وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

بررسی عدد پراکندگی در گراف‌ها

توسط:
سمیرا سعیدپور

استاد راهنما:
دکتر بهزاد صالحیان متی‌کلایی

استاد مشاور:
دکتر سعید شعبانی

شهریور ۱۳۹۳

بسم الله الرحمن الرحیم

تعهدنامه‌ی اصالت پایان نامه/رساله دانشگاه دامغان

اینجانب سمیرا السعیدی پور دانش‌آموخته‌ی مقطع کارشناسی ارشد/ دکتری رشته‌ی ریاضی محض گرایش گراف و ترکیبیات دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان به شماره دانشجویی ۹۱۴۴۴۲۰۲۳ که در تاریخ ۹۳/۶/۱۹ از پایان‌نامه/ رساله ی تحصیلی خود تحت عنوان بررسی عدد رنگ‌آمیزی در گراف‌ها .... دفاع نموده‌ام، متعهد می‌شوم که:

۱) این پایان‌نامه را قبلاً برای دریافت هیچ گونه مدرک تحصیلی یا به عنوان هرگونه فعالیت پژوهشی در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزشی و پژوهشی داخل و خارج از کشور ارائه ننموده‌ام.

۲) این پایان‌نامه، حاصل پژوهش انجام شده توسط اینجانب می‌باشد و در موارد استفاده از نتایج دیگران به موجع مورد استفاده استناد شده است.

۳) در کلیه مراحل انجام این پایان نامه/ رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آن ها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاق علمی رعایت شده است.

٤) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده یا هر گونه بهره‌برداری اعم از نشر کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان‌نامه را داشته باشم، از حوزه‌ی معاونت پژوهشی و فنّاوری دانشگاه دامغان، مجوزهای لازم را اخذ نمایم.

٥) در صورت ارائه‌ی مقاله‌ی مستخرج از این پایان‌نامه در همایش‌ها، کنفرانس‌ها، سمینارها، گردهمایی‌ها و انواع مجلات، نام دانشگاه دامغان را در کنار نام نویسندگان (دانشجو و اساتید راهنما و مشاور) ذکر نمایم.

٦) چنانچه در هر مقطع زمانی، خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن (منجمله ابطال مدرک تحصیلی، طرح شکایت توسط دانشگاه و ...) را می پذیرم و دانشگاه دامغان را مجاز می‌دانم با اینجانب مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه رفتار نماید.

۷) مسئولیت صحت و سقم تمامی مندرجات پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود را بر عهده می‌گیرم.

نام ونام خانوادگی دانشجو: سمیرا السعیدی پور

امضاء:

تاریخ:

به نام خدا

بررسی عدد پراکندگی در گراف‌ها

توسط:

سمیرا سعیدپور

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر بهزاد صالحیان متی کلایی استادیار ریاضی محض گرایش گراف و ترکیبیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر سعید شعبانی استادیار ریاضی محض گرایش گراف و ترکیبیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر جواد قاسمیان استادیار ریاضی کاربردی گرایش آمار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر مجید فرهادی استادیار ریاضی محض گرایش هندسه جبری دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر محمد ابری استادیار ریاضی محض گرایش توپولوژی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۳

تقدیم به

تقدیم به گران بهاترین سرمایه های زندگیم،

پدر و مادرم

به دستان همیشه گرم و قلب پر مهر پدرم که در سایه بلند و امن اوست که معنای واقعی تکیه گاه را می فهمم

به چشمان پر امید و همیشه نگران مادرم که از نگاه پر مهرش تا انتهای خوشبختی را می توان دید

می دانم با داشتن فرشتگان مقدسی چون شما، پروردگار آنی مرا به خود وا نخواهد گذاشت

جز این ارزان نداشتم تا به خاک پایتان نثار کنم، باشد که حاصل تلاشم نسیم گونه غبار خستگیتان را بزداید

بوسه بر دستان پر مهرتان.

سپاسگزاری

سپاس یگانه‌ای را که هر بار او را خواندم یاریم نمود و در تمامی لحظات زندگی مرا به حال خود رها نکرد.

