دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

مدل آمیخته وایبل و کاربردهای آن

زیبا نوروزی

استاد راهنما :

دکتر مسعود یارمحمدی

استاد مشاور :

دکتر علی شادرخ

پاییز 1391

بسم الله الرحمن الرحيم

payame noor university

Faculty Of Science

Submitted in Partial Fulfilment of the Requirements for degree do M.Sc in

Mathematical Statistics

Mixture Weibull Model

And Its Application

By :

Z.Norozi

Supervisor :

Doc M.Yarmohammadi

Advisor:

Doc :A.Shadrokh

winter,۲۰۱۲

تقدیم به :

روح بلند پرواز تنها برادرم ، که با رفتنش به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم.

قدردانی

با سپاس فراوان از پدر و مادرم ،خواهرم، همسرم و مادرشان ، که با قلبی آکنده از عشق و معرفت ، محیطی سرشار از سلامت ، امنیت ، آرامش و آسایش را برای من فراهم آورده اند .

و با تقدیر و تشکر شایسته از استادان فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر یار محمدی و جناب آقای دکتر شادرخ که مرا در نگارش این پایان نامه یاری دادند .

زیبا نوروزی

تهران

پاییز 1391

چکیده

در این پایان نامه برآورد پارامتر آمیخته و پارامترهای توزیع آمیخته وایبل، با به کارگیری روش‌های کلاسیک گشتاوری، ماکسیمم درستنمایی و روش بیز مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. به علاوه تابع چگالی احتمال، تابع توزیع تجمعی، همچنین تابع قابلیت اطمینان و نرخ شکست توزیع آمیخته وایبل ارائه می‌شود.

در ادامه با استفاده از روش‌های شبیه سازی با در نظر گرفتن میانگین حداقل مربعات خطا روش‌های برآورد فوق مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

واژه‌های کلیدی : توزیع آمیخته وایبل، پارامتر آمیختگی، میانگین حداقل مربعات خطا، قابلیت اطمینان، نرخ شکست، ماکسیمم درستنمایی.

فهرست مندرجات

مقدمه ۱

فصل 1 : توزیع وایبل

1.1 مقدمه 3

2.1 تاریخچه و مفهوم توزیع وایبل 4

3.1 معانی فیزیکی و تفسیر توزیع وایبل 6

4.1 تعریف و ویژگی های توزیع وایبل 8

5.1 مروری بر آنالیز وایبل 15

۶.۱ مزایای استفاده از توزیع وایبل ۱۶

فصل 2 : توزیع آمیخته وایبل

۱.2 مقدمه 17

2.2 نمونه گیری از یک جامعه ناهمگن 19

3.2 مدل آمیخته متناهی 20

4.2 معرفی توزیع آمیخته 20

5.2 توزیع آمیخته وایبل 21

6.2 آماره های ترتیبی 29

7.2 توزیع آمیخته وایبل وارون 30

فصل 3 : برآورد پارامترهای توزیع آمیخته وایبل به روش کلاسیک

۱.3 مقدمه 33

2.3 برآورد پارامترهای مدل آمیخته وایبل 34

3.3 روش های برآورد کلاسیک 35

4.3 برآورد پارامترها به روش درستنمایی ماکسیمم 39

فصل 4 : برآورد پارامترهای توزیع آمیخته وایبل به روش بیز

1.4 مقدمه 41

2.4 معرفی روش بیز 42

3.4 برآورد پارامترهای توزیع آمیخته وایبل به روش بیز 45

فصل 5 : شبیه سازی

1.5 مقدمه 48

2.5 مقایسه معیار (MSE) میانگین حداقل مربعات خطا برای سه روش برآورد پارامتر 49

4.5 نتیجه گیری 56

برخی از اصطلاحات استفاده شده در متن پایان نامه 57

واژه نامه انگلیسی به فارسی 67

فهرست منابع 73

لیست اشکال

نمودار (1- 1): تابع چگالی احتمال برای دو توزیع وایبل با

$\beta_1 = 1, \beta_2 = 2, \alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2$ 7

