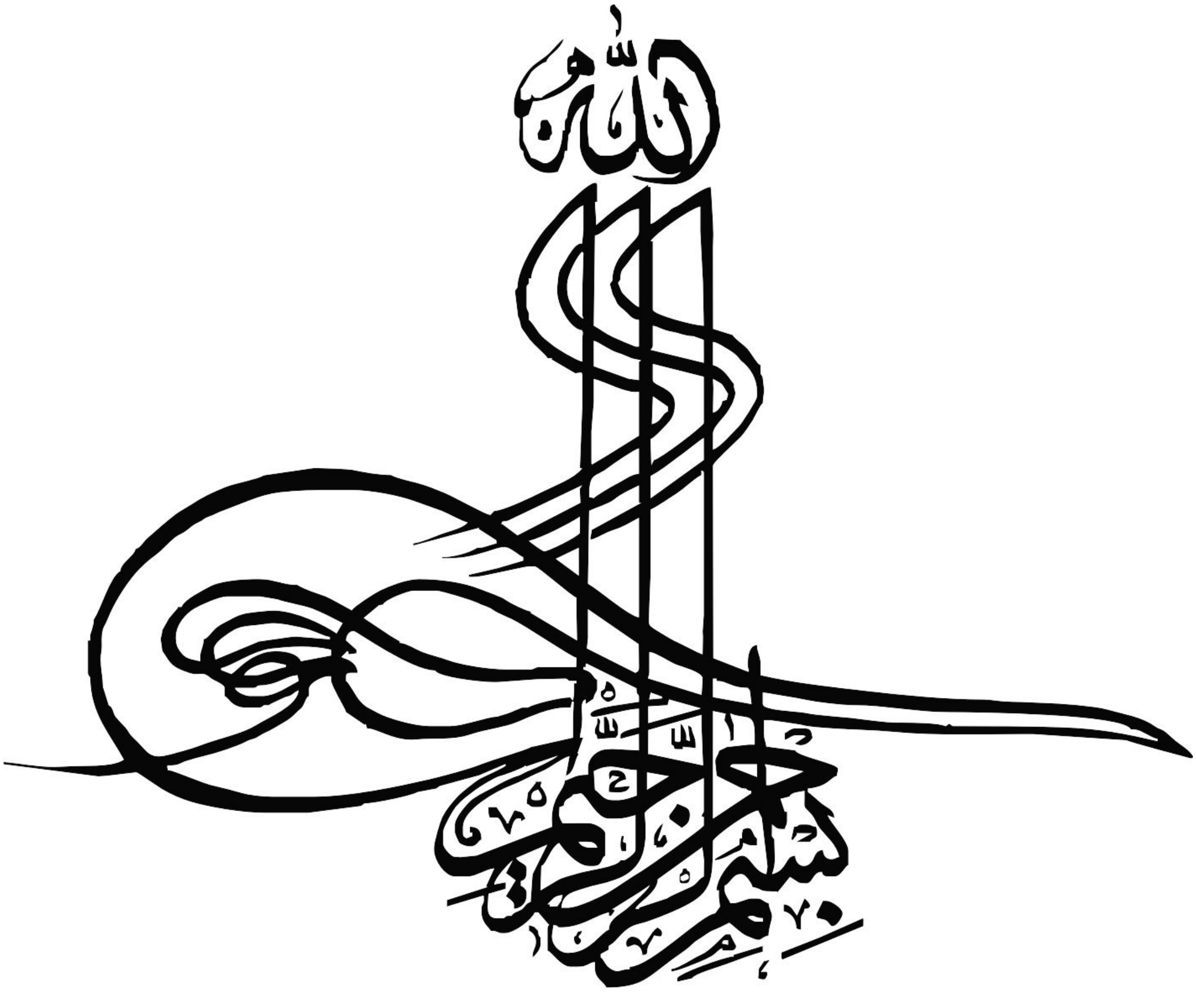
بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

همسر و فرزندم

که تمام اوقاتی که برای این کار صرف شد، از آن آنها بود.

تقدیر و تشکر

سپاس خدای را که باری دیگر به من توفیق کسب علم عطا فرمود و اجازه داد تا با قلم، که به قداستش سوگند خورده بنویسم.

