بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شاهد

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

بررسی هندسه فضای مماس در منیفلدهای فینسلری

نگارنده

انسیه عموعابدی

استاد راهنما

جناب دکتر بهزاد نجفی

استاد مشاور

جناب دکتر عباس حیدری

بهمن ماه ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر عزیز و مهربانم که سرمایه‌های ارزشمند زندگی‌ام هستند.

تشکر و قدردانی

سپاس و ستایش خداوند سبحان را که نعمت دانش آموختن و کسب معرفت به بشر عطا فرمود تا آدمی ذهن و روان خود را به کمالات بیاراید. و اکنون که در سایه الطاف ایزدمنان نگارش این پایان‌نامه به پایان رسیده است، برخود واجب می‌دانم تا مراتب سپاس و قدردانی خود را از همه عزیزانی که مرا در انجام این مهم یاری نموده‌اند، بجاآورم.

برخود لازم می‌دانم از الطاف و راهنمایی‌های بی‌دریغ و دلسوزانه استاد فرزانه و بزرگوار جناب آقای دکتر بهزاد نجفی که زحمت هدایت مرا به عهده داشته اند، نهایت تشکر و قدردانی را بنمایم.

همچنین از جناب آقای دکتر عباس حیدری که مشاورت این پایان نامه را برعهده داشتند نیز صمیمانه تشکر می‌نمایم.

همچنین وظیفه خود می‌دانم از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر اکبر طیبی و جناب آقای دکتر رحیم علیزاده که کار اینجانب را قابل ارزیابی دانسته و قبول زحمت فرمودند و آن را به داوری نشستند، کمال تشکر و قدردانی را بنمایم.

موفقیت و سلامتی این اساتید گرانقدر و بزرگوار را از خداوند متعال خواستارم.

در پایان از پدر و مادر عزیز و مهربانم که درتمامی مراحل تحصیل همواره یار و پشتیبان من بوده‌اند، کمال تشکر را دارم.

چکیده

میدان‌های برداری همدیس و حافظ فیبر روی TM تعابیر فیزیکی شناخته شده‌ای دارند و فیزیکدانان و هندسه‌دانان در ترفیع مترهای ریمانی و شبه ریمانی روی TM آنها را به کار می‌برند. در این پایان‌نامه متر ترفیع ریمانی یا شبه ریمانی G روی TM را ملاحظه می‌کنیم، که از بعضی جهات کلی تر از مترهای ترفیعی است که قبلا معرفی شده و سپس مطالب را به فضای فینسلر گسترش می‌دهیم.

کلمات کلیدی: میدان برداری همدیس، میدان برداری حافظ فیبر، متر ترفیع، متر ریمانی، متر فینسلری.

فهرست مطالب

[۱] Synectic lift

مقدمه

هندسه ریمانی شاخه‌ای از هندسه دیفرانسیل کلاسیک می‌باشد که کاربرد فراوانی در علوم مختلف از جمله فیزیک و بیولوژی دارد.

در این پایان‌نامه به معرفی متر ترفیع ریمانی یا شبه ریمانی G روی کلاف مماس منیفلد ریمانی (M, g) می‌پردازیم. سپس میدان‌های برداری همدیس حافظ فیبر را روی (TM, G) مورد مطالعه قرار داده و قضایایی را درباره آنها بیان می‌کنیم. برای این منظور ابتدا به معرفی میدان‌های برداری ترفیع کامل می‌پردازیم و با توجه به این مطلب که این دسته از میدان‌های برداری برای ما شناخته شده هستند به اثبات قضایایی در مورد میدان‌های برداری همدیس ترفیع کامل می‌پردازیم. از آنجا که میدان‌های برداری ترفیع کامل، حافظ فیبر هستند با شناسایی میدان‌های برداری همدیس حافظ فیبر آفین قضایای حاصل را به این دسته از میدان‌های برداری تعمیم می‌دهیم.

در ادامه به بیان نمونه‌هایی از متر ترفیع G روی TM و بیان قضایایی درباره میدان‌های برداری همدیس حافظ فیبر نسبت به این مترهای خاص می‌پردازیم. به عنوان مثال متر ترفیع سینکتیک[۲] را که توسط تالانتوا[۳] و شیرکف[۴] در سال ۱۹۷۵ معرفی شد، مطالعه می‌کنیم[۱۴].