نمودار(1-2) : تابع توزیع تجمعی برای دو توزیع وایبل با

$\beta_1 = 1, \beta_2 = 2, \alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2$ 8

نمودار(1-3) : تابع قابلیت اطمینان برای دو توزیع وایبل با

$\beta_1 = 1, \beta_2 = 2, \alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2$ 10

نمودار(1- 4) : نرخ شکست برای دو توزیع وایبل با

$\gamma = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 2, \alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2$ 11

نمودار(1- 5) توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف $\beta = 1$ و α های مختلف 15

نمودار(2-1) نمودار تابع چگالی آمیخته با دو نما 19

نمودار(2-2): نرخ مخاطره و تابع چگالی برخی از مدل های آمیخته دوگانه

$w_1 = 0.8, \beta_1 = 1.0, \alpha_1 = 1.2, \beta_2 = 2.5, \alpha_2 = 0.7$ 27

نمودار(3-1): کاغذ مقدار غایی (قسمت بالا) و کاغذ وایبل (قسمت پایین) 38

نمودار(5- 1) مقایسه میانگین حداقل مربعات خطا برای سه روش برآورد پارامترهای توزیع آمیخته وایبل با $\alpha_1 = 0.1$(چپ)

و $\alpha_1 = 2$(راست) 51

نمودار(5- 2): مقایسه میانگین حداقل مربعات خطا برای سه روش برآورد پارامترهای توزیع آمیخته وایبل با $\alpha_2 = 0.2$ (چپ)

و $\alpha_2 = 1$ (راست) 52

نمودار(5-3): مقایسه میانگین حداقل مربعات خطا برای سه روش برآورد پارامترهای توزیع آمیخته وایبل با $\beta_1 = 2$ (چپ) و

$\beta_1 = 3$ (راست) 53

نمودار(5- 4): مقایسه میانگین حداقل مربعات خطا برای سه روش برآورد پارامترهای توزیع آمیخته وایبل با $\beta_2 = 1$ و

$\beta_2 = 2$(راست) 54

نمودار(5-5) : مقایسه میانگین حداقل مربعات خطا برای سه روش برآورد پارامترهای توزیع آمیخته

وایبل 55

لیست جداول

جدول (5-1) : میانگین حداقل مربعات خطا برای برآورد با پارامتر های

$\alpha_1 = 2; \alpha_2 = 1; \beta_1 = 3; \beta_2 = 2; w = 0.8416$ 49

جدول (5-2) : میانگین حداقل مربعات خطا برای برآورد با پارامتر های

$\alpha_1 = 0.1; \alpha_2 = 0.2; \beta_1 = 2; \beta_2 = 1; w = 0.8416$ 50

مقدمه

توزیع وایبل توسط والدی وایبل در سال 1939 به عنوان مدل مناسب در مطالعات قابلیت اطمینان و مسائل مربوط به آزمون حیات از قبیل زمان شکست یا طول عمر یک محصول و یا واحد خاص، شناخته شد. توزیع‌های حاصل از ترکیب مؤلفه‌های دو توزیع یا بیشتر، «آمیخته» یا «مرکب» نامیده شده‌اند. توزیع آمیخته وایبل ترکیبی از دو پارامتر مقیاس و دو پارامتر شکل و یک پارامتر نسبت است. در سال‌های اخیر نگاه اجمالی به برخی از روش‌های محاسبه برآوردگرهای کارا از توزیع آمیخته شده است. یکی از این روش‌ها که برای برآورد پارامترهای توزیع آمیخته وایبل به کار گرفته می‌شود، استفاده از روش گشتاورهای نمونه است که پاول آر راید (1961) به آن پرداخته است. او ترکیب توزیع پوآسن، دو جمله‌ای و حالت خاصی از توزیع آمیخته وایبل را مورد بررسی قرار داد. روش گرافیکی برای برآورد پارامترهای توزیع آمیخته در آزمایش طول عمر لامپ‌های الکترونیکی، روش دیگری است که توسط اچ کی کاو (1959) انجام گرفته است.