بر خود لازم می دانم که از زحمات پدر و مادرم که مرا اینگونه آموختند که همواره علاقمند به کسب علم باشم و از زحمات همسرم که در فراز و نشیب این راه همواره همراهم بودند و از صبر و شکیبایی فرزندم در این کار، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

از استاد راهنمای گرامی ام، جناب آقای دکتر علی اصغر ورسه ای به پاس تمام راهنمایی ها و زحماتشان و جناب آقای دکتر صمیمی به خاطر سعه ی صدر و راهنمایی های بی دریغشان بی نهایت سپاس گزارم و از خداوند سلامتی و بهروزی ایشان را خواستارم.

فهرست مطالب

چکیده

قانون‌های ضعیف اعداد بزرگ برای مجموعهای وزن‌دار
متغیرهای تصادفی وابسته
کبری شافعی لشکریان

در این پایان‌نامه تحت برخی شرایط انتگرال‌گیری یکنواخت و تخصیص بعضی شرطها، قضیه‌های همگرایی میانگینی و قانون‌های ضعیف اعداد بزرگ برای مجموعهای وزن‌دار از متغیرهای تصادفی وابسته حاصل می‌شود.

کلید واژه
همگرایی میانگینی، قانون‌های ضعیف اعداد بزرگ، انتگرال‌گیری یکنواخت، وابسته‌ربع‌منفی، وابسته‌ربع‌منفی‌خطی.

Abstract

Weak lows of large numbers for weighted sums

of dependent random variables.

Cobra shafeie Lashkariyan.

In this dissertation, Under some conditions of uniform integrability and appropriate conditions, mean convergence theorems and weak laws of large numbers for weighted sums of random variables are obtained.

Key words

Mean convergence, Weak laws of large numbers, Uniform integrability, Negative quadrant dependent, Linearly negative quadrant dependent.

پیشگفتار

قانون قوی اعداد بزرگ یکی از مفاهیم مهم در نظریه احتمال است. صورت‌های گوناگونی از آن تاکنون بیان و مورد بررسی قرار گرفته است. ساده‌ترین حالت آن برای متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع است. حالت خاصی از این قانون برای متغیرهای برنولی برای اولین بارتوسط «ژاکوب برنولی»[۱] اثبات شد. او این قضیه را قضیه طلایی نامید، ولی بعدها به نام قانون اعداد بزرگ مشهور شد. در سال ۱۸۳۵ « پواسن» [۲]این قانون را به نام قانون اعداد بزرگ توضیح داد. هم اکنون این قضیه با هر دو نام ذکر شده شناخته می‌شود. بعد از برنولی و پواسن، ریاضی‌دانان دیگری مانند مارکوف[۳] ، چبیشف[۴]، بورل[۵] و کلموگروف[۶] برای بهبود این تعریف و اثبات آن تلاش کردند. در نهایت الکساندر خنچین[۷] برای هر متغیر تصادفی دلخواه آن را ثابت کرد.

این تلاش‌ها منجر به پیدایش دو حالت مختلف این قانون شد. این دو حالت عبارتند از قانون ضعیف و قوی.

قانون ضعیف و قانون قوی اعداد بزرگ دو قانون متفاوت نیستند. بلکه این دو قانون از دو دیدگاه متفاوت موضوع همگرایی احتمال میانگین نمونه به میانگین جامعه را وقتی تعداد دفعات آزمایش زیاد است، توضیح می‌دهند. همچنین قانون ضعیف از قانون قوی نتیجه می‌شود.

این پایان‌نامه در چهار فصل تنظیم شده است. فصل اول به برخی از مفاهیم و قضایای آنالیز حقیقی اختصاص یافته است. در فصل دوم به بعضی از مفاهیم نظریه احتمال اشاره شده است. در فصل سوم برخی تعاریف و لم‌های مقدماتی مربوط به پایان‌نامه را می‌آوریم و بالاخره در فصل چهارم، نتایج اصلی مورد نظر بیان و اثبات می شود.

---

[۱] Bernolli Jacob
[۲] Poisson
[۳] Marcov
[۴] Chebishev
[۵] Borel
[۶] Kolmogorov
[۷] Khenchen Alexandre

فصل ۱

آنالیز حقیقی

در این فصل به‌طورخلاصه به مفاهیم اندازه، تابع‌های اندازه‌پذیر، انتگرال توابع غیر منفی و قضیه رادون-نیکودیم [۱] و انواع همگرایی‌ها می‌پردازیم. بیشتر مطالب این فصل بر گرفته از [۷] است.