از استاد راهنمای محترم جناب آقای دکتر بهزاد صالحیان به خاطر زحمات و کمک های بی دریغشان که با راهنمایی های ارزنده، مرا در تمام مراحل این تحقیق دلسوزانه همراهی کردند سپاسگزاری می کنم و از درگاه خداوند بزرگ برای ایشان آرزوی سلامتی و توفیق روز افزون دارم. از استاد محترم جناب آقای دکتر سعید شعبانی که مرا از دانش و تجربیات ارزنده خودشان بهره مند ساختند و زحمت مشاوره پایان نامه را عهده دار شدند صمیمانه قدردانی و تشکر می نمایم. از اساتید محترم جناب آقای دکتر جواد قاسمیان و جناب آقای دکتر مجید فرهادی که زحمت داوری این پایان نامه را به عهده داشتند، قدردانی می نمایم. از جناب آقای دکتر محمد ابری نماینده محترم تحصیلات تکمیلی بخاطر حضورشان در جلسه دفاع سپاسگزاری می کنم.

از پدر و مادر عزیزم، و خواهران مهربانم که همواره حامی و مشوقم بوده اند و پیمودن روزهای سخت زندگیم بدون دعای خیر و برکت وجودشان ممکن نبود تشکر می کنم.

از هم اتاقی های عزیزم و همه دوستانم بخاطر همه لطف هایی که بی منت نسبت به من داشتند تشکر می کنم.

چکیده

بررسی عدد پراکندگی در گراف‌ها

به وسیله‌ی:
سمیرا سعیدپور

فرض کنید G یک گراف غیرکامل و همبند با مجموعه راس‌های $V(G)$ باشد. عدد پراکندگی در گراف G به صورت

$$s(G) = \max\{\omega(G-X) - |X| : X \subset V(G), \omega(G-X) \geq ۲\}$$

تعریف می‌شود که در آن $\omega(G-X)$ تعداد مولفه‌های همبندی گراف $G-X$ را مشخص می‌کند و $|X|$ مجموعه‌ی برشی را نشان می‌دهد. این پارامتر یکی از پارامترهای اندازه‌گیری آسیب‌پذیری در گراف‌هاست. در این پایان نامه نشان می‌دهیم که از عدد پراکندگی برای اندازه‌گیری آسیب‌پذیری گراف‌ها استفاده می‌شود و نتایج کلی برای عدد پراکندگی گراف‌ها بیان می‌کنیم. همچنین برای عدد پراکندگی کران‌های بالا و پایین معرفی می‌کنیم و ارتباط عدد پراکندگی با دیگر پارامترها ارائه می‌شود. سپس عدد پراکندگی را در گراف‌های خاص محاسبه می‌کنیم.

واژگان کلیدی: گراف، شبکه، آسیب‌پذیری، عدد پراکندگی.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

پیشگفتار

شبکه‌ها امروزه از اهمیت زیادی برخوردارند. یکی از مهمترین مسائل در شبکه‌ها بررسی میزان آسیب پذیر بودن آن‌ها در برابر اختلالات و تخریب‌ها است. پارامترهایی وجود دارند که میزان آسیب‌پذیری شبکه‌ها را اندازه‌گیری می‌کنند که عدد پراکندگی یکی از این پارامترهاست. برای طراحی یک شبکه، یک شرط مهم این است که اگر بخش‌هایی از آن از کار بیفتند، بین بخش‌های باقیمانده بیشترین ارتباط ممکن برقرار باشد. در این پایان‌نامه عدد پراکندگی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این عدد عبارت از ماکسیمم تفاضل تعداد مولفه‌های همبندی و اندازه‌ی مجموعه‌ی برشی است. و هر اندازه تعداد راس‌های حذف شده بیشتر و در عین حال تعداد مولفه‌های همبندی باقیمانده کمتر باشد میزان پراکندگی گراف کمتر و قابلیت اطمینان آن بیشتر است. عدد پراکندگی در گراف کامل کم و قابلیت اطمینان آن بالاست. علاوه بر عدد پراکندگی، دیگر پارامترهای اندازه‌گیری آسیب‌پذیری گراف‌ها مانند همبندی، محکمی، همبستگی و بی نقصی و همچنین ارتباط آن‌ها با عدد پراکندگی را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم. نشان می‌دهیم با داشتن عدد همبندی می‌توان برای عدد پراکندگی کران بالا و پایین پیدا کرد و مقدار عدد پراکندگی را تخمین زد. در فصل اول این پایان‌نامه تعاریف و اصطلاحات مهم را معرفی می‌کنیم. در فصل دوم عدد پراکندگی را تعریف می‌کنیم و محدوده عدد پراکندگی را به‌طور کلی برای گراف‌ها بیان می‌کنیم. در فصل سوم رابطه‌ی عدد پراکندگی با دیگر پارامترهای اندازه‌گیر آسیب‌پذیری گراف‌ها ارائه می‌شود. در فصل چهارم عدد پراکندگی در گراف‌های خاصی مثل گراف‌های مشبک، ابرمکعب‌ها و گراف تورن محاسبه شده و در فصل آخر عدد پراکندگی همسایه معرفی و محدوده آن را مشخص می‌نماییم.