این پایان نامه به مقایسه روش‌های برآورد پارامترهای توزیع آمیخته وایبل به منظور یافتن بهترین و دقیق‌ترین برآوردگر از بین سه روش برآورد پارامتر (گشتاورهای نمونه، ماکسیمم درستنمایی و بیز) می‌پردازد. برای انجام این کار از شبیه سازی مونت‌کارلو مارکفی روی داده‌های تولید شده از توزیع وایبل

با استفاده از نرم افزار مطلب7.1 و به کارگیری سه روش برآورد پارامتر برای توزیع آمیخته وایبل، استفاده شده است.

بخش 2.1 و 3.1 از فصل یک این پایان نامه به تاریخچه و مفهوم توزیع وایبل و منشاء پیدایش آن اختصاص دارد. در بخش 4.1 شش تابع ریاضی مربوط به توابع طول عمر (تابع چگالی شکست، تابع توزیع شکست، تابع قابلیت اطمینان، تابع نرخ مخاطره، تابع نرخ مخاطره تجمعی و تابع میانگین عمر باقی مانده) معرفی شده است. در پایان فصل یک، مروری بر آنالیز وایبل و مزایای استفاده از این توزیع بیان شده است.

در فصل دوم مدل‌های آمیخته متناهی و توزیع آمیخته را معرفی و نحوه ترکیب دو توزیع وایبل و ایجاد یک توزیع آمیخته وایبل با پنج پارامتر که شامل پارامتر آمیختگی (W) است، بیان شده است. سپس حالت‌های مختلف نمودار این تابع چگالی و نرخ مخاطره آن بررسی شده است و در پایان فصل به آماره های ترتیبی این توزیع اشاره و قضیه مربوطه نیز اثبات شده است.

فصل سوم این پایان نامه که برآورگرهای کلاسیک توزیع آمیخته وایبل را شرح می‌دهد، شامل دو بخش است که بخش اول آن مربوط به برآورد پارامترها به روش گشتاورهای نمونه، و بخش دوم در خصوص برآورد پارامترهای توزیع به روش ماکسیمم درستنمایی است.

فصل چهارم، به برآورد پنج پارامتر توزیع آمیخته وایبل به روش بیز، پرداخته است. در این فصل با در نظر گرفتن توزیع‌های پیشین مربوطه، برآورد پارامترهای توزیع انجام گرفته است.

در فصل پنج، از معیار حداقل میانگین مربعات خطا (MSE) جهت مقایسه این برآوردگرها استفاده شده است. که در جداول (5-1) و (5-2) ارائه شده‌اند. برای این منظور ابتدا با در نظر مقادیر مختلف برای پارامترهای توزیع‌های پیشین و استفاده از نرم افزار مطلب7،1 به شبیه سازی مونت‌کارلو مارکفی پرداخته شده است.

فصل 1

توزیع وایبل

1.1 مقدمه

توزیع وایبل[1] یکی از توزیع‌های احتمالاتی پیوسته است. اگر چه این توزیع اولین بار توسط دانشمند فرانسوی فرچه در سال 1927 شناخته شد و سپس رزین و راملر در سال 1933 از آن برای توصیف توزیع اندازه ذرات بهره بردند، اما نام آن برگرفته از نام والدی وایبل است که آن را با جزئیات در سال 1951 توصیف کرد.

بیش از نیم قرن است که توزیع وایبل توجه آمار دانان را به روش‌های متنوع در زمینه آمار کاربردی جلب کرده است. صدها و حتی هزاران مقاله در زمینه این توزیع نوشته شده است که روز به روز در حال افزایش و پیشرفت است. بدون شک توزیع وایبل یکی از محبوب‌ترین و جذاب‌ترین مدل‌ها برای آمارشناسان امروزی است و این به خاطر کاربردها و ویژگی‌های خاص زیادی که دارد بوده چون توانایی برازش به داده‌ها در هر زمینه‌ای را داراست، از داده‌های طول عمر گرفته تا داده‌های مربوط به آب و هوا، اقتصاد، کسب و کار، هیدرولوژی (مبحث آب شناسی)، دانش زیست شناسی و مهندسی، از این توزیع می‌توان استفاده کرد.
با این مقدمه می‌توان به ردپای ایجاد این توزیع در بین سال‌های 1920 تا 1951 رسید، زمانی که توسط وایبل برای مردم آن عصر ارائه شد.

