بسم الله الرحمن الرحیم

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد
رشته‌ی ریاضی کاربردی

موضوع:

چندجمله‌ایهای برنشتاین وکاربرد آنها در حل برخی ازمعادلات انتگرالی منفرد و مسایل با مقدار مرزی

استاد راهنما:

دکترمرتضی گچ پزان

استاد مشاور:

دکتراصغر کرایه چیان

دانشجو:

موسی تقی پور

سال ۱۳۸۹

پیش‌گفتار

معادلات دیفرانسیل پدیده های موجود در جهان فیزیکی ما را تاکنون به خوبی توصیف کرده‌اند و لیکن در اغلب موارد لزوم معادلات انتگرالی احساس می‌شود. به عبارت دیگر بعضی مواقع ایجاب می‌کند که به جای یک معادلهٔ دیفرانسیل از یک معادلهٔ انتگرالی استفاده کنیم. معادلات انتگرالی در مقایسه با معادلات دیفرانسیل معمولی دارای مبدأ جدیدتری می‌باشند به نحوی که بیشترین گسترش آن در قرن حاضر بوده است. شرایط مرزی در معادلات دیفرانسیل مطلبی است که نمی‌توان آنها را نادیده گرفت . معادلهٔ انتگرالی تابع مجهول را نه تنها به مقدار آن تابع در نقاط مجاور (مشتق‌ها) بلکه به مقدارش در تمامی ناحیه، از جمله مرز مرتبط می‌کند. در واقع شرایط مرزی به جای آن که در مرحلهٔ آخر حل معادله اعمال شوند، درضمن حل معادلهٔ انتگرالی منظور می‌شوند.

از این رو معادلات انتگرالی می‌توانند نسبت به معادلات دیفرانسیل مناسب‌تر و کارآمدتر باشند. نام معادلهٔ انتگرال اولین بار در سال ۱۸۸۸ توسط بویس ریماند[۱] بر روی معادلاتی که تابع مجهول به صورت انتگرال ظاهر می‌شوند، نهاده شد[۲۶].

لیوویل[۲] در حل برخی از معادلات دیفرانسیل به کمک معادلهٔ انتگرالی فعالیت زیادی داشته است[۲۶]. وی در سال ۱۸۳۷ بحثی را در پیرامون رابطه معادلهٔ دیفرانسیل و معادلهٔ انتگرالی مطرح نمود و نشان داد که جواب خصوصی یک مساله مقدار اولیه به وسیلهٔ یک معادلهٔ انتگرالی

[۱] B. Reymond

[۲] J. Liouville

داده می‌شود و موجب روش حلی به صورت جانشینی متوالی می‌شود.

در سال ۱۸۹۶ ولترا[۳] با وارد کردن متغیر x به عنوان حد بالایی نوعی از انتگرال‌ها، یک ردهٔ مهمی از معادلات انتگرالی را ایجاد نمود که به نام خود وی نامگذاری شده است. لذا ولترا برای اولین بار نظریهٔ عمومی معادلهٔ انتگرالی را مطرح نمود. صورت کلی معادلهٔ ولترا چنین است

$$h(x)\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,s)\phi(s)ds$$

رده دیگری از معادلات انتگرالی به صورت زیر

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,s)\phi(s)ds$$

می‌باشد که در حدود سال‌های ۱۹۰۰ تا ۱۹۰۳ و پس از آن توسط فردهولم[۴] مورد بحث و بررسی قرار گرفت.

معادلهٔ ولترا حالت خاصی از این معادله است که در آن $k(x,s) = 0$ برای $s > x$.