فصل ۱

اصطلاحات و نمادگذاری‌ها

۱-۱ تاریخچه

مفهوم و تصور اولیه عدد پراکندگی [۱] توسط نش ویلیام [۲] معرفی شد. اما جانگ [۳] برای اولین بار این پارامتر را در یک مجله به چاپ رساند. در ادامه به کمک این پارامتر مطالعاتی در گراف‌های همیلتنی توسط جامروزیک [۴] و همچنین مطالعاتی در گراف‌های ناهمیلتنی توسط هندری [۵] صورت گرفت.

مفهوم عدد پراکندگی ارتباط بسیار نزدیکی به پارامتر محکمی [۶] دارد. با توجه به ارتباط این دو پارامتر و همچنین دیگر پارامترها به راحتی می‌توان میزان آسیب‌پذیری در گراف‌ها را اندازه‌گیری کرد. در نهایت در سال ۱۹۸۹، برای اولین بار اویانگ [۷] پیشنهاد کرد که از این پارامتر برای اندازه‌گیری آسیب‌پذیری در شبکه‌ها استفاده شود و بسیاری از اصول پایه‌ای و همچنین الگوریتمی برای محاسبه عدد پراکندگی در درخت‌ها ارائه داد.

---

[۱] Scattering number

[۲] Nash Williams

[۳] Jung

[۴] Jamrozik

[۵] Hendry

[۶] Toughness

[۷] Ouyang

۱-۲ تعاریف و اصطلاحات

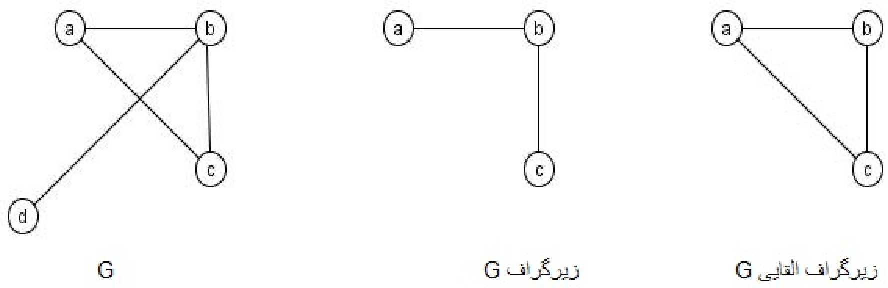
تعریف ۱.۲.۱. هر گراف G یک سه تایی است که شامل مجموعه راس‌های $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ و یک رابطه است که به هر یال، دو راس(نه لزوماً متمایز) نسبت می‌دهد که آن دو راس را نقاط انتهایی یال می‌نامند.

تعریف ۲.۲.۱. وقتی دو راس u و v نقاط انتهایی یک یال باشند می‌گوییم این دو راس مجاورند.

تعریف ۳.۲.۱. گراف H را زیرگراف G می‌نامیم اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. زیرگراف H را به صورت $H \subseteq G$ نشان می‌دهیم. اگر داشته باشیم $V(H) = V(G)$ آن‌گاه H را یک زیرگراف فراگیر می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم G یک گراف با مجموعه راس‌های $V(G)$ باشد، مکمل G یعنی $\overline{G}$ گرافی است با همان مجموعه راس‌های $V(G)$ به‌طوری‌که در آن هر دو راس در $\overline{G}$ مجاورند اگر آن دو راس در گراف G مجاور نباشند.

