بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شیراز

دانشکده علوم، گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی گرایش کاربردی

بررسی کارایی روش تجزیه آدومیان بهبود یافته برای حل برخی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی

نگارش:

محمد رضا پاکباز

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل حسام‌الدینی

استاد مشاور:

دکتر محمود حاجی شعبانی

بهمن ۱۳۹۱

تقدیم به آنان که

کلامشان، صداقت

نگاهشان، محبت

و تبسم‌شان، حیات را برایم به ارمغان آورد؛

تقدیم به

چشمان پر محبت مادرم که زیباترین نقش نگارستان خاطرام، سیمای اوست

دل دریایی پدرم که تقویم زندگی نیز تلافی‌گر یک نگاه محبت آمیزش نیست

سپاسگزاری

با سپاس ازسه وجود مقدس:

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...

موهایشان سپید شد تا ما روسفید شویم...

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند...

پدرانمان

مادرانمان

استادانمان

اگرچه زبانم قاصر و قلم عاجز است از بجا آوردن شکر خداوند عزوجل، ولی به رسم ادب بندگی پروردگار را شاکرم که توفیق عنایت فرمود تا قدمی هرچند کوچک در راه تحصیل علم بردارم و در این راه بر خود لازم می‌دانم که از زحمات استاد ارجمند جناب آقای دکتر اسماعیل حسام الدینی و دکتر محمود حاجی شعبانی تشکر و قدردانی نمایم.

بر خود لازم می‌دانم که از دیگر اساتید گروه ریاضی که در این مدت با رهنمودهای خود روشنگر راه ما بودند تشکر و قدردانی نمایم.

چکیده

بررسی کارایی روش تجزیه آدومیان بهبود یافته برای حل برخی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی

نگارش:

محمد رضا پاکباز

پدیده‌های غیرخطی که در بسیاری از رشته‌های علمی ظاهر می‌شوند به‌وسیله‌ی معادلات دیفرانسیل جزئی قابل مدلسازی هستند. رده‌ی وسیعی از روش‌های تحلیلی و عددی برای حل این نوع معادلات استفاده شده‌اند. به عنوان مثال می‌توان از روش تجزیه آدومیان، روش تداخلی هموتوپی نام برد. روش تجزیه آدومیان اولین بار توسط جورج آدومیان ارائه و برای رده‌ی وسیعی از معادلات دیفرانسیل بکارگرفته شد. ثابت شده است این روش برای حل معادلات دیفرانسیل موثر و مطمئن است. مزیت این روش همگرایی به جواب مساله است.

در این پایان‌نامه به بررسی روش تجزیه آدومیان و روش تجزیه آدومیان بهبودیافته در حل پاره‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی می‌پردازیم.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فهرست جدول‌ها

.

عنوان **صفحه**

فهرست شکل‌ها

.

عنوان **صفحه**

فصل۱

روش تجزیه آدومیان

۱-۱ مقدمه

در دهه ۱۹۸۰، جورج آدومیان[1] (۱۹۹۶ – ۱۹۲۳) یک روش قدرتمند جدید برای حل معادلات تابعی غیرخطی معرفی کرد. پس از آن این روش به روش تجزیه آدومیان معروف شد [۴--۷]. این روش بر پایه‌ی تجزیه جواب معادله شامل عملگر غیرخطی به یک مجموعه از توابع است. روش آدومیان در فرمول‌بندی بسیار ساده است و ثابت شده است که برای حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی موثر و مطمئن می‌باشد. این روش نیمه تحلیلی از این مزیت برخوردار است که جواب دقیق یا تقریبی را با دقت بالا و انجام حداقل محاسبات نتیجه می‌دهد.

۱-۲ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادله‌ای است شامل یک تابع n متغیره و مشتقات جزئی آن است که به اختصار PDE[2] نامیده می‌شود. به طور کلی یک PDE برای تابع $u(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ به فرم کلی زیر است:

$$F(x_۱, x_۲, \ldots, x_n, u, u_{x_۱}, u_{x_۲}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_۱ x_۱}, u_{x_۱ x_۲}, \ldots) = ۰ \,.$$

مرتبه یک PDE، مرتبه بالاترین مشتق جزئی است که در معادله ظاهر می‌شود.