غالباً راه‌حل بعضی از مسائل ریاضی نظیر مسئله وجود و یکتایی و پایداری جواب معادلات دیفرانسیل به صورت انتگرالی آسان‌تر می‌باشد و از ظرافت بیشتری برخوردار است. به مسائلی نظیر پدیده‌های پخش[۵] و ترابرد[۶] برمی‌خوریم که نمی‌توان آن‌ها را با معادلات دیفرانسیل مدل بندی کرد ، لذا برای مدل بندی وحل این نوع مسائل باید به حل معادلات انتگرالی آن‌ها بپردازیم. معادلات انتگرالی در علومی چون فیزیک، مکانیک، آمار و احتمال، مهندسی‌و...و مسایلی همچون ارتباطات ، ساختمان، پل‌سازی، اشعهٔ لیزر، بیولوژی، کنترل، ODE، PDE و $\cdots$ کاربرد دارد. روش‌های کلاسیک و عددی بسیاری برای حل معادلات انتگرالی ارائه شده است. ازمیان فعالیتهای زیادی که در این زمینه صورت گرفته، می‌توان به کارهای فیلیپس [۷] و تیخانوف [۸] اشاره کرد. در ایران

[۳] V. Volterra
[۴] I. Fredholm
[۵] Diffusion
[۶] Advection
[۷] Philips
[۸] Tikhonov

نیز چندین پژوهشگر ازجمله دهقان[۹][۲۵] ، مالک نژاد[۱۰][۱۵] ، بابلیان [۱۱][۱] ، صابری نجفی [۱۲][۲۰] ودیگران در زمینه معادلات انتگرالی فعالیت زیادی داشته‌اند.

در این پایان‌نامه قصد داریم یک روش تحلیلی عددی برای حل برخی از معادلات انتگرالی و معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم بامقدار مرزی ارائه دهیم که در آن‌ها از چندجمله‌ای‌های برنشتاین برای جواب تقریبی این معادلات استفاده خواهد شد .

---

[۹] Dehghan

[۱۰] Maleknejad

[۱۱] Babolian

[۱۲] Saberi Najafi

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمات، تعاریف، پیش‌نیازها

در این فصل تعاریف، قضیه‌ها ومفاهیمی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز می‌باشد را می آوریم .

۱.۱ تقسیم‌بندی معادلات انتگرالی خطی

متداول‌ترین دسته‌بندی معادلات انتگرالی عبارتنداز

معادلات انتگرالی فردهولم،

معادلات انتگرالی ولترا،

معادلات انتگرال—دیفرانسیل،

معادلات انتگرالی منفرد،

اکنون تعاریف و خواص عمدهٔ هر یک را بررسی می‌کنیم.

۱.۱.۱ معادلات انتگرالی خطی فردهولم

شکل استاندارد معادلات انتگرالی خطی فردهولم که در آن‌ها حد پایین و حد بالای انتگرال به ترتیب اعداد ثابت a و b هستند، به صورت زیر است

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\phi(t)dt \qquad a \leq x, t \leq b \tag{۱}$$

که در آن هستهٔ $k(x,t)$ و $f(x)$ توابعی معلوم و λ پارامتر معلوم و$\phi(x)$ تابع مجهول است. برحسب این که برای $u(x)$ مقادیر صفر و یا یک انتخاب شود، معادلهٔ انتگرالی خطی فردهولم به دو دسته زیر تقسیم می‌شود.

الف) اگر $u(x) = \circ$، معادلهٔ(۱) به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود.

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\phi(t)dt = \circ \tag{۲}$$

این معادلهٔ انتگرالی را فردهولم نوع اوّل گویند. مثال‌هایی از این گونه معادلات انتگرالی، تبدیل‌های انتگرالی لاپلاس[۱]، فوریه[۲] ، هنکل[۳] ، ملین[۴] و غیره می‌باشند.

ب) اگر $u(x) = 1$، معادلهٔ(۱) به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود.

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\phi(t)dt \quad (۳)$$

که به آن معادلهٔ انتگرالی فردهولم نوع دوّم گویند.

۲.۱.۱ معادلات انتگرالی خطی ولترا

شکل استاندارد معادلات انتگرالی خطی ولترا مانند معادلات فردهولم است. با این تفاوت که در آن‌ها حد بالا یا پایین به جای این که اعداد ثابت باشند، به صورت تابعی از x ظاهر می‌شوند و معمولاً آن را به صورت زیر در نظر می‌گیرند.

$$u(x)\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\phi(t)dt \quad (۴)$$

باید توجه داشت که معادلات انتگرالی ولترا را می‌توان یک حالت خاص معادلات انتگرالی فردهولم در نظر گرفت، به طوری که هستهٔ $k(x,t)$ برای $t > x$ و $x \in [a,b]$ صفر فرض می‌شود.