در سال ۱۹۱۸ دانشمندی به نام پائول فینسلر[۵] متری را روی منیفلد M معرفی کرد که به نام خود او متر فینسلر نامگذاری شد. باتوجه به این مطلب که فضای فینسلر تعمیمی از فضای ریمانی است، این سوال طبیعی در ذهن شکل می‌گیرد که چگونه می‌توان مفاهیم و قضایای مطرح شده روی فضای ریمانی را روی فضای فینسلری مطرح کرد. به همین منظور در ادامه متر ترفیع ریمانی یا شبه ریمانی G مشتق شده از متر فینسلر g را روی کلاف مماس TM معرفی می‌کنیم. سپس قضایایی را درباره میدان‌های برداری همدیس ترفیع کامل روی (TM, G) بیان می‌کنیم و شرایطی را مطرح می‌کنیم که میدان‌های برداری همدیس ترفیع کامل را به میدان‌های برداری هموتتیک تحدید می‌کند.

این پایان‌نامه براساس مقالات [۲]، [۳]، [۵]، [۶]، [۱۲] و [۱۳] نگاشته شده است.

---

[۲] Synectic lift

[۳] *Talantova*

[۴] *Shirokov*

[۵] *Paul Finsler*

این پایان‌نامه از سه فصل تشکیل شده است:

در فصل اول به بیان مفاهیم و تعاریفی می‌پردازیم که در فصل‌های آتی مورد نیاز است. در فصل دوم به معرفی متر ترفیع G روی کلاف مماس یک منیفلد ریمانی و بیان قضایایی درباره میدان‌های برداری همدیس حافظ فیبر می‌پردازیم. سپس نمونه‌های خاص از این متر ترفیع و قضایایی در ارتباط با آن را بیان می‌کنیم . در این فصل قضیه ۷.۲ که حاصل کارهای تحقیقاتی نگارنده پایان نامه است، بیان و اثبات می‌گردد. در فصل سوم به معرفی متر ترفیع G روی کلاف مماس یک منیفلد فینسلری و بیان قضایایی درباره میدان‌های برداری همدیس ترفیع کامل می‌پردازیم. سپس نمونه‌ای خاص از این متر ترفیع را بیان می‌کنیم.

در این پایان‌نامه از قرارداد جمع بندی اینشتین استفاده شده است، به این معنا که اگر در فرمولی اندیس بالا و پایین برابر باشد به معنای جمع بستن روی آن اندیس در دامنه تغییرات آن اندیس است. به عنوان مثال $y^i N_i^j = \Sigma_{i=1}^n y^i N_i^j$.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مورد نیاز

۱.۱ یادآوری

در این فصل به بیان تعاریف و مفاهیمی می‌پردازیم که در این پایان‌نامه از آنها استفاده شده است.
اکثر این مطالب برگرفته از مرجع [۲۰] می‌باشد.
فرض کنیم M یک منیفلد و زوج (x, U) یک کارت موضعی آن است. به هر نقطه p در U یک $n-$تایی از توابع حقیقی $(x^1, ..., x^n)$ نظیر می‌شود.

$$\begin{cases} x : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \qquad p \longmapsto (x^1(p), ..., x^n(p)) \end{cases}$$

تعریف ۱.۱. خانواده تمام بردارهای مماس بر منیفلد M در نقطه p تشکیل یک فضای برداری می‌دهد که آن را با T_pM نمایش می‌دهیم. خانواده مشتقات جزئی $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\right\}$ یک پایه برای T_pM تشکیل می‌دهد. بنابراین هر بردار مماس X_p را می توان به صورت $X_p = \sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ نوشت. قرار می‌دهیم $TM = \cup_{p\in M} T_pM$، در این صورت TM یک منیفلد دیفرانسیل پذیر $2n-$بعدی

است که آن را کلاف مماس [۱] می‌نامیم.
مختصات هر نقطه در TM توسط $2n$−تایی (x^i, y^i) مشخص می‌شود که در آن x^iها مختصات نقطه p و y^iها مولفه‌های بردار مماس X_p می‌باشند. فرض کنید $T_{X_p}TM$ فضای مماس برمنیفلد TM در X_p باشد. مجموعه $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial y^i} \right\}$ پایه‌ای موضعی برای $T_{X_p}TM$ است.