۱-۲-۱ معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم‌بندی می‌شوند. یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی است اگر:

George Adomian[1]
Partial Differential Equation[2]

۱) توان متغیر مستقل و هر مشتق جزئی در معادله یک باشد.

۲) ضرایب متغیر مستقل و ضرایب هر مشتق جزئی ثابت یا متغیرهای وابسته باشند.

بنابراین اگر یک از دو شرط فوق برقرار نباشد، معادله غیرخطی نامیده می‌شود.

۱-۳ برخی از روش‌های تحلیلی در حل معادلات دیفرانسیل

در این بخش به معرفی سه روش تحلیلی در حل معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم.

۱-۳-۱ روش تداخلی هموتوپی

ابتدا مقدماتی که برای این روش مورد نیاز است را می‌آوریم.

تعریف ۱.۱: فرض کنیم $I = [\circ, \text{۱}]$ و X یک فضای توپولوژی باشد. یک مسیر از نقطه a به نقطه b در فضای X عبارت است از تابع پیوسته‌ای مانند $f : I \to X$ به طوری که $f(\circ) = a$ و $f(\text{۱}) = b$ که در اینجا a را نقطه شروع و b را نقطه پایانی مسیر می‌نامند.

تعریف ۲.۱: فرض کنیم X و Y دو مسیر با نقطه شروع $p \in X$ و نقطه پایانی $q \in X$ باشد. در این صورت مسیرهای f و g را هموتوپیک نامند اگر یک تابع پیوسته مانند $H : I^{\text{۲}} \to X$ موجود باشد به طوری که داشته باشیم:

$$H(s, \circ) = f(s), \quad H(\circ, t) = p,$$
$$H(s, \text{۱}) = g(s), \quad H(\text{۱}, t) = q.$$

تعریف ۳.۱: فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک و $f, g : X \to Y$ نگاشت‌هایی پیوسته از X به Y باشند، گوییم f با g هموتوپیک است هرگاه یک نگاشت پیوسته مانند $F : X \to Y$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $s \in X$ روابط زیر برقرار باشند:

$$F(s, \circ) = f(s), \quad F(s, \text{۱}) = g(s).$$

برای روشن‌تر شدن این مفهوم، فرض کنیم که برای هر مقدار $\circ \leq t \leq \text{۱}$ نگاشت پیوسته $F_t : X \to Y$ تعریف شده باشد به قسمی که به ازای هر $s \in X$

$$F_t(s) = F(s,t)\,.$$

اگر t را پارامتر زمان در نظر بگیریم، آنگاه در زمان‌های صفر و یک خواهیم داشت

$$F_{\circ}(s) = F(s,\circ) = f(s),$$

$$F_{۱}(s) = F(s,۱) = g(s).$$

بنابراین اگر t از صفر تا یک تغییر کند، آنگاه f به طور پیوسته بر روی g قرار می‌گیرد. به بیان دقیق‌تر، هموتوپی یعنی اثر پیوسته یک منحنی به سمت یک منحنی دیگر، که منحنی اول را منحنی اولیه و منحنی دوم را منحنی نهایی (پایانی) می‌نامیم.

هموتوپی مفهومی راکد در توپولوژی می‌باشد. ولی با ترکیب آن با فنون عددی می‌توان ابزار مناسبی برای حل معادلات دیفرانسیل ساخت. هموتوپی یک نگاشت پیوسته از بازه $I = [\circ, ۱]$ به یک فضای تابعی می‌باشد، که در آن مفهوم پیوستگی نسبت به توپولوژی فضای تابعی تعریف می‌شود. وقتی که پارامتر λ از صفر تا یک تغییر می‌کند هموتوپی $\varphi(\lambda)$ تابع $\varphi(\circ) = f$ را به تابع $\varphi(۱) = g$ تغییر می‌دهد. در این صورت به توابع f و g هموتوپیک گفته می‌شود.
برای بیان روش تداخلی هموتوپی[۱] معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$F(u) = g(x,t), \tag{۱-۱}$$