۱ - ۱ اندازه

تعریف ۱ - ۱ - ۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای نا تهی و $\mathcal{C}$ دسته‌ای نا تهی از زیر مجموعه‌های آن باشد.

- $\mathcal{C}$ را یک نیم‌حلقه از زیر مجموعه‌های X گوییم چنانچه $\mathcal{C}$ تحت اشتراک های متناهی بسته باشد و تفاضل هر دو عضو $\mathcal{C}$ برابر اجتماعی متناهی از اعضای دوبدو مجزای $\mathcal{C}$ باشد.
- $\mathcal{C}$ را یک حلقه گوییم هرگاه تحت اجتماع متناهی و تفاضل بسته باشد.
- $\mathcal{C}$ را یک نیم‌میدان گوییم هرگاه تحت اشتراک متناهی بسته باشد و مکمل هر عضو $\mathcal{C}$ برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دوبدو مجزای $\mathcal{C}$ باشد.
- $\mathcal{C}$ را یک میدان گوییم هرگاه تحت اجتماع متناهی و مکمل بسته باشد.
- $\mathcal{C}$ را یک σ-حلقه گوییم اگر تحت اجتماع شمارش‌پذیر و تفاضل بسته باشد.
- $\mathcal{C}$ را σ-جبر گوییم اگر تحت اجتماع شمارش‌پذیر و مکمل بسته باشد.

تعریف ۱ - ۱ - ۲. کوچکترین σ-جبر محتوی بازه‌ها در $\mathbb{R}$ و محتوی جعبه‌ها در $\mathbb{R}^n$، σ-جبر بورل نامیده می‌شود. که در $\mathbb{R}$ با $\mathcal{B}$ و در $\mathbb{R}^n$ با $\mathcal{B}_n$ نشان داده می‌شود.

ملاحظه ۱ - ۱ - ۳. **در حالت کلی در یک فضای توپولوژیکی دلخواه σ- جبرتولید شده توسط مجموعه‌های باز σ- جبر بورل نام دارد.**

تعریف ۱ - ۱ - ۴. فرض کنیم $\mathcal{C}$ دسته‌ای ناتهی از مجموعه‌ها باشد یک اندازه روی $\mathcal{C}$ تابعی مانند μ با دامنه‌ی $\mathcal{C}$ و مقدارهای حقیقی تعمیم یافته است به‌طوری‌که μ نامنفی بوده و σ-جمع‌پذیر است یعنی اگر A_n، $n \geq ۱$ دنباله‌ای از اعضای جدا از هم $\mathcal{C}$ باشد به‌طوری‌که $\bigcup_{n\geq ۱} A_n \in \mathcal{C}$ آنگاه

$$\mu(\bigcup_{n\geq ۱} A_n) = \sum_{n\geq ۱} \mu(A_n).$$

---

[۱] Radon-Nikodym Theorem

مثال ۱-۱-۵. فرض کنیم $\mathcal{X}$ یک مجموعه دلخواه و ناتهی باشد برای هر زیر مجموعه‌ی A، $\mu(A)$ را به صورت ذیل تعریف کنیم

$$\mu(A) = A \textbf{ تعداد اعضای}.$$

μ را اندازه شمارنده روی $\mathcal{X}$ نامند.

تعریف ۱-۱-۶. فرض کنیم $\mathcal{X}$ یک مجموعه و $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ یک σ-جبر باشد، زوج $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ یک فضای اندازه‌پذیر نامیده می‌شود. اگر μ یک اندازه روی $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ باشد، آنگاه $(\mathcal{X}, \mathbf{C}, \mu)$ یک فضای اندازه نام دارد.

تعریف ۱-۱-۷. ۱. اگر $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد و $\mu(\mathcal{X}) \gneqq \infty$، μ اندازه متناهی نامیده می‌شود.

۲. اگر $\mathcal{X} = \bigcup_{۱}^{\infty} E_j$ به‌طوری‌که برای هر j، $E_j \in \mathcal{C}$ و $\mu(E_j) \gneqq \infty$، μ اندازه σ-متناهی نام دارد.