تعریف ۵.۲.۱. H را زیرگراف القایی G می‌نامند اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و میان راس‌ها $V(H)$ تمام یال‌های موجود بین همین راس‌ها در G نیز وجود داشته باشد. شکل(۱-۱).



شکل ۱-۱: گراف G و زیرگراف‌های آن

تعریف ۶.۲.۱. C را یک خوشه‌ی گراف G می‌گوییم هرگاه زیرگراف القایی روی مجموعه راس‌های C، بزرگترین زیرگراف القایی روی G باشد.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم $v \in V(G)$ یک راس گراف باشد، مجموعه همسایگی‌های راس v برابر است با،

$$N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}.$$

تعریف ۸.۲.۱. درجه راس v در گراف G، $d_G(v)$، برابر تعداد یال‌های واقع بر v می‌باشد یعنی $d_G(v) = |N_G(v)|$. کمترین و بیشترین درجه‌ی راس‌های G را با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۲.۱. می‌گوییم گراف G، k-منتظم است اگر درجه تمام راس‌های آن k باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱. گراف G که در آن هر دو راس متمایز، با یک یال به یکدیگر متصل شده باشند، گراف کامل نامیده می‌شود. گراف کامل با n راس را با K_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید به ازای هر $i \in \{1, ..., k\}$، $e_i = u_i u_{i+1}$ یال‌هایی از گراف G باشند. اگر به ازای هر $i \in \{1, ..., k-1\}$، e_i و e_{i+1} مجاور باشند، آن‌گاه دنباله $C = e_1 e_2 ... e_k$ یک گذر به طول k از u_1 به u_{k+1} است. نمایش دیگر آن به صورت زیر است،

$$C : u_1 \longrightarrow u_2 \longrightarrow ... \longrightarrow u_{k+1}$$

اگر $u_1 = u_{k+1}$ آن‌گاه C را یک گذر بسته می‌گوییم.

اگر به ازای هر $i \neq j$؛ $u_i \neq u_j$ باشد، آن‌گاه C یک مسیر است.

اگر C یک مسیر بسته باشد، یعنی $u_1 = u_{k+1}$ و به ازای هر $i \neq j$، $u_i \neq u_j$ باشد آن‌گاه C را یک دور می‌گوییم.

تعریف ۱۲.۲.۱. یک گراف همبند است اگر مجموعه راس‌های آن را بتوان به دو زیرمجموعه ناتهی X و Y افراز کرد به‌طوری‌که، یک یال با یک انتها در X و یک انتها در Y وجود داشته باشد. در واقع یک گراف همبند است اگر بین هر دو راس حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

تعریف ۱۳.۲.۱. یک گراف ناهمبند است اگر مجموعه راس‌های آن را بتوان به دو زیرمجموعه ناتهی X و Y افراز کرد به‌طوری‌که، هیچ یال با یک انتها در X و یک انتها در Y وجود نداشته باشد.

تعریف ۱۴.۲.۱. به راسی که با حذف آن گراف به چند مؤلفه‌ی همبندی تقسیم شود راس برشی گویند.

تعریف ۱۵.۲.۱. تعداد مؤلفه‌های همبندی گراف G را با $\omega(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۲.۱. اگر $X \subseteq V(G)$ باشد، آن‌گاه $G - X$ زیرگراف القایی $V \setminus X$ است.

تعریف ۱۷.۲.۱. عدد همبند رأسی که با $k(G)$ نشان داده می‌شود و G در آن گراف کامل نیست، تعداد مینیمال رأس‌های برشی است.

یک گراف k-همبند یا k-همبند رأسی نامیده می‌شود اگر تعداد راس‌های همبندی آن، حداقل k باشد.

تعریف ۱.۲.۱۸. عدد همبند یالی که با $\lambda(G)$ نشان داده می‌شود و G در آن گراف کامل نیست، تعداد مینیمال یال‌های برشی است.

یک گراف λ -همبند یا λ -همبند یالی نامیده می‌شود اگر تعداد یال همبندی آن، حداقل λ باشد.