معادله (۱-۱) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$Lu + Nu - g(x,t) = \circ, \tag{۱-۲}$$

در رابطه (۱-۲)، L عملگر خطی، N عملگر غیرخطی و $g(x,t)$ یک تابع مشخص داده شده می‌باشد. با استفاده از تکنیک هموتوپی، هموتوپی $v(x,p) : \Omega \times [\circ\,,\,۱] \rightarrow R$ را ایجاد می‌کنیم [۲۲،۸۲].
پس:

$$H(v,p) = (۱ - p)\,[L(v) - L(u_{\circ})] + p\,[F(v) - g(x,t)] = \circ\,,$$

$$H(v,p) = L(v) - L(u_{\circ}) + pL(u_{\circ}) + p\,[N(v) - g(x,t)] = \circ\,,$$

[۱] Homotopy Perturbation Method

که در آن $p \in [0\,,\,1]$ پارامتر جانشانی و u_0 جواب آغازین معادله (۱-۱) می‌باشد. لذا:

$$H(v,0) = L(v) - L(u_0) = 0\;,$$
$$H(v,1) = F(v) - g(x,t) = 0\;,$$

روند تغییر p از صفر به یک همان تغییر $v(x,p)$ از $u_0(x,t)$ به $u(x,t)$ است. جملات $L(v) - L(u_0)$ و $F(v) - g(x,t)$ نیز هموتوپیک نامیده می‌شوند. مطابق روش هموتوپی پارامتر جانشانی p را به صورت یک پارامتر کوچک بکار می‌بریم و جواب را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots\;,$$

با جایگذاری $p = 1$ در رابطه بالا جواب تقریبی (۱-۱) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$v = \lim_{p \to \infty} v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots\;.$$

۱-۳-۲ روش تکرار تغییراتی

روش تکرار تغییراتی[1] اولین بار در سال ۱۹۷۸ توسط اینوکاتی[2] ارائه گردید و در سال ۱۹۹۹ توسط هی تعمیم داده شد. این روش در حالت کلی مسائلی به شکل (۱-۱) را مورد بررسی قرار می‌دهد. ایده اصلی این روش بر اساس تابعک تصحیح و ضربگر اساسی لاگرانژ که باید به طور بهینه به وسیله حساب تغییرات[3] محاسبه گردد بنا شده است. ضربگر اساسی لاگرانژ در بهینه‌سازی و حساب تغییرات کاربرد دارد. برای نشان دادن مفهوم ضربگر اساسی لاگرانژ معادله‌ی جبری زیر را بیان می‌کنیم:

$$f(x) = 0\;,\quad x \neq 0\;.$$

اگر x_n ریشه تقریبی معادله فوق باشد، داریم:

$$f(x_n) = 0\;.$$

---

[1] Variational Iteration Method

[2] Inokuti

[3] Calculus of Variations

برای بهتر شدن تقریب، معادله‌ی زیر مرسوم به معادله‌ی تصحیح را تشکیل می‌دهیم:

$$x_{n+1} = x_n + \lambda f(x_n)\,.$$

در این رابطه λ ضربگر اساسی لاگرانژ است که با برابر صفر قرار دادن $\frac{dx_{n+1}}{dx_n}$، مقدار بهینه‌ی $-\frac{1}{f'(x_n)}$ را می‌گیرد. لذا فرمول نیوتن نتیجه می‌شود:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,.$$

روش‌های دیگری نیز برای ساختن معادله‌ی تصحیح وجود دارد. این معادله را می‌توان به‌فرم زیر نیز در نظر گرفت:

$$x_{n+1} = x_n + \lambda g(x_n) f(x_n)\,,$$

که در آن $g(x)$ تابع کمکی است. پس از تعیین λ، فرمول تکراری زیر حاصل می‌شود:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)f(x_n)}{g(x_n)f'(x_{n+1}) + g'(x_n)f(x_n)}.$$