معادلات انتگرالی ولترا را نیز می‌توان با توجه به مقدار $u(x)$ به دو گروه دسته‌بندی کرد.

الف) اگر $u(x) = 0$، معادلهٔ(۴) به صورت زیر تبدیل می‌شود که معادلهٔ انتگرالی ولترای نوع اول نامیده می‌شود.

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\phi(t)dt = 0 \quad (۵)$$

[۱] Laplace
[۲] Fourier
[۳] Henkel
[۴] Mellin

به عنوان مثال معادلهٔ انتگرالی زیر یک معادلهٔ انتگرالی ولترای نوع اول است و به معادلهٔ آبل شهرت دارد.

$$f(x) = \int_{0}^{x} \frac{\phi(t)}{\sqrt{x-t}} dt \qquad (۶)$$

ب) اگر $u(x) = 1$، معادلهٔ(۴) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} k(x,t)\phi(t) dt \qquad (۷)$$

که معادلهٔ انتگرالی ولترای نوع دوم نامیده می‌شود.

تبصره ۱.۱ : معادلهٔ انتگرالی همگن

اگر در معادلهٔ انتگرالی فردهولم نوع دوم و معادلهٔ انتگرالی ولترای نوع دوم $f(x) \equiv 0$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ انتگرالی حاصل را همگن گویند، در غیر این صورت معادله را غیرهمگن گویند.

تبدیلات انتگرالی لاپلاس، فوریه و غیره خود نمونه‌هایی از معادلات انتگرالی همگن هستند.

۳.۱.۱ معادلات دیفرانسیل — انتگرالی

ولترا در سال ۱۹۹۰ در حین مطالعهٔ موضوع رشد جمعیت با معادلات انتگرال—دیفرانسیل مواجه شد. در این گونه معادلات تابع مجهول $\phi(x)$ در دو طرف معادله ظاهر می‌شود به قسمی که ، در یک طرف زیر علامت انتگرال و در طرف دیگر به عنوان مشتقات $\phi(x)$ نمایان می‌شود. البته ممکن است مشتقات $\phi(x)$ نیز زیر علامت انتگرال ظاهر شوند. معادلهٔ زیر یک نمونه از معادلهٔ انتگرال—دیفرانسیل می‌باشد.

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + 2\frac{d\phi}{dx} + \phi(x) = \cos x - 2\int_{0}^{x} \cos(x-t)\frac{d^2\phi}{dt^2} dt - 2\int_{0}^{x} \sin(x-t)\frac{d\phi}{dt} dt \qquad (۸)$$

۴.۱.۱ معادلات انتگرالی منفرد

معادلات انتگرالی فردهولم و یا ولترا اعم از نوع اول یا نوع دوم که در آن‌ها حد پایین و یا حد بالا و یا هر دو حد نامتناهی باشند به آن معادله، معادلهٔ انتگرالی منفرد می‌گویند.

به علاوه اگر هستهٔ معادلات انتگرالی در یک یا چند نقطه از دامنهٔ انتگرال‌گیری نامتناهی باشد ویا اگر یکی از مشتقات هسته انتگرالی در نقطه‌ای درون حوزه انتگرال‌گیری ناپیوسته شود، باز هم به آن‌ها معادلات انتگرالی منفرد گویند.

یکی از مثال‌های معروف در معادلات انتگرالی منفرد، مسأله آبل است که عبارت است از محاسبه تابع $\phi(x)$ در صورتی که اگر گلوله‌ای به جرم m را روی سیم خمیده‌ای به شکل $\phi(x)$ رها می‌کنیم و زمان رسیدن گلوله به پایین تحت تأثیر نیروی جاذبه نیز مشخص باشد که به صورت معادلهٔ زیر است

$$f(x) = \int_{\circ}^{x} \frac{\phi(t)}{\sqrt{x-t}} dt \qquad (۹)$$

که هسته در نقطهٔ $x = t$ نامتناهی است.