---

[1] Waloddi Weibull

2.1 تاریخچه و مفهوم توزیع وایبل[2]

به طور کلی، یک روش علمی، یک دستورالعمل، یک نظریه و یا یک فرمول، نام یابنده واقعی و یا نویسنده‌اش را در بردارد. یک مثال معروف مربوط به توزیع گاوس[3] است، که به نام یابنده‌اش گاوس می‌باشد. قدیمی‌ترین اثر منتشر شده (که در آن شکل توزیع احتمال دو جمله‌ای

$pr(X = k) = \binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}$ برای p معین می شود و $n \to \infty$ است) مربوط به رساله ابراهام. د. موایور (1754-1667) است که در 12 نوامبر سال 1733 به زبان لاتین چاپ شده است. ترجمه انگلیسی این رساله با برخی اضافات را می توان در چاپ دوم آن (1738) در کتاب مشهورش به نام «اصول شانس» یا «روش محاسبه احتمال پیشامدها در بازی»، می توان یافت. پیرسون د. لاپلاس[4] (1827-1749) در سال 1774 توزیع نرمال را به صورت تقریبی از توزیع فوق هندسی به دست آورد و همچنین چهار سال بعد او جدول احتمال انتگرال

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u}(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \qquad (1-1)$$

را ارائه داد. سرانجام در قضیه کولسنیکم کورپوروم موتوس[5] (نظریه حرکت اجرام آسمانی) در 1809 و در «بستی مانگ در جنا اوکیت ون دیو باچتونگن[6]» (تعیین دقیق مشاهدات) در سال 1816 توزیعی را به صورت نوعی حکم قانونی اندازه خطاهای به وجود آمده در فاصله نجومی، به دست آورد.

1.2.1 منشاء علمی[7]

توزیع وایبل با تابع چگالی (DF)[8]

$$f(x|\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\alpha}{\beta}(\frac{x-\gamma}{\beta})^{\alpha-1}exp\left\{-(\frac{x-\gamma}{\beta})^{\alpha-1}\right\}, x \geq \gamma; \gamma\epsilon R \qquad (2-1)$$

تابع توزیع تجمعی (CDF)[9]

$$F(x|\alpha,\beta,\gamma) = \int_{\gamma}^{x} f(u|\alpha,\beta,\gamma)du = 1 - exp\left\{-(\frac{x-\gamma}{\beta})^{\alpha}\right\} \qquad (3-1)$$

نرخ مخاطره (HR)[10]

$$h(x|\alpha,\beta,\gamma) = \frac{f(x|\alpha,\beta,\gamma)}{1-F(x|\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{\alpha}{\beta}(\frac{x-\gamma}{\beta})^{\alpha-1} \qquad (4-1)$$

---

[۲] مطالب بیشتر در هالفان (۱۹۹۳) و رینه (۱۹۹۵)

[۳] Gauss distribution

[٤] Pierre simon de laplace

[٥] Theoria Motus Corporum Coelesticum

[٦] Bestimmung Der Genauigkeit Von Beobachtungen

[۷] مطالب بیشتر در اپتین (۱۹٦۰)، گامبل (۱۹٥٤-۱۹٥۸)، لیدبتر (۱۹۷٤)، تیلر و تووسیه (۱۹۷٦)

[۸] توضیحات بیشتر در بخش هاي بعد ارائه و در مورد آنها بحث خواهد شد.

[۹] Cumulative distribution function

[۱۰] Hazard rate

عضوی از خانواده توزیع‌های مقدار کرانگین[11] است. این توزیع‌ها به صورت توزیع‌های حدی[12] به ترتیب با کوچک‌ترین یا بزرگ‌ترین مقدار، در یک نمونه با اندازه $n \to \infty$ می‌باشند.
برای یک نمونه متناهی به اندازه n با هر متغیر نمونه X_i ، $(i = 1, \dots, n)$ مستقل و یکسان توزیع شده با تابع چگالی f(x) و تابع توزیع تجمعی F(x) دو آماره را تعریف می‌کنیم :

$$Y_n = \min_{1 \le i \le n}\{X_i\} \tag{5-1}$$

$$Z_n = \max_{1 \le i \le n}\{X_i\} \tag{6-1}$$

توزیع Y_n، مینیمم نمونه[13]، به صورت زیر پیدا می‌شود :

$$\begin{aligned} pr(Y_n > y) &= pr(X_i > y \quad \forall i) \\ &= \mathrm{pr}(X_1 > y, X_2 > y, \dots, X_n > y) \\ &= [1 - F(y)]^n. \end{aligned} \tag{7-1}$$

بنابراین تابع توزیع تجمعی Y_n به صورت زیر است

$$F_{Y_n}(y) = pr(Y_n \le y) = 1 - [1 - F(y)]^n \tag{8-1}$$

و تابع چگالی آن عبارت است از :

$$f_{Y_n}(y) = \mathrm{nf(y)}[1 - F(y)]^{n-1} \tag{9-1}$$

تابع توزیع تجمعی Z_n، نمونه ماکزیمم، به صورت زیر بدست می‌آید :

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(z) &= \mathrm{pr}(Z_n \le z) = \mathrm{pr}(X_i \le z \ \forall i) \\ &= \mathrm{pr}(X_1 \le z, X_2 \le z, \dots, X_n \le z) \\ &= [F(z)]^n. \end{aligned} \tag{10-1}$$

تابع چگالی متناظرش برابر است با

$$f_{Z_n}(z) = \mathrm{nf(z)}[F(z)]^{n-1} \tag{11-1}$$

تعیین تابع توزیع هر دو Y_n و Z_n ها وقتی که $n \to \infty$ است به بی نهایت می‌رود؛ بنابراین طبیعی است که بررسی کنیم تحت چه شرایطی یک توزیع مقدار حدی غیر بدیهی وجود خواهد داشت. پژوهش‌ها برای پاسخ به این سوال در سال 1920 شروع شد. اولین مقاله در سال 1922 با همکاری

---

[11] Extreme value distribution
[14] Limit distribution
[13] Sample maximum

بنیادی لادسیلاس ون بورت کایوکس[14] (1868-1931)، بر روی برد و میانگین برد در نمونه‌ها از توزیع نرمال به صورت تابعی از اندازه، نوشته شد.

2.2.1 منشاء عملی

در سال 1930 دو رهیافت در دانش مهندسی که منجر به پیدایش توزیع وایبل شد را برای ریشه علمی این توزیع می‌توان معرفی کرد. این رهیافت‌ها در میان خودشان مستقل هستند.

3.1 معانی فیزیکی و تفسیر توزیع وایبل[15]

حداقل یک مدل فیزیکی برای هر توزیع آماری وجود دارد. این مدل فیزیکی کمک می‌کند که بتوان توزیع را تفسیر، تشخیص و یا توزیع مناسبی را برای یک مجموعه داده ارائه شده به آن اختصاص داد[16].

اولین مدل فیزیکی که در پیدایش توزیع وایبل نقش داشت، دارای قدمت بسیار بالایی می باشد. تعیین یک مجموعه مرکب از n واحد یا آیتم یکسان مربوط به دنباله ها. فرض کنید یک مجموعه فیزیکی متشکل از nواحد برابر وجود دارد. سیستم تا زمانی که همه n واحد فعال باشند به کار خود ادامه خواهد داد و با خرابی یکی از واحدها از کار می افتد.

فرض کنید $(i = 1, \dots, n), X_i$ یک طول عمر تصادفی از واحدهای پیوند یافته مرتب باشد و فرض کنید X_i ها دارای توزیع مستقل و یکسان با تابع توزیع تجمعی F(x) باشند. Y_n نشان دهنده طول عمر مجموعه دنباله‌هایی است که به صورت زیر نشان داده شده است.

$$Y_n = \min_{1 \le i \le n}\{X_i\} \qquad (12\text{-}1)$$

تابع توزیع تجمعی Y_n به صورت زیر است

$$F_{Y_n}(y) = \mathrm{pr}(Y_n \le y) = 1 - [1 - F(y)]^{n-1} \qquad (13\text{-}1)$$

---

[14] زندگینامه و فهرست کتابهای این شخص را در سایت اینترنتی http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/. می توان یافت.

[15] مطالب بیشتردر اپتین (1960) و لیموفید ونکور (1985) و مالک (1975) و استافر (1979)

[16] در گذشته پژوهش هایی وجود داشتند که امکان وجود مفهوم فیزیکی یا تفسیر را برای توزیع وایبل انکار می کردند مانند گرسکی (1968).

به طور کلی، به دلیل وجود توان‌های 1-F(y) در فرمول (1-13) کار با آن کمی مشکل است. در این صورت می‌توان از تکنیک کرامر[17] (1971، ص 371) استفاده کرد و به ازای n های بزرگ از آن صرف‌نظر کرد، متغیر تصادفی U_n به صورت زیر تعریف می‌شود

$$U_n = nF(Y_n) \tag{14-1}$$

به ازای هر u معین در فاصله [0,n]داریم :

$$pr(U_n \le u) = pr[nF(Y_n) \le u] = \mathrm{pr}[Y_n \le F^{-1}(\tfrac{u}{n})] \tag{15-1}$$

حال با یک جابه جایی در (1-13)، تابع توزیع U_n به صورت زیر به دست می آید

$$G_n(u) = 1-(1-\tfrac{u}{n})^n \tag{16-1}$$

وقتی که $n \to \infty$، دنباله متغیرهای تصادفی U_n در توزیع به متغیر تصادفی U میل می‌کند زیرا دنباله توابع توزیع تجمعی $G_n(u)$ به ازای هر u به تابع توزیع تجمعی زیر میل می‌کند

$$G(u) = \lim_{n\to\infty} G_n(u) = 1-e^{-u}, u \ge 0 \tag{17-1}$$

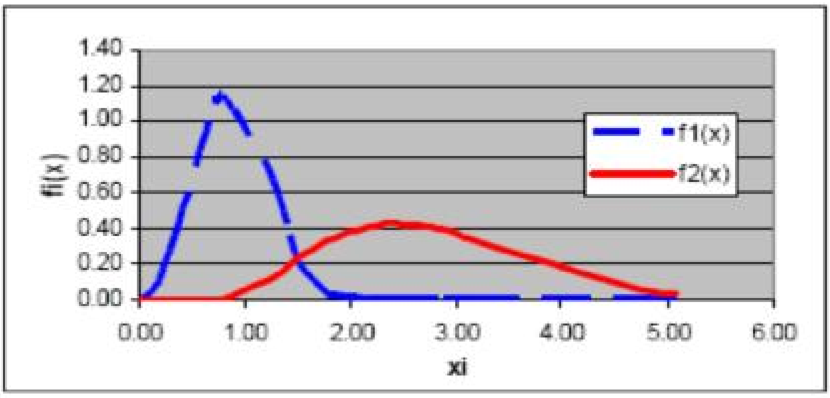
با تابع چگالی متناظرش

$$g(u) = \lim_{n\to\infty} g_n(u) = e^{-u}, u \ge 0 \tag{18-1}$$

از (1-14)معلوم است که دنباله متغیرهای تصادفی Y_n در توزیع به متغیر تصادفی Y میل می کند وقتی که

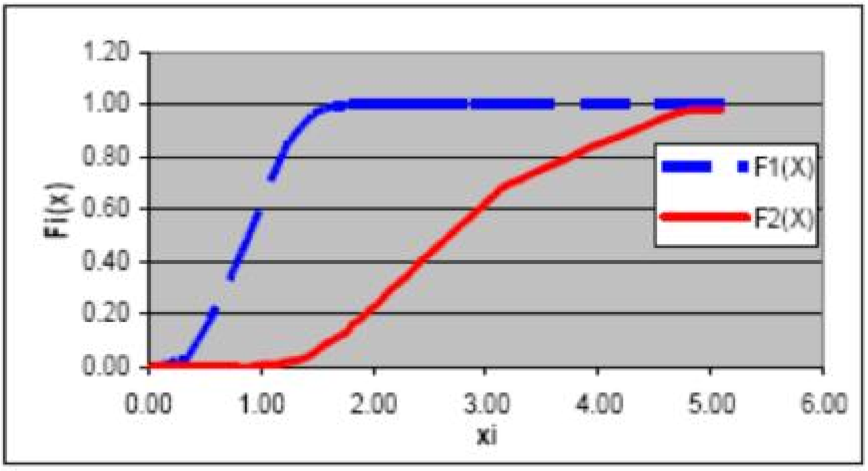
$$Y = F^{-1}(\tfrac{U}{n}) \tag{19-1}$$

بنابراین اگر $F^{-1}(.)$ را محاسبه کنیم، آنگاه می‌توانیم توزیع U را تعیین کنیم.



نمودار (1 -1) : تابع چگالی احتمال برای دو توزیع وایبل با
$\beta_1 = 1, \beta_2 = 2, \alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2$

[17] Cramer technique



نمودار (1-2) : تابع توزیع تجمعی برای دو توزیع وایبل

با $\beta_1 = 1, \beta_2 = 2, \alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2$

با مراجعه به نمودار (1- 2) مشاهده می‌شود که تابع توزیع تجمعی اکیدا صعودی است و مقدار ماکسیمم آن 1 و مینیمم آن 0 است.

4.1 تعریف و ویژگی‌های توزیع وایبل

1.4.1 توصیف توابع طول عمر به صورت یک متغیر تصادفی

در آنالیز بقا به مدت زمانی که طول می‌کشد تا قطعه‌ای دچار شکست شود طول عمر[18] قطعه می‌گوییم و آن را با یک متغیر تصادفی پیوسته مثبت نشان می‌دهیم. البته فرض مثبت بودن در حالت کلی لازم نیست.

به طور کلی تعیین زمانی که یک واحد طبیعی زنده است و یا اینکه یک واحد فنی در حال کار یا دایر است، از قبل تعیین شده یا ثابت و ماندنی نیست، ولی به عنوان یک متغیر تصادفی X به نام متغیر طول عمر به آن پرداخته شده است. به طور کلی این متغیر پیوسته و نامنفی است. این توزیع‌ها کامل و خاص هستند.

در این رابطه، چندین تابع وجود دارند که وضعیت متغیر تصادفی را به طور کامل تشریح می‌کنند. در زمینه طول عمر، شش تابع ریاضی هم ارز وجود دارند :

- چگالی شکست
- توزیع شکست
- تابع قابلیت اعتماد

---

[18] Lifetime

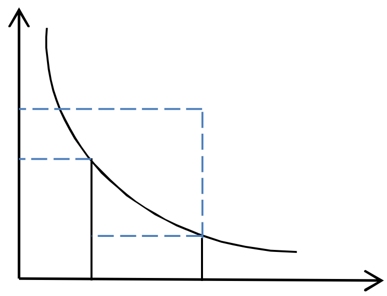
- تابع نرخ مخاطره
- تابع نرخ مخاطره تجمعی و
- تابع میانگین عمر باقی مانده

1- تابع چگالی f(x) که در روابط زیر

$$f(x) \geq 0 \; \forall x \;, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \qquad (20\text{-}1)$$