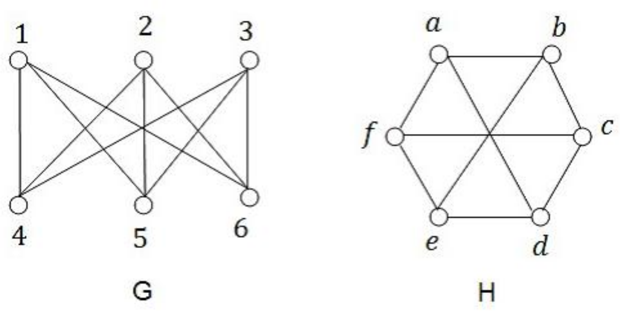
تعریف ۱.۲.۱۹. دو گراف یکریخت اند اگر و فقط اگر تابعی یک به یک و پوشا به صورت $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ بین مجموعه راس‌ها دو گراف G و H وجود داشته باشد به‌طوری‌که $uv \in E(G)$ اگر و فقط اگر $f(u)f(v) \in E(G)$.

دو گراف یکریخت G و H را به صورت $G \cong H$ نشان می‌دهند.

در شکل (۱ – ۲) دو گراف یکریخت نشان داده شده که تناظر بین راس‌ها و یال‌ها به‌صورت زیر است،

$$۱ \mapsto b \qquad ۲ \mapsto d$$
$$۳ \mapsto f \qquad ۴ \mapsto c$$
$$۵ \mapsto e \qquad ۶ \mapsto a$$

$$۱۴ \mapsto bc \qquad ۱۶ \mapsto ba \qquad ۱۵ \mapsto be$$
$$۵۳ \mapsto ef \qquad ۲۶ \mapsto da \qquad ۲۵ \mapsto de$$
$$۴۳ \mapsto cf \qquad ۴۲ \mapsto cd \qquad ۳۶ \mapsto fa$$



شکل ۱–۲: دو گراف یکریخت

تعریف ۲۰.۲.۱. گراف G را خودمکمل گویند اگر G و $\overline{G}$ یکریخت باشند.

تعریف ۲۱.۲.۱. یک گراف دوبخشی است اگر بتوان مجموعه راس‌هایش را به دو زیرمجموعه‌ی X و Y افراز کرد به‌طوری‌که هر یال گراف یک انتها در X و یک انتها در Y داشته باشد. گراف دوبخشی را با $K_{a,b}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۲.۲.۱. گراف همبند و بدون دور را درخت می‌نامند.

تعریف ۲۳.۲.۱. دوری که شامل همه راس‌های گراف G باشد دور همیلتنی [۸] است و گرافی که شامل یک دور همیلتنی باشد گراف همیلتنی است.

تعریف ۲۴.۲.۱. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف باشد. در این‌صورت زیرمجموعه‌ی M از E یک تطابق [۹] در G نامیده می‌شود اگر عضوهای آن یال بوده، هیچ دوتای آنها در G مجاور نباشند.

اگر یک تطابق همه‌ی راس‌های یک گراف را شامل شود آن‌گاه M یک تطابق کامل است.

M ماکزیمم تطابق از G است اگر هیچ تطابق دیگری مثل M' وجود نداشته باشد که $|M| < |M'|$. عدد تطابق گراف G، $\beta_1(G)$، تعداد یال‌ها در یک تطابق ماکسیمم در G است.

تعریف ۲۵.۲.۱. زیرمجموعه $X \subset V$ یک پوشش گراف نامیده می‌شود اگر هر یال G یک انتها در X داشته باشد. یک پوشش X کوچکترین پوشش G است هرگاه هیچ پوشش دیگری مثل X' وجود نداشته باشد که $|X| > |X'|$. عدد پوششی $\alpha(G)$ تعداد راس‌ها در کوچکترین پوشش G است.

تعریف ۲۶.۲.۱. زیرمجموعه‌ی $X \subset V(G)$ یک مجموعه‌ی مستقل است اگر هیچ دو راسی در G مجاور نباشند و مجموعه مستقل ماکسیمم است اگر هیچ مجموعه‌ی مستقل دیگری در G نباشد که $|X| < |X'|$. عدد استقلال $\beta(G)$ تعداد راس‌ها در ماکزیمم مجموعه‌ی مستقل است.

تعریف ۲۷.۲.۱. گراف هی وود گرافی با ۱۴ راس و ۲۱ یال است که ۳ -منتظم می‌باشد و همه دورها در آن ۶ یا بیشتر یال دارند.

تعریف ۲۸.۲.۱. یک گراف پنجه آزاد نامیده می‌شود اگر شامل گراف $K_{1,3}$ به عنوان زیر گراف القایی نباشد.

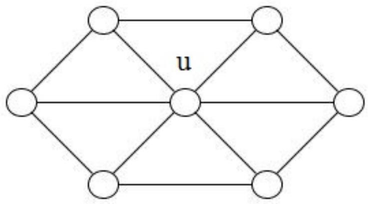
تعریف ۲۹.۲.۱. یک گراف مثلث آزاد گرافی است که هیچ سه راس آن تشکیل مثلث ندهند و طول کوچکترین دور در آن حداقل ۴ است.

---

[۸] Hamiltonian cycle

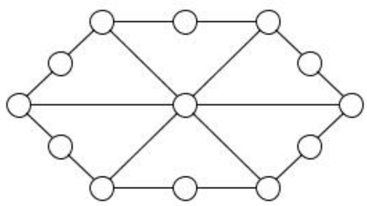
[۹] Maching

تعریف ۳۰.۲.۱. هر گراف G را که دارای n راس باشد و $n \geq ۴$ و یکی از راس‌های از درجه‌ی $n-۱$ و بقیه از درجه‌ی سه باشند، را یک گراف چرخ می‌نامیم.
این گراف از یک n -دور C_n و یک راس اضافه u تشکیل شده است که به همه راس‌های دور وصل است.
در شکل $(۱-۳)$ گراف $\omega_۶$ نشان داده شده است.



شکل ۱-۳: گراف چرخ $\omega_۶$

تعریف ۳۱.۲.۱. گراف چرخ دنده یک گراف چرخ است که بین هر دو راس متصل بیرونی دور، یک راس اضافه شده باشد.
گراف چرخ دنده را با G_n نشان می‌دهیم که تعداد راس‌های آن $۲n+۱$ و تعداد یال‌های آن $۳n$ می‌باشد. در شکل $(۱-۴)$ یک گراف چرخ دنده $G_۶$ نشان داده شده است.



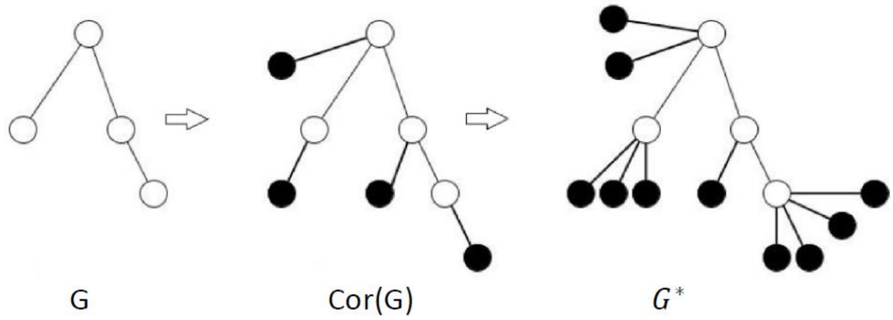
شکل ۱-۴: گراف چرخ دنده $G_۶$

تعریف ۳۲.۲.۱. فرض کنیم $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف باشند اجتماع دو گراف به‌صورت $G = G_۱ \cup G_۲$ می‌باشد که به تعداد $V(G) = V(G_۱) \cup V(G_۲)$ راس دارد و به تعداد $E(G) = E(G_۱) \cup E(G_۲)$ یال دارد.

تعریف ۳۳.۲.۱. جمع دو گراف $V(G_۱)+V(G_۲)$ شامل $V(G_۱)\cup V(G_۲)$ راس است که همه یال‌های $V(G_۱)$ به $V(G_۲)$ متصل است. برای سه یا تعداد بیشتری گراف $G_۱, G_۲, ..., G_n$ جمع گراف‌های $G_۱+G_۲+...+G_n$ به‌صورت $(G_۱+G_۲)\cup(G_۲+G_۳)\cup...\cup(G_{n-۱}+G_n)$ می‌باشد.

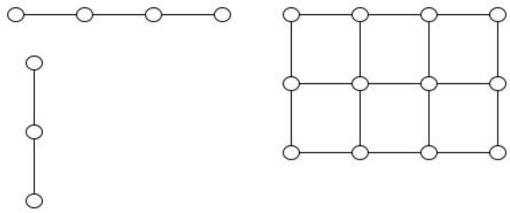
تعریف ۳۴.۲.۱. گراف تاج که با $cor(G)$ نشان داده می‌شود گرافی است که به هر راس در G یک راس جدید با درجه‌ی یک اضافه می‌کنیم.

بطور کلی اگر گراف G با راس‌های $\{v_۱, ..., v_n\}$ و اعداد صحیح و نامنفی $\{p_۱, ..., p_n\}$ را داشته باشیم، آن‌گاه گراف تورن $G^*(p_۱, ..., p_n)$ برای هر i با اضافه کردن p_i تا راس جدید از درجه‌ی یک به راس v_i به‌دست می‌آید. اگر برای همه‌ی راس‌ها $p_i=۱$ باشد، آن‌گاه گراف تورن یک گراف تاج است. در واقع گراف تاج حالت خاصی از گراف تورن است که به هر راس فقط یک راس درجه‌ی یک اضافه می‌شود. شکل(۱-۵)



شکل ۱-۵: گراف تاج و گراف تورن گراف G

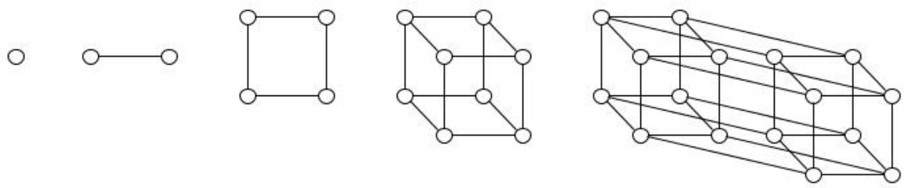
تعریف ۳۵.۲.۱. ضرب دکارتی $G_۱\times G_۲$ گراف‌های $G_۱$ و $G_۲$، گرافی است که مجموعه راس‌های آن حاصل‌ضرب دکارتی $V(G_۱)\times V(G_۲)$ و دو راس گراف، حاصل‌ضرب $(v_۱, v_۲)$ و $(\nu_۱, \nu_۲)$ مجاور هستند هرگاه $v_۱=\nu_۱$ و $v_۲$ به $\nu_۲$ متصل باشد یا $v_۲=\nu_۲$ و $v_۱$ به $\nu_۱$ متصل باشد. شکل(۱-۶)



شکل ۱-۶: حاصل‌ضرب دکارتی دو گراف

تعریف ۳۶.۲.۱. ضرب تانسوری بین دو گراف $G = (V(G), E(G))$ و $H = (V(H), E(H))$ که با $G \otimes H$ نشان داده می‌شود عبارتند از گرافی با مجموعه راس‌های $V(G) \times V(H)$ که دو راس (x, y) و (υ, ν) مجاورند اگر و فقط اگر $\{x, \upsilon\} \in E(G)$ و $\{y, \nu\} \in E(H)$.

تعریف ۳۷.۲.۱. گراف k - مکعب گرافی است که راس‌های آن دنباله‌های غیر تکراری k -تایی از صفر و یک است و یال‌ها میان راس‌هایی رسم می‌شوند که دقیقا در یک جایگاه متفاوت باشند. گراف k مکعب را با Q_k نمایش می‌دهیم. شکل $(۱ - ۷)$ از چپ به راست گراف‌های $Q_۰$، $Q_۱$، $Q_۲$، $Q_۳$ و $Q_۴$ را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۷: گراف k- مکعب

در این فصل به بیان تعاریف و اصطلاحاتی پرداختیم که در ادامه برای معرفی عدد پراکندگی به آن‌ها نیاز داریم.