۲.۱ روابط بین معادلات انتگرالی و معادلات دیفرانسیل

یکی از روش‌های حل معادلات انتگرالی، تبدیل آن‌ها به معادلهٔ دیفرانسیل (با مقدار اولیه یا مقدار مرزی) می‌باشد که با حل این معادلهٔ دیفرانسیل و به دست آوردن جواب آن، جواب معادلهٔ انتگرالی به دست می‌آید که به ذکر آن‌ها می‌پردازیم.

۱.۲.۱ تبدیل معادلهٔ انتگرالی ولترا به مسألهٔ مقدار اولیه

در این بخش فنی که یک معادله انتگرالی ولترا را به یک مسألهٔ مقدار اولیهٔ متناظرش تبدیل می‌کند ارائه می‌کنیم .

این کار به سادگی و با مشتق‌گیری از دو طرف معادلهٔ انتگرالی که با استفاده از قاعدهٔ لایب‌نیتز انجام می‌شود، صورت می‌گیرد.

البته به هر تعداد که لازم باشد باید از مشتق‌گیری استفاده نمود تا به مرحله‌ای برسیم که انتگرال حذف شود و معادله به یک معادلهٔ دیفرانسیل تبدیل گردد. به عنوان مثال معادلهٔ انتگرالی زیر را به یک مسألهٔ مقدار اولیه تبدیل می‌کنیم.

$$\phi(x) = x - \cos x + \int_0^x (x-t)\phi(t)dt \tag{10}$$

با دو بار مشتق‌گیری از طرفین معادلهٔ فوق داریم:

$$\phi'(x) = 1 + \sin x + \int_0^x \phi(t)dt$$
$$\phi''(x) = \cos x + \phi(x)$$
$$\phi''(x) - \phi(x) = \cos x$$

شرایط اولیه را می‌توان به سادگی و با جایگذاری $x = 0$ در $\phi(x)$ و $\phi'(x)$ به دست آورد و در نتیجه داریم:

$$\phi''(x) - \phi(x) = \cos x$$
$$\phi(0) = -1, \phi'(0) = 1$$

۲.۲.۱ تبدیل مسألهٔ مقدار اولیه به معادلات انتگرالی ولترا

برعکس قسمت قبل، برای تبدیل یک مسألهٔ مقدار اولیه مرتبهٔ n به یک معادلهٔ انتگرالی ولترا از طرفین رابطهٔ $y^{(n)}(x) = \phi(x)$ در بازهٔ $(0, x)$، n بار انتگرال گرفته و شرایط اولیهٔ مسأله را به کار می‌بریم. در هنگام انتگرال‌گیری از سمت راست رابطهٔ بالا که n بار تکرار شده است می‌توان با استفاده از رابطهٔ زیر آن را به یک انتگرال تبدیل نمود.

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \tag{11}$$

۳.۱ چندجمله‌ای‌های برنشتاین

چندجمله‌ای‌ها ابزار بسیار مفیدی برای حل مسایل ریاضی هستند زیرا به آسانی تعریف می‌شوند، در دستگاه‌های کامپیوتری به سرعت محاسبه می‌شوند، انواع مختلفی از توابع را تقریب می زنند. به آسانی مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری روی آن‌ها انجام می‌شود و هم‌چنین می‌توانند به راحتی به هم متصل شوند تا منحنی‌های اسپلاینی را تشکیل دهند که در تقریب توابع با دقت دلخواه به کار می روند.

در حالت کلی یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ کمتر یا مساوی n را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

که یک چندجمله‌ای را به صورت ترکیب خطی از چندجمله‌ای‌های مقدماتی $\{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ نمایش می‌دهند.

- چندجمله‌ای های از درجهٔ کوچک‌تر یا مساوی n تشکیل یک فضای برداری می‌دهند[۱۱].
  چندجمله‌ای‌ها می‌توانند به هم اضافه شوند، در یک اسکالر ضرب شوند و همهٔ خواص برداری برقرار هستند.
- مجموعهٔ توابع $\{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ تشکیل یک پایه برای این فضای برداری می‌دهد یعنی هر چندجمله‌ای از درجهٔ کمتر یا مساوی n به صورت منحصر به فرد برحسب ترکیب خطی ازاین توابع نوشته می‌شوند.