صدق می کند و تابع چگالی شکست[19] نامیده می‌شود که احتمال از کار افتادگی یا مردن یک واحد در سن X را نشان می‌دهد. احتمال غیر شرطی فرد تازه متولد شده یا محصول تولید شده را برای مردن یا شکست حول سن x را به ازای Δx کوچک داریم

$$pr(x - \tfrac{\Delta x}{2} < X < x + \Delta x/2) \approx f(x)\Delta x \qquad (21\text{-}1)$$



$$p\left(x - \tfrac{\Delta x}{2} < X < x + \tfrac{\Delta x}{2}\right) = \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} f(x)dx \cong f(x)\Delta x \qquad (22\text{-}1)$$

به طوری که

$$\text{طول} = f(x)$$

$$\text{عرض} = (x + {}^{\Delta x}/_{2}) - (x - {}^{\Delta x}/_{2}) = \Delta x$$

احتمال غیر شرطی[20] برای رسیدن به سن خاص بین زمان‌های x_u و x_ℓ که $x_\ell < x_u$ به صورت زیر است

$$pr(x_\ell < X < x_u) = \int_{x_\ell}^{x_u} f(t)dt \qquad (23\text{-}1)$$

معمولا تابع چگالی شکست چوله به راست است.

2. تابع توزیع تجمعی (CDF) توزیع زندگی[21] یا توزیع شکست[22] نیز نامیده می‌شود :

---

[19] Failure density

[20] Unconditional probability

$$F(x) = pr(X \leq x) = \int_0^x f(z)dz \qquad (24\text{-}1)$$

$F(x)$احتمال خرابی تا حد زمان x یا داشتن عمر معین تا حد x را نشان می‌دهد. $F(x)$ تابعی اکیدا صعودی از x است که

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \,, \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1 \qquad (25\text{-}1)$$

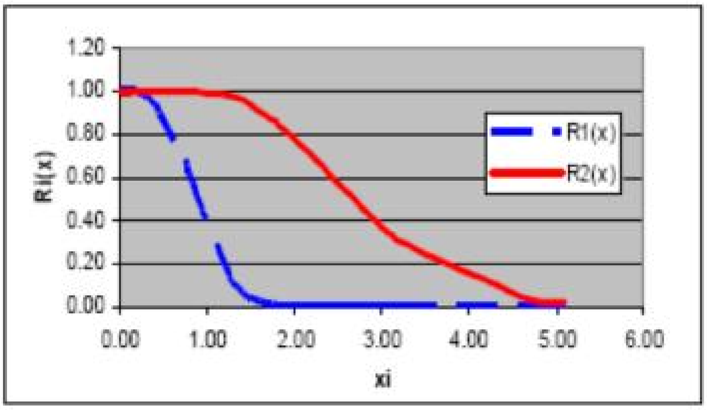
3. متمم تابع توزیع تجمعی (CCDF) تابع بقا یا تابع قابلیت اطمینان[23] نام دارد :

$$R(x) = pr(X > x) = \int_x^\infty f(z)dz \qquad (26\text{-}1)$$

$R(x)$ احتمال بقا تا سن x را نشان می‌دهد. $R(x)$ تابعی نزولی از

$$\lim_{x\to-\infty} R(x) = 1 \,, \lim_{x\to+\infty} R(x) = 0 \qquad (27\text{-}1)$$

است.



نمودار (1-3) : تابع قابلیت اطمینان برای دو توزیع وایبل با

$\beta_1 = 1, \beta_2 = 2, \alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2$

از نمودار (1- 3) می‌توان به نزولی بودن تابع قابلیت اطمینان پی برد.

4. تابع نرخ مخاطره یا نرخ شکست آنی[24] (همچنین تابع نرخ یا تابع شدت[25]) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{pr(x<X\leq x+\Delta X|X>x)}{\Delta x} = \frac{f(x)}{R(x)} \qquad (28\text{-}1)$$

و در روابط زیر صدق می کند.

$$h(x) \geq 0 \quad \forall x \quad , \quad \int_0^\infty h(x)dx = \infty \qquad (29\text{-}1)$$

[21] Life distribution
[22] Failure distribution
[23] Reliability function
[24] Instantaneous failure rate
[25] Intensity function