته‌ی $\mathcal{C}$، مجموعه $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ دارای ساختار K-فضای برداری باشد و هم‌چنین عمل ترکیب ریخت‌ها، عمل K-دوخطی باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱. برای هر شیء X در K-رسته‌ی $\mathcal{C}$، گروه $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}\, X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ همراه با عمل ترکیب در رسته‌ی $\mathcal{C}$ یک K-جبر با عضو همانی 1_X می‌باشد. این جبر را، جبر درون‌ریختی X می‌نامیم.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنیم $u : X \longrightarrow Y$ ریختی در رسته‌ی جمعی $\mathcal{C}$ باشد. در این صورت، شیء k به همراه ریخت $i : k \longrightarrow X$ را (در صورت وجود) هسته u نامیم، هرگاه اولاً $ui = 0$، ثانیاً برای هر ریخت $g : Z \longrightarrow X$ با خاصیت $ug = 0$، ریخت منحصر به فرد $\theta : Z \longrightarrow k$ وجود داشته باشد به طوری‌که $i\theta = g$.

شیء منحصر به فرد k را با $\ker u$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنیم $u : X \longrightarrow Y$ ریختی در رسته‌ی جمعی $\mathcal{C}$ باشد. در این صورت، شیء C به همراه ریخت $p : Y \longrightarrow C$ را (در صورت وجود) هم‌هسته u نامیم، هرگاه اولاً $pu = 0$، ثانیاً برای هر ریخت $h : Y \longrightarrow Z$ با خاصیت $hu = 0$، ریخت منحصر به فرد

$Z \longrightarrow C : f$ وجود داشته باشد به طوری‌که $fp = h$.

شیء منحصر به فرد C را با $\text{coker } u$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۲.۱. رسته‌ی جمعی $\mathcal{C}$ را رسته‌ی آبلی نامیم، هرگاه

۱) هر ریخت دارای هسته و هم‌هسته باشد،

۲) هر ریخت $u : X \longrightarrow Y$ در رسته‌ی $\mathcal{C}$، ریخت $\bar{u}$ را القا کند، به طوری‌که نمودار زیر جابه‌جایی باشد و $\bar{u}$ یکریختی است.

$$\begin{tikzcd} \ker u \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p'"] & Y \arrow[r, "p"] & \text{coker } u \\ & \text{coker } i \arrow[r, "\bar{u}"] & \ker p \arrow[u, "i'"'] & \end{tikzcd}$$

تعریف ۱۶.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ دو رسته باشند.

الف) تابعگون همورد F از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{C}'$ (که با نماد $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ نمایش داده می‌شود.) زوجی است از توابع؛ یکی تابع شیئی، که به هر شیء X از $\mathcal{C}$ ، شیئی مانند $F(X)$ از $\mathcal{C}'$ را نظیر می‌کند و دیگری تابع ریخت، که به هر ریخت $f : X \longrightarrow X'$ از $\mathcal{C}$، ریختی مانند $F(f) : F(X) \longrightarrow F(X')$ از $\mathcal{C}'$ را نظیر می‌کند به طوری‌که

۱) برای هر ریخت همانی $۱_X : X \longrightarrow X$ از رسته‌ی $\mathcal{C}$، $F(۱_X) = ۱_{F(X)}$،

۲) برای هر دو ریخت f و g از رسته‌ی $\mathcal{C}$ که ترکیب gf تعریف شده باشد، $F(gf) = F(g)F(f)$.

ب) تابعگون پادورد F از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{C}'$ (که با نماد $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ نمایش داده می‌شود.) زوجی است از توابع؛ یکی تابع شیئی، که به هر شیء X از $\mathcal{C}$، شیئی مانند $F(X)$ از $\mathcal{C}'$ را نظیر می‌کند و دیگری تابع ریخت، که به هر ریخت $f : X \longrightarrow X'$ از $\mathcal{C}$، ریختی مانند $F(f) : F(X') \longrightarrow F(X)$ از $\mathcal{C}'$ را نظیر می‌کند به طوری‌که

۱) برای هر ریخت همانی $۱_X : X \longrightarrow X$ از رسته‌ی $\mathcal{C}$، $F(۱_X) = ۱_{F(X)}$،

۲) برای هر دو ریخت f و g از رسته $\mathcal{C}$ که ترکیب gf تعریف شده باشد، $F(gf) = F(f)F(g)$.

تعریف ۱.۲.۱۷. فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ دو رسته‌ی جمعی باشند و $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ تابعگون همورد باشد. اگر برای هر دو شیء X و Y از $\mathcal{C}$،

$$F(X) \oplus F(Y) \cong F(X \oplus Y),$$

و هم‌چنین نگاشت القایی

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$$

همریختی گروهی باشد، آن‌گاه تابعگون F، تابعگون جمعی نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱۸. فرض کنیم $F, F' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ دو تابعگون همورد باشند. یک تبدیل طبیعی $\Psi : F \longrightarrow F'$ یک خانواده از ریخت‌های $\Psi = \{\Psi_X\}_{X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}}$ می‌باشد، به طوری‌که برای هر ریخت $f : X \longrightarrow Y$ در رسته‌ی $\mathcal{C}$، دیاگرام

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\Psi_X} & F'(X) \\ \downarrow{\scriptstyle F(f)} & & \downarrow{\scriptstyle F'(f)} \\ F(Y) & \xrightarrow{\Psi_Y} & F'(Y) \end{array}$$

در رسته $\mathcal{C}'$، جابه‌جایی باشد. اگر برای هر شیء X در رسته $\mathcal{C}$، ریخت $\Psi_X : F(X) \longrightarrow F'(X)$ در رسته‌ی $\mathcal{C}'$، یکریختی باشد، آن‌گاه Ψ را هم‌ارزی طبیعی نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۹. الف) تابعگون همورد $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ را یک هم‌ارزی بین دو رسته $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ نامیم، هرگاه تابعگون $F' : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ و هم‌ارزی‌های طبیعی $\Psi : 1_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\cong} F'F$ و $\Phi : 1_{\mathcal{C}'} \xrightarrow{\cong} FF'$ موجود باشند، که در آن $1_{\mathcal{C}}$ و $1_{\mathcal{C}'}$ تابعگون‌های همانی روی $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ می‌باشند. در این حالت F' را شبه وارون F و دو رسته $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ را هم ارز می‌نامیم.

ب) تابعگون پادورد $D : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ را یک هم‌ارزی بین دو رسته $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ نامیم، هرگاه تابعگون همورد $D : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}'$ یک هم‌ارزی باشد.

تعریف ۱.۲.۲۰. فرض کنیم تابعگون پادورد $D : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ یک هم‌ارزی باشد. در این صورت تابعگون D را دوگانی می‌نامیم.