تابعک تصحیح را به قرار زیر تشکیل می‌دهیم [۵۲، ۶۲]:

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda(\xi)\left\{L[u_n(\xi)] + N[\tilde{u}_n(\xi)] - g(\xi)\right\}d\xi\,, \qquad (۳\text{-}۱)$$

در رابطه (۱-۳) اندیس n نمایشگر n - امین تقریب از جواب واقعی و $\tilde{u}_n$ به عنوان قسمتی است که دارای تغییرات محدود شده می‌باشد و این بدان معنی است که تغییرات نسبت به متغیر $\tilde{u}_n$ برابر صفر خواهد بود.

$$\delta u_{n+1}(x,t) = \delta u_n(x,t) + \delta \int_0^t \lambda(\xi)\left\{L[u_n(\xi)] + N[\tilde{u}_n(\xi)] - g(\xi)\right\}d\xi\,,$$
$$\delta u_{n+1}(x,t) = \delta u_n(x,t) + \delta \int_0^t \lambda(\xi)[L(u_n(\xi)) - g(\xi)]d\xi\,,$$

این روش برای حل مسائل غیرخطی ابداع شده است. دانشمندان زیادی با استفاده از این

روش مسائلی گوناگون در رشته‌های مختلف را مورد بررسی قرار داده‌اند. همگرایی این روش در مرجع [۱۴] بررسی شده است.

۱-۳-۳ روش تجزیه آدومیان

برای معرفی روش تجزیه آدومیان[۱]، معادله‌ی تابعی زیر را در نظر می‌گیریم [۰۳]:

$$y - Ny = f, \tag{۱-۴}$$

که در آن N یک عملگر غیرخطی از فضای هیلبرت H به H و f یک تابع معلوم در H می‌باشد. در روش تجزیه آدومیان فرض می‌شود که جواب (۱-۴) یک سری نامتناهی به شکل زیر باشد:

$$y = \sum_{i=\circ}^{\infty} y_i, \tag{۱-۵}$$

در معادله (۱-۴)، جمله‌ی غیرخطی Ny را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$Ny = \sum_{i=\circ}^{\infty} A_i(y_\circ, \ldots, y_i)\,, \tag{۱-۶}$$

که در این رابطه A_i به ازای هر i، به چند جمله‌ای‌های آدومیان معروف هستند. آدومیان این چند جمله ای‌ها را به صورت زیر معرفی کرد [۶۱،۲۴]:

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{i=\circ}^{\infty}\lambda^i y_i\right)\right]_{\lambda=\circ}, \quad n = \circ, 1, 2, \ldots .$$

برای مثال :

$$\begin{aligned}
A_\circ &= N(y_\circ),\\
A_1 &= y_1 N'(y_\circ),\\
A_2 &= y_2 N'(y_\circ) + \frac{1}{2!}y_1^2 N''(y_\circ),\\
A_3 &= y_3 N'(y_\circ) + y_1 y_2 N''(y_\circ) + \frac{1}{3!}y_1^3 N'''(y_\circ),\\
A_4 &= y_4 N'(y_\circ) + (\frac{1}{2!}y_2^2 + y_1 y_3)N''(y_\circ) + \frac{1}{2!}y_1^2 y_2 N'''(y_\circ) + \frac{1}{4!}y_1^4 N^{(4)}(y_\circ).
\end{aligned} \tag{۱-۷}$$