تعریف ۲.۱. تابع هموار $X : M \longrightarrow TM$ را یک میدان برداری روی M می‌گوییم هرگاه $\Pi \circ X = Id$ یا به طور معادل: $\forall p \in M, \quad X(p) \in T_pM$.

مجموعه تمام میدان‌های برداری روی M را با نماد $\chi(M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱. به هر تابع هموار $\omega : M \longrightarrow TM^*$ یک ۱-فرم دیفرانسیل برای M می‌گوییم هرگاه $\Pi \circ \omega = Id$ یا به طور معادل: $\forall p \in M, \quad \omega(p) \in T_pM^*$.

مجموعه تمام ۱-فرم‌های دیفرانسیل روی M را با نماد $A^1(M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱. فرض کنیم X یک میدان برداری روی M باشد. خم هموار $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$ را یک خم انتگرال X می‌نامیم هرگاه:

$$\forall t \in I \qquad \alpha'(t) = X(\alpha(t))$$

تعریف ۵.۱. میدان برداری X راکامل می‌نامیم هرگاه برای هر خم انتگرال X داشته باشیم: $I = \mathbb{R}$.

تعریف ۶.۱. فرض کنید X یک میدان برداری روی باز W از M باشد. به ازای هر p از W عددی مانند ϵ، یک همسایگی از p مانند U در W و یک خانواده یکتا از دیفئومورفیسم‌ها مانند $\{\varphi_t\}$ وجود دارد به طوریکه:

$$\varphi_t : U \longrightarrow \varphi_t(U) \subset W$$

[۱] Tangent bundle

و φ_t باشرط $|t| < \epsilon$ در موارد زیر صدق می‌کند.

$$۱)\varphi_{\circ} = Id$$

$$۲)\varphi_s o \varphi_t = \varphi_{s+t}$$

$$۳)X(p) = \frac{d}{dt}\varphi_t(p)|_{t=\circ}$$

در این صورت خانواده $\{\varphi_t\}$ از دیفئومورفیسم‌های موضعی را گروه تک پارامتری تولید شده توسط X می‌نامیم.

تعریف ۷.۱. فرض کنیم $X, Y \in \chi(M)$. دراین صورت نگاشت:

$$\begin{cases} [X,Y] : C^\infty(TM) \longrightarrow C^\infty(TM) \\ \qquad f \longmapsto [X,Y].f \end{cases}$$

که در آن

$$[X,Y].f = X.(Y.f) - Y.(X.f)$$

کروشه‌لی[۲] دو میدان برداری X و Y، نامیده می‌شود. کروشه‌لی دارای خواص زیر است:

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$

الف) $[X,Y] = -[Y,X]$

ب) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = \circ$

ج) $[X, fY] = (X.f)Y + f[X,Y]$

د) $[fX, Y] = f[X,Y] - (Y.f)X$

[۲] Lie bracket

۲.۱ مقدماتی از هندسه ریمانی

تعریف ۸.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار $n-$بعدی است. یک (۲و۰)- تانسور g روی M را یک متر ریمانی[۳] روی M می‌نامیم هرگاه:

الف) g متقارن باشد، یعنی به ازای هر $X,Y \in \chi(M)$ داشته باشیم:

$$g(X,Y) = g(Y,X)$$

ب) g مثبت معین باشد، یعنی به ازای هر $X \in \chi(M)$ داشته باشیم :

$$g(X,X) = 0 \iff X = 0 \qquad , \qquad g(X,X) \geqslant 0$$

در این حالت زوج (M,g) را یک منیفلد ریمانی می‌نامیم.

تعریف ۹.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار $n-$بعدی است. یک (۲و۰)- تانسور g روی M را یک متر شبه ریمانی[۴] روی M می‌نامیم هرگاه:

الف) g متقارن باشد، یعنی به ازای هر $X,Y \in \chi(M)$ داشته باشیم:

$$g(X,Y) = g(Y,X)$$

ب)اگر به ازای هر $Y \in \chi(M)$ داشته باشیم $g(X,Y) = 0$، آنگاه $X = 0$.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنیم M یک منیفلد C^∞ است. به تابع

$$\begin{cases} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M) \\ \qquad (X,Y) \longmapsto \nabla_X^Y \end{cases}$$

مشتق کواریان یا التصاق خطی[۵] روی M می‌گوییم هرگاه به ازای هر $X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in$

[۳] Riemannian metric
[۴] pseudo-Riemannian metric
[۵] Linear connection

$\chi(M)$ و به ازای هر $f \in C^{\infty}(M)$ شرایط زیر برقرار باشند:

۱)$\nabla_X^{Y_1+Y_2} = \nabla_X^{Y_1} + \nabla_X^{Y_2}$

۲)$\nabla_{X_1+X_2}^{Y} = \nabla_{X_1}^{Y} + \nabla_{X_2}^{Y}$

۳)$\nabla_X^{fY} = (X.f)Y + f\nabla_X^{Y}$

۴)$\nabla_{fX}^{Y} = f\nabla_X^{Y}$

۵)$\nabla_X^{f} = X.f$

در این صورت زوج (M, ∇) را یک منیفلد آفین[۶] می‌نامیم.

تعریف ۱.۱۱. فرض کنیم (M, ∇) یک منیفلد آفین و (x, U) یک کارت M باشد. قرار می‌دهیم:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^{\frac{\partial}{\partial x^j}} = \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Γ_{ij}^{k}ها را نمادهای کریستوفل[۷] ∇ نسبت به کارت (x, U) می‌نامیم. در واقع داریم:

$$\Gamma_{ij}^{k} = dx^k\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^{\frac{\partial}{\partial x^j}}\Big)$$

فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی است. هرگاه ∇ یک التصاق روی M باشد، آنگاه ∇ را به طور طبیعی می‌توانیم بر روی موجودات هندسی روی M اثر دهیم. به طور مثال اگر گسترش یافته ∇ را به (۲و۰)-تانسورها با همان نماد ∇ نمایش دهیم، آنگاه به ازای یک (۲و۰)-تانسور دلخواه S داریم:

$$(\nabla_X^{S})(Y, Z) = X.S(Y, Z) - S(\nabla_X^{Y}, Z) - S(Y, \nabla_X^{Z})$$

[۶] Affine manifold

[۷] Christoffle symbols

یا به طور موضعی داریم :

$$S_{ij|k} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x^k} - S_{ir}\Gamma^r_{jk} - S_{rj}\Gamma^r_{ik}$$

که در آن داریم:

$$S_{ij|k} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} S_{ij}$$

تعریف ۱۲.۱. فرض کنیم g یک متر ریمانی روی منیفلد M باشد. التصاق خطی ∇ راسازگار[۸] با متر g می‌نامیم هرگاه $\nabla g = ۰$. یعنی:

$$\forall X \in \chi(M) \qquad \nabla_X g = ۰$$

تعریف ۱۳.۱. فرض کنیم (M, ∇) یک منیفلد آفین است. در این صورت تابع

$$\begin{cases} T : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M) \\ \quad (X, Y) \longmapsto T(X, Y) \end{cases}$$

با ضابطه

$$T(X, Y) = \nabla_X^Y - \nabla_Y^X - [X, Y]$$

را تاب[۹] التصاق ∇ می نامیم.

اثر T روی $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{i=۱}^n$ که پایه‌ای برای $\chi(M)$ می‌باشد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$T\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} - \Big[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big] = (\Gamma_{ij}^{\ k} - \Gamma_{ji}^{\ k})\frac{\partial}{\partial x^k}$$

[۸] Compatible
[۹] Torsion

بنابراین $T=0$ اگر و فقط اگر ${\Gamma_{ij}}^k={\Gamma_{ji}}^k$.

تعریف ۱۴.۱. التصاق ∇ را تاب آزاد [۱۰] می‌نامیم هرگاه $T=0$ یا به طورمعادل ${\Gamma_{ij}}^k={\Gamma_{ji}}^k$.

ملاحظه ۱۵.۱. T یک تانسور است. لذا شرط $T=0$ یک شرط تانسوریل است. اما شرط ${\Gamma_{ij}}^k={\Gamma_{ji}}^k$ با توجه به اینکه Γ_{ij}^kها تشکیل یک تانسور نمی‌دهند، به نظر می‌رسد تانسوریل نباشد. در واقع می‌توان دید که اگر نمادهای کریستوفل یک التصاق نسبت به یک کارت متقارن باشند، آنگاه نسبت به هر کارت دیگر نیز متقارن خواهند بود. بنابراین علی‌رغم اینکه خود نمادهای کریستوفل تانسوریل نمی‌باشند، اما متقارن بودن آنها یک شرط تانسوریل است.

قضیه ۱.۱. (*قضیه اساسی هندسه ریمانی*): *فرض کنیم (M,g) یک منیفلد ریمانی است. در این صورت یک التصاق منحصر به فرد ∇ روی M وجود دارد بطوریکه بدون تاب و سازگار با متر باشد. این التصاق منحصر به فرد را التصاق لوی چویتای [۱۱] g می‌نامیم*[۸].

برای متر ریمانی g التصاق لوی چویتا دارای نمادهای کریستوفل زیر است:

$${\Gamma_{ij}}^k=\frac{1}{2}g^{kl}\Big(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\Big)$$

بنابراین منیفلد ریمانی را می‌توانیم به عنوان حالت خاصی از منیفلد آفین مطالعه کنیم.

تعریف ۱۶.۱. فرض کنیم (M,g) یک منیفلد ریمانی با نمادهای کریستوفل ${\Gamma_{ij}}^k$ نسبت به کارت (x,U) است. روی کلاف مماس TM میدان برداری S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}-2G^i\frac{\partial}{\partial y^i}$$

که در آن $G^k(x,y)=\frac{1}{2}{\Gamma_{ij}}^k(x)y^iy^j$ ضرایب اسپری متر g می‌باشد. می‌توان دید که S یک میدان برداری سراسری روی M تعریف می‌کند که آن را اسپری [۱۲] وابسته به متر g می‌نامیم.

[۱۰] Torsion-free
[۱۱] Levi-civita
[۱۲] Spray

تعریف ۱۷.۱. فرض کنیم ∇ یک التصاق خطی روی منیفلد ریمانی (M,g) باشد. در این صورت تانسور انحنای ریمانی[۱۳] به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall X,Y \in \chi(M) \qquad K(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y^Z - \nabla_Y \nabla_X^Z - \nabla_{[X,Y]}^Z$$

اگر $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ پایه‌ای برای $\chi(M)$ باشد، داریم:

$$K\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = K_{ijk}^{\ \ \ m}\frac{\partial}{\partial x^m} \qquad\qquad m = ۱, .., n$$

که در آن به $K_{ijk}^{\ \ \ m}$ ضرایب تانسور انحنای ریمانی گفته می‌شود و داریم:

$$K_{ijk}^{\ \ \ m} = \frac{\partial}{\partial x^i}(\Gamma_{jk}^{\ \ m}) - \frac{\partial}{\partial x^j}(\Gamma_{ik}^{\ \ m}) + \Gamma_{jk}^{\ \ a}\Gamma_{ia}^{\ \ m} - \Gamma_{ik}^{\ \ a}\Gamma_{ja}^{\ \ m}$$

با در نظر گرفتن

$$K_{ijkl} = g(K\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}) = K_{ijk}^{\ \ \ s} g_{ls}$$

خواص زیر برقرار خواهند بود.

$$K_{ijkl} = -K_{jikl}$$

$$K_{ijkl} = -K_{ijlk}$$

$$K_{ijkl} = K_{klij}$$

[۱۳] Riemannian curvature tensor

۳.۱ التصاق غیرخطی

تعریف ۱۸.۱. فرض کنیم π نگاشت تصویر طبیعی از TM به M باشد. در این صورت نگاشت زیر را داریم:

$$\pi_* : T(TM) \longrightarrow TM$$

قرار می‌دهیم:

$$VTM = \cup_{v\in TM}\ Ker\pi_*^v$$

VTM را کلاف برداری قائم[۱۴] روی TM می‌نامیم.

تعریف ۱۹.۱. یک التصاق غیرخطی[۱۵] روی TM عبارتست از یک توزیع متمم[۱۶] HTM برای VTM در روی TTM. به عبارت دیگر:

$$TTM = VTM \oplus HTM \qquad (۱.۱)$$

HTM را کلاف برداری افقی[۱۷] می‌نامند[۱].

می‌دانیم که $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ یک پایه برای TTM است. حال به معرفی یک پایه برای TTM می‌پردازیم که متناسب با تجزیه (۱.۱) باشد.

اگر π_*^v نگاشت تصویر طبیعی از T_vTM به TM باشد، در این صورت

$$\pi_*^v : T_vTM \longrightarrow TM$$

$$\pi_*^v\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big) = \frac{\partial}{\partial x^i}\ ,\ \pi_*^v\Big(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big) = ۰$$

۱۴ Vertical vector bundle
۱۵ Non-Linear connection
۱۶ Complementary distribution
۱۷ Horizontal vector bundle

بنا بر تعریف کلاف برداری قائم، مجموعه بردارهای $\left\{\frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ پایه‌ای برای VTM می‌باشد. با توجه به تجزیه (۱.۱) برای TTM می‌توان پایه $\frac{\partial}{\partial y^i}$ برای VTM را به پایه $\{S_i, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ برای TTM توسیع داد.

چون $\frac{\partial}{\partial x^i}$ عضوی از TTM است، بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = A_i^j(x,y)S_j + N_i^j(x,y)\frac{\partial}{\partial y^j}$$

که در آن $A_i^j(x,y)$ و $N_i^j(x,y)$ توابع دیفرانسیل‌پذیری هستند که به طور موضعی روی TM تعریف می‌شوند. بنابراین $\{A_i^j(x,y)S_j\}$ پایه‌ای موضعی برای HTM است و داریم:

$$A_i^j(x,y)S_j = \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^j(x,y)\frac{\partial}{\partial y^j}$$

قرار می‌دهیم $A_i^j(x,y)S_j = \frac{\delta}{\delta x^i}$.

لذا $\left\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ پایه‌ای برای T_vTM متناسب با تجزیه (۱.۱) است که دوگان آن را با $\{dx^i, \delta y^i\}$ نشان می‌دهیم که در آن $\delta y^i = dy^i + N_j^i dx^j$ می‌باشد.

به N_i^jها ضرایب التصاق غیرخطی گفته می‌شود و در دو دستگاه مختصاتی $\left\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ و $\left\{\frac{\delta}{\delta x^{i'}}, \frac{\partial}{\partial y^{i'}}\right\}$ برای TTM در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$N_{i'}^{h'} = \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^h}\Big(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}N_i^h + \frac{\partial^2 x^h}{\partial x^{i'}\partial x^{a'}}y^{a'}\Big) \qquad (۲.۱)$$

چون $y^a\Gamma_{ai}^{\ h}$ دررابطه (۲.۱) صدق می‌کند از این به بعد آن را به عنوان ضرایب التصاق غیرخطی به کار خواهیم برد. یعنی:

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - y^a\Gamma_{ai}^{\ h}\frac{\partial}{\partial y^h}$$

برای سادگی از این پس بجای $\frac{\partial}{\partial x^i}$، $\frac{\partial}{\partial y^i}$ و $\frac{\delta}{\delta x^i}$ که همگی اعضای TTM می باشند، علایم زیر

را به کار می‌بریم:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i \ , \ \frac{\partial}{\partial y^i} = \partial_{\bar{i}} \ , \ \frac{\delta}{\delta x^i} = \delta_i$$

لم ۱.۲. *کروشه لی اعضای پایه $T_{X_p}T_pM$ در روابط زیر صدق می‌کنند[۴، ۱۱، ۱۵]:*

$$(I)[\partial_{\bar{i}}, \partial_{\bar{j}}] = 0$$

$$(II)[\delta_i, \partial_{\bar{j}}] = \Gamma_{ij}^{\ m}\partial_{\bar{m}}$$

$$(III)[\delta_i, \delta_j] = y^r K_{jir}^{\ \ m}\partial_{\bar{m}}$$

اثبات.

$$(I)[\partial_{\bar{i}}, \partial_{\bar{j}}] = \partial_{\bar{i}}\partial_{\bar{j}} - \partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{i}} = 0$$

$$\begin{aligned}(II)[\delta_i, \partial_{\bar{j}}] &= [\partial_i - N_i^m\partial_{\bar{m}}, \partial_{\bar{j}}] \\ &= [\partial_i, \partial_{\bar{j}}] - [N_i^m\partial_{\bar{m}}, \partial_{\bar{j}}] \\ &= \partial_{\bar{j}}N_i^m\partial_{\bar{m}} \\ &= \Gamma_{ij}^{\ m}\partial_{\bar{m}}\end{aligned}$$