۳. اگر برای هر $E \in \mathcal{C}$ با شرط $\mu(E) = \infty$، عضو $F \in \mathcal{C}$ با شرایط $F \subset E$ و $\circ \gneqq \mu(F) \gneqq \infty$ وجود داشته باشد، μ اندازه نیمه‌متناهی نام دارد.

۱-۱-۱ اندازه خارجی

تعریف ۱-۱-۸. فرض کنیم $\mathcal{X}$ مجموعه‌ای ناتهی، $\mathcal{H}$ نیم‌حلقه‌ای از زیرمجموعه‌های $\mathcal{X}$ باشد به‌طوری‌که تعداد شمارش‌پذیری از اعضای $\mathcal{H}$، $\mathcal{X}$ را بپوشاند و μ یک اندازه روی $\mathcal{H}$ باشد، برای زیرمجموعه دلخواه $A \subseteq \mathcal{X}$، اندازه خارجی A را بر حسب داده‌های بالا، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \Sigma_{n \geq ۱} \mu(I_n) : \quad I_n \in \mathcal{H}, \quad n \geq ۱, \quad A \subseteq \bigcup_{n \geq ۱} I_n \right\}.$$

ملاحظه ۱-۱-۹. **اندازه خارجی لزوما یک اندازه نیست.**

مثال ۱-۱-۱۰. فرض کنیم $\mathcal{X}$ مجموعه‌ای شمارش‌پذیر باشد و $\mathcal{H} = \{\mathcal{X}, \phi\}$ ، $\circ \gneqq \mu(\mathcal{X}) = \alpha \gneqq \infty$

$A \subseteq \mathcal{X}$ ، $B \subseteq \mathcal{X}$، $A \neq \varnothing$ ، $B \neq \varnothing$ و $\mu(\varnothing) = \circ$. همچنین فرض کنیم A و B اشتراکی نداشته باشند. در این صورت

$$\mu^*(A) = \alpha \quad , \quad \mu^*(B) = \alpha \quad , \quad \mu^*(A) = \alpha.$$

پس

$$\mu^*(A \cup B) \neq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

***ملاحظه ۱-۱-۱۱.* اندازه خارجی دو ویژگی مهم دارد**

۱. **تابعی است که دامنه‌ی آن مجموعه توانی $\mathcal{X}$ و مقادیر آن $[\circ, \infty[$ است.**

۲. **اگر A_n دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های دوبدو جدا از هم $\mathcal{X}$ باشد آنگاه $\mu^*(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n) \leqslant \Sigma\mu^*(A_n)$.**

۱-۲ تابع‌های اندازه‌پذیر

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنیم $(X, \mathcal{A})$ و $(Y, \mathcal{B})$، فضاهای اندازه‌پذیر باشند و $f : X \longrightarrow Y$. f نسبت به σ-جبرهای $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ اندازه‌پذیر است، اگر تصویر عکس هر عضوی از $\mathcal{B}$، عضوی از $\mathcal{A}$ باشد.

تذکر

در تعریف بالا اگر $Y = \mathbb{R}$، $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$، f را تابع بورل یا بورل اندازه‌پذیر گویند.

تعریف ۱-۲-۲. فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی، $\mathcal{H}$ نیم‌حلقه‌ای از زیرمجموعه‌های X و

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [\circ, \infty],$$

یک اندازه‌ی خارجی باشد و همچنین فرض کنیم $A \subset X$. A یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر نامیده می‌شود در صورتی که برای هر $B \subseteq X$ داشته باشیم

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c).$$

تعریف ۱-۲-۳. σ -جبری که

از مجموعه‌های اندازه‌پذیر در R^1 پدید می‌آید σ-جبر لبگ [1] می‌نامند و با M_1 نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱-۲-۴. فرض کنیم (X, A) و (Y, M_1) فضاهای اندازه‌پذیر باشند تابع اندازه‌پذیر $f : X \to Y$ را تابع لبگ یا لبگ-اندازه‌پذیر گویند.

[1] Lebesgue

مثال ۱-۲-۵. اگر $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشند، هر تابع ثابت از $\mathcal{X}$ به $\mathcal{X}$، تابع همانی از $\mathcal{X}$ به $\mathcal{X}$ مثالهایی ساده از توابع اندازه‌پذیرند.