[1] Adomian decomposition method

همانطور که در چندجمله‌ای‌های آدومیان مشاهده می‌کنید A_0 فقط به y_0 و A_1 فقط به y_0 و y_1 و به همین ترتیب به ازای هر $i \geq 0$، A_i فقط به y_0 و ... و y_i وابسته می‌باشند.
با جایگذاری (۱-۷) در (۱-۶) خواهیم داشت [۳۴]:

$$\begin{aligned}
N(y) &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots = N(y_0) + (y_1 + y_2 + y_3)N'(y_0) \\
&+ \tfrac{1}{2!}(y_1^2 + 2y_1y_2 + 2y_1y_3 + y_2^2 + \cdots)N''(y_0) \\
&+ \tfrac{1}{3!}(y_1^3 + 3y_1^2y_2 + 3y_1^2y_3 + 6y_1y_2y_3 + \cdots)N'''(y_0) + \cdots \\
&= N(y_0) + (y - y_0)N'(y_0) + \tfrac{1}{2!}(y - y_0)^2N''(y_0) + \cdots .
\end{aligned}$$

بسط آخر نشان می‌دهد که سری A_n، مشابه سری تیلور اما حول تابع y_0 است.
با جایگذاری (۱-۵) و (۱-۶) در معادله‌ی اصلی رابطه‌ی بازگشتی زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} y_0 = f\,, \\ y_{n+1} = A_n(y_0, y_1, \ldots, y_n)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \end{cases} \tag{۱-۸}$$

جواب معادله به صورت $y = \sum\limits_{i=0}^{\infty} y_i$ است که در آن y_i از (۱-۸) حاصل می شود. تقریب مرتبه‌ی n- ام آن به صورت زیر است:

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} y_i. \tag{۱-۹}$$

روشی دیگر برای بدست آوردن چند جمله‌ای‌های آدومیان را در زیر توضیح می‌دهیم. این روش در اصل به اتحادهای جبری و مثلثاتی و همچنین بسط تیلور وابسته است. دو نکته‌ی مهم که در اینجا باید توجه شود این است که: در (۱-۷) مشاهده می‌شود به ازای هر $i \geq 0$، A_i فقط به y_0 و ... و y_i وابسته می‌باشند. ثانیاً مجموع زیر اندیس‌های مولفه‌های y در هر جمله ی A_n برابر n است. این روش را با ارائه‌ی دو مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۴.۱: فرض کنید:

$$N(y) = yy_x\,.$$

ابتدا قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n, \\ y_x &= \sum_{n=0}^{\infty} y_{n_x}, \end{aligned} \qquad (1-10)$$

با جایگذاری (۱-۱۰) در $N(y) = yy_x$ خواهیم داشت:

$$N(y) = (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots)(y_{0_x} + y_{1_x} + y_{2_x} + y_{3_x} + \cdots).$$

با ضرب دو پرانتز بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} N(y) &= y_0 y_{0_x} + y_{0_x} y_1 + y_0 y_{1_x} + y_{0_x} y_2 + y_{1_x} y_1 + y_{2_x} y_0 \\ &+ y_{0_x} y_3 + y_{1_x} y_2 + y_{2_x} y_1 + y_{3_x} y_0 + y_{0_x} y_4 + y_0 y_{4_x} \\ &+ y_{1_x} y_3 + y_1 y_{3_x} + y_2 y_{2_x} + \cdots. \end{aligned} \qquad (1-11)$$

اکنون با دسته‌بندی تمام جملات (۱-۱۱) که دارای مجموع زیراندیس‌های برابر هستند $N(y)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} N(y) &= \underbrace{y_0 y_{0_x}}_{A_0} + \underbrace{y_{0_x} y_1 + y_0 y_{1_x}}_{A_1} + \underbrace{y_{0_x} y_2 + y_{1_x} y_1 + y_{2_x} y_0}_{A_2} \\ &+ \underbrace{y_{0_x} y_3 + y_{1_x} y_2 + y_{2_x} y_1 + + y_{3_x} y_0}_{A_3} \\ &+ \underbrace{y_{0_x} y_4 + y_0 y_{4_x} + y_{1_x} y_3 + y_1 y_{3_x} + y_2 y_{2_x}}_{A_4} + \cdots. \end{aligned}$$

در نتیجه چندجمله‌ای‌های آدومیان به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} &A_0 = y_0 y_{0_x}, \\ &A_1 = y_{0_x} y_1 + y_0 y_{1_x}, \\ &A_2 = y_{0_x} y_2 + y_{1_x} y_1 + y_{2_x} y_0, \\ &A_3 = y_{0_x} y_3 + y_{1_x} y_2 + y_{2_x} y_1 + y_{3_x} y_0, \\ &A_4 = y_{0_x} y_4 + y_0 y_{4_x} + y_{1_x} y_3 + y_1 y_{3_x} + y_2 y_{2_x}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

مثال ۵.۱: فرض کنید:

$$N(y) = sin(y)\,.$$

ابتدا باید $A_0 = F(y_0)$ را از جملات دیگر جدا کنیم. بدین منظور $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ را در $N(y) = sin(y)$ جایگذاری می‌کنیم. بنابراین:

$$N(y) = \sin\left[y_0 + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \cdots)\right]. \tag{۱۲-۱}$$

برا ی جدا کردن $A_0 = F(y_0)$ از رابطه‌ی مثلثاتی زیر استفاده می‌کنیم:

$$sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} N(y) &= \sin(y_0)\cos(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \cdots) \\ &+ cos(y_0)\sin(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \cdots). \end{aligned}$$

با جداسازی $N(y_0) = sin(y_0)$ و استفاده از بسط تیلور $\cos(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \cdots)$ و $\sin(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \cdots)$ بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} N(y) &= \sin(y_0)\left(1 - \frac{1}{2!}(y_1 + y_2 + \cdots)^2 + \frac{1}{4!}(y_1 + y_2 + \cdots)^4 - \cdots\right) \\ &+ \cos(y_0)\left((y_1 + y_2 + \cdots) - \frac{1}{3!}(y_1 + y_2 + \cdots)^3 + \cdots\right). \end{aligned}$$

بنابراین با بسط جملات جبری رابطه‌ی فوق داریم:

$$\begin{aligned} N(y) &= \sin(y_0)\left(1 - \frac{1}{2!}(y_1^2 + 2y_1y_2 + \cdots) + \cdots\right) \\ &+ \cos(y_0)\left((y_1 + y_2 + \cdots) - \frac{1}{3!}y_1^3 + \cdots\right). \end{aligned}$$

اکنون در بسط آخر، با دسته‌بندی تمام جملاتی که مجموع زیراندیس‌های برابر دارند، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} N(y) &= \underbrace{\sin(y_0)}_{A_0} + \underbrace{y_1 \cos(y_0)}_{A_1} \\ &+ \underbrace{y_2 \cos(y_0) - \frac{1}{2!} y_1^2 \sin(y_0)}_{A_2} \\ &+ \underbrace{y_3 \cos(y_0) - y_1 y_2 \sin(y_0) - \frac{1}{3!} y_1^3 \cos(y_0)}_{A_3} + \cdots . \end{aligned}$$

در نتیجه چندجمله‌ای‌های آدومیان به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} A_0 &= \sin(y_0), \\ A_1 &= y_1 \cos(y_0), \\ A_2 &= y_2 \cos(y_0) - \frac{1}{2!} y_1^2 \sin(y_0), \\ A_3 &= y_3 \cos(y_0) - y_1 y_2 \sin(y_0) - \frac{1}{3!} y_1^3 \cos(y_0), \\ &\vdots \end{aligned}$$

۱-۴ روش تجزیه آدومیان اصلاح‌شده

در این بخش روش تجزیه آدومیان اصلاح شده[1] که در سال ۲۰۰۱ بوسیله‌ی وزواز[2] ارائه شد را معرفی می‌کنیم [۴۴]. این روش همگرایی سری جواب را بیشتر تسریع می‌بخشد و حجم محاسبات را نیز کاهش می‌دهد. ابتدا معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$Ly + Ry + Ny = g, \tag{۱-۱۳}$$

که L عملگر مشتق با بالاترین مرتبه است و فرض می‌شود معکوس پذیر است. همچنین R عملگر دیفرانسیل خطی است که مرتبه اش از L کمتر است. g جمله‌ی منبع است و Ny نشان

[1] Modified Adomian decomposition method
[2] Wazwaz