این پایه که معمولاً پایهٔ توانی نامیده می‌شود فقط یکی از تعداد نامتناهی پایه برای فضای چندجمله‌ای‌هاست. دراین‌جا، روی پایهٔ متداول دیگری و خواص آن که برای فضای چندجمله‌ای‌ها به کار می‌رود بحث می‌کنیم، یعنی پایه برنشتاین[۵].

[۵] Bernstien basis

چندجمله‌ایهای برنشتاین:

چندجمله‌ای‌های برنشتاین از درجهٔ n روی بازه $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.[۲]

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} \frac{(t-a)^i(b-t)^{n-i}}{(b-a)^n}, \quad i = ۰, ۱, \cdots, n,$$

که در آن

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!},$$

توجه کنید که $(n+۱)$ چندجمله‌ای‌های برنشتاین از درجهٔ n ام وجود دارند.

معمولاً به ازای $i < ۰$ و $i > n$ قرارداد می‌کنیم که $B_{i,n} = ۰$

این چندجمله‌ای‌ها به سادگی نمایش داده می شوند. ضریب $\binom{n}{i}$ رانیز می‌توانیم از مثلث پاسکال به دست آوریم. درشکل‌های ۱ تا ۳ نمودار چندجمله ایهای برنشتاین از مرتبه ۱ تا ۳ در بازه $[۰,۱]$ رارسم کرده‌ایم .

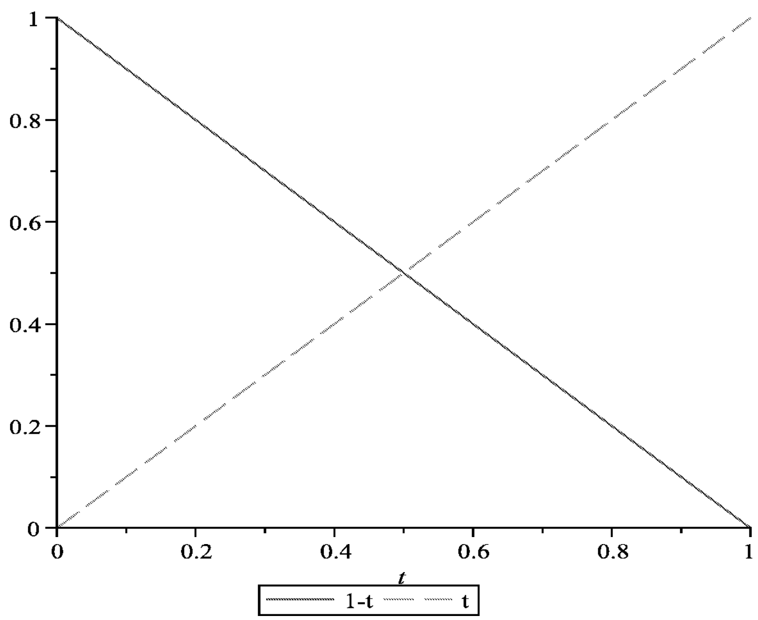
برای سادگی خواص چندجمله‌ایهای برنشتاین را روی بازه $[۰,۱]$ بررسی می‌کنیم.

۴.۱ تعریف بازگشتی چندجمله‌ای‌های برنشتاین

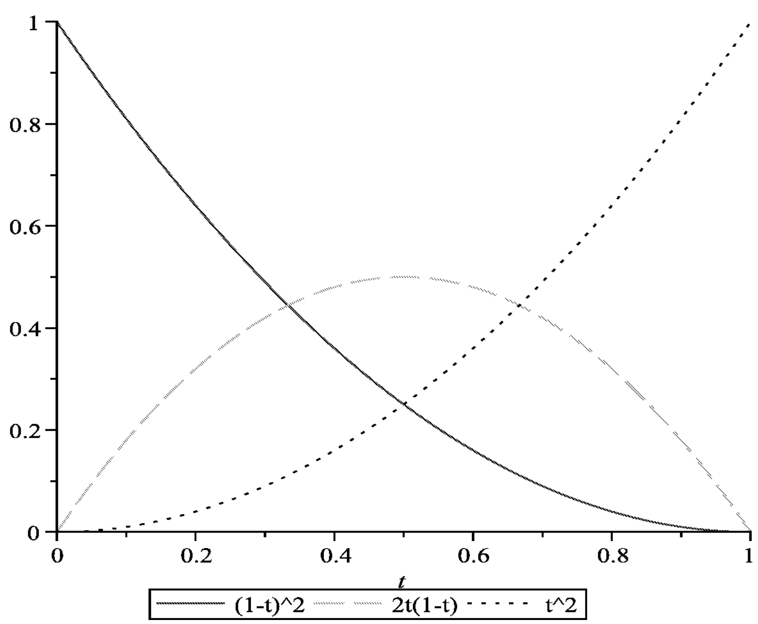
چندجمله‌ای‌های برنشتاین از درجهٔ n را می‌توان با ترکیب دو چندجمله‌ای برنشتاین از درجهٔ $(n-۱)$ به صورت زیر به دست آورد.

$$B_{k,n}(t) = (۱-t)B_{k,n-۱}(t) + tB_{k-۱,n-۱}(t), \qquad t \in [۰,۱] \qquad (۱۲)$$

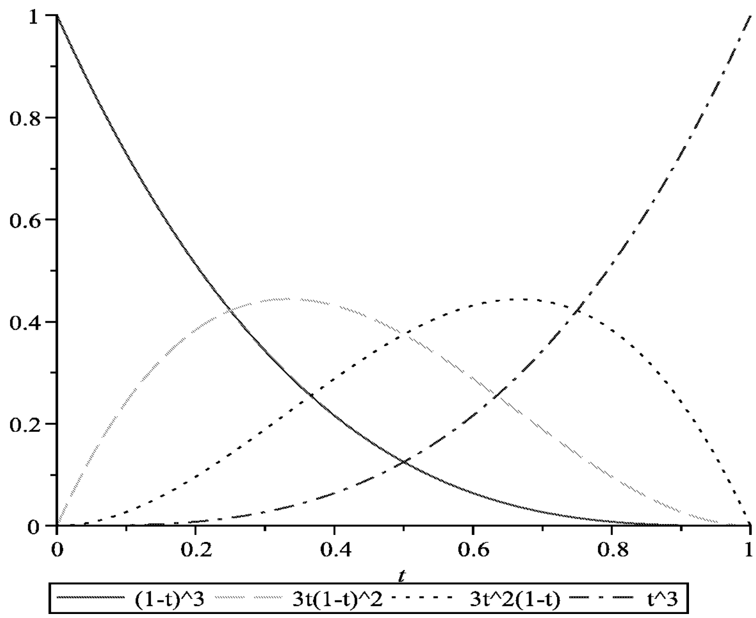
به عبارت دیگر چندجمله‌ای $B_{k,n}(t)$ ترکیب محدب دو چندجمله‌ای $B_{k,n-۱}(t)$ و $B_{k-۱,n-۱}(t)$ است .



شکل ۱ : نمودارچندجمله ایهای برنشتاین از مرتبه ۱



شکل ۲ : نمودار چندجمله ایهای برنشتاین از مرتبه ۲



شکل ۳ : نمودار چندجمله ایهای برنشتاین از مرتبه ۳

برای نشان دادن رابطه (۱۲) با استفاده از تعریف چندجمله‌ای‌های برنشتاین در محاسبات جبری روی بازه $[۰, ۱]$ داریم

$$
\begin{aligned}
(۱-t)B_{k,n-۱}(t)+tB_{k-۱,n-۱}(t) &= (۱-t)\binom{n-۱}{k}t^k(۱-t)^{n-۱-k}+ \\
t\binom{n-۱}{k-۱}t^{k-۱}(۱-t)^{n-۱-(k-۱)} &= \left[\binom{n-۱}{k}+\binom{n-۱}{k-۱}\right]t^k(۱-t)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k}t^k(۱-t)^{n-k}=B_{k,n}(t)
\end{aligned}
$$

قضیه ۱.۱ : هریک از چندجمله‌ای‌های برنشتاین درجهٔ n روی بازهٔ $[۰, ۱]$ نامنفی هستند.

اثبات. برای اثبات این مطلب، می‌توان از استقرای ریاضی و رابطهٔ بازگشتی (۱۲) استفاده نمود. به سادگی دیده می‌شود که $B_{۰,۱}(t)=۱-t$ و $B_{۱,۱}(t)=t$ هردو در بازهٔ $t\in[۰, ۱]$ نامنفی

هستند.

اگر فرض کنیم که همهٔ چندجمله‌ای‌های برنشتاین از درجهٔ کمتر از k نامنفی هستند، آن‌گاه با استفاده از تعریف بازگشتی چندجمله‌ای‌های برنشتاین می‌توانیم بنویسیم

$$B_{i,k}(t) = (1-t)B_{i,k-1}(t) + tB_{i-1,k-1}(t)$$

با توجه به اینکه $t \in [0,1]$ ، واضح است که $B_{i,k}(t)$ نامنفی است . □

هم چنین به راحتی می‌توان نشان داد که هر کدام از چندجمله‌ای‌های برنشتاین وقتی $0 < t < 1$ است مثبت هستند.

تعریف ۱.۱: یک مجموعه از توابع $f_i(t)$ افراز واحد[6] تشکیل می‌دهند اگر مجموع آن‌ها به ازای همه مقادیر t، یک شود.

قضیه ۲.۱: $(k+1)$ چندجمله‌ای‌های برنشتاین درجهٔ k تشکیل افراز واحد می‌دهند

اثبات. برای نشان دادن این مطلب بهتر است اول رابطهٔ زیر را بررسی کنیم: به ازای هر k، مجموع $(k+1)$ چندجمله‌ای برنشتاین از درجهٔ k مساوی با مجموع k چندجمله‌ای برنشتاین از درجهٔ $(k-1)$ است یعنی

$$\sum_{i=0}^{k} B_{i,k}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t)$$

این رابطه با استفاده از تعریف بازگشتی و خواص سیگماقابل اثبات است:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k} B_{i,k}(t) &= \sum_{i=0}^{k}[(1-t)B_{i,k-1}(t) + tB_{i-1,k-1}(t)] \\
&= (1-t)\left[\sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t) + B_{k,k-1}(t)\right] + t\left[\sum_{i=1}^{k} B_{i-1,k-1}(t) + B_{-1,k-1}(t)\right] \\
&= (1-t)\sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t) + t\sum_{i=1}^{k} B_{i-1,k-1}(t)
\end{aligned}$$

---

[6] Partition of Unity

$$= (1-t)\sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t) + t\sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t)$$

(با این فرض که $B_{k,k-1}(t) = B_{-1,k-1}(t) = 0$)

پس داریم

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(t) = \cdots = \sum_{i=0}^{1} B_{i,1}(t) = (1-t)+t = 1$$

□

افراز واحد یک خاصیت بسیار مهم است به ویژه وقتی که چندجمله‌ای‌های برنشتاین در مدل‌سازی هندسی و گرافیک کامپیوتر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

ترفیع درجه[۷] :

هر یک از چندجمله‌ای‌های برنشتاین درجهٔ پایین (درجهٔ کمتر از n) را می‌توان به صورت ترکیب خطی از چندجمله‌ای‌های برنشتاین درجهٔ n نوشت.

در حالت خاص هر چندجمله‌ای برنشتاین از درجهٔ $(n-1)$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از چندجمله‌ای‌های برنشتاین درجهٔ n نوشت.

ابتدا داریم؛

$$\begin{aligned} tB_{i,n}(t) &= \binom{n}{i} t^{i+1}(1-t)^{n-i} \\ &= \binom{n}{i} t^{i+1}(1-t)^{(n+1)-(i+1)} \\ &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i+1}} B_{i+1,n+1}(t) \\ &= \frac{i+1}{n+1} B_{i+1,n+1}(t) \end{aligned}$$

و

$$(1-t)B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^{i}(1-t)^{n+1-i}$$

[۷] Degree Raising