ملاحظه ۱-۲-۶. **فرض کنیم $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ مجموعه‌های ناتهی باشند و $f : X \longrightarrow Y$ تابعی اندازه‌پذیر باشد. اگر $\mathcal{B}$ یک σ-جبر از زیرمجموعه‌های $\mathbf{Y}$ باشد، آنگاه $\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ یک σ-جبر از زیر مجموعه‌های $\mathbf{X}$ است.**

زیرا

$$f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c,$$

$$f^{-1}(\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} f^{-1}(B),$$

در نتیجه اثبات کامل است.

ملاحظه ۱-۲-۷. **اگر X و Y دو فضای متری (یا توپولوژی) باشند، هر نگاشت پیوسته‌ی $f : X \to Y$ بورل-اندازه‌پذیر می‌باشد.**

به [۷] مراجعه شود.

قضیه ۱-۲-۸. **اگر $(X,\mathcal{C})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $f : X \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد، شرایط زیر هم‌ارز هستند**

۱ **برای هر** $a \in \mathbb{R}$، $f^{-1}((a,\infty)) \in \mathcal{C}$.

۲ **برای هر** $a \in \mathbb{R}$، $f^{-1}([a,\infty)) \in \mathcal{C}$.

۳ **برای هر** $a \in \mathbb{R}$، $f^{-1}((-\infty,a)) \in \mathcal{C}$.

۴ **برای هر** $a \in \mathbb{R}$، $f^{-1}((-\infty,a]) \in \mathcal{C}$.

برهان. [۷]. □

قضیه ۱-۲-۹. **اگر $f,g : X \to \mathcal{C}$ اندازه‌پذیر باشند، آنگاه $f+g$ و $f.g$ نیز اندازه‌پذیراند.**

برهان. [۷]. □

ملاحظه ۱-۲-۱۰. **اگر $\{f_i\}$ یک دنباله از تابعهای اندازه‌پذیر $\overline{\mathbb{R}}$ (اعداد حقیقی توسه‌یافته) مقداری روی $(X, \mathcal{C})$ باشند، آنگاه برای هر n تابع‌های زیر**

$$g_n(x) = sup_{j \geq n} f_j(x) \quad , \quad g = lim_{j \to \infty} sup f_j(x),$$

$$h_n = inf_{j \geq n} f_j(x) \quad , \quad h = lim_{j \to \infty} inf f_j(x).$$

تابع‌های اندازه‌پذیرند. اگر برای هر $x \in X, \quad f(x) = lim_{j \to \infty} f_j(x)$ موجود باشد، آنگاه f یک تابع اندازه‌پذیر است.

برای اطلاعات بیشتر رجوع شود به [۷].

قضیه ۱-۲-۱۱. **اگر f و g توابع اندازه‌پذیر باشند، آنگاه $\max\{f, g\}$ و $\min\{f, g\}$ نیز تابع‌هایی اندازه‌پذیرند.**

برهان. [۷]. □

قضیه ۱-۲-۱۲. **اگر $\{f_j\}_1^\infty$ یک دنباله از توابع اندازه‌پذیر مختلط مقدار باشند و $f(x) = lim_{j \to \infty} f_j(x)$، برای هر x موجود باشد آنگاه f نیز اندازه‌پذیر است.**

برهان. [۷]. □

تعریف ۱-۲-۱۳. اگر $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد، قسمت‌های مثبت و منفی f به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad , \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

و

$$f = f^+ - f^-.$$

ملاحظه ۱-۲-۱۴. **اگر f اندازه‌پذیر باشد، f^+, f^- نیز اندازه‌پذیر است.**

برهان. با توجه به ۱-۲-۱۱ واضح است. □

تعریف ۱-۲-۱۵. فرض کنیم $(X, \mathbb{C})$ یک فضای اندازه‌پذیر است. اگر $E \subset X$، تابع χ_E که به صورت ذیل تعریف می‌شود را تابع مشخصه‌ی E می‌نامند، گاهی نیز با 1_E نشان داده می‌شود.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \text{ اگر} \\ 0 & x \in E^c \text{ اگر} \end{cases}.$$

تعریف ۱-۲-۱۶. تابع $f : X \to \mathbb{C}$ را تابع ساده گوییم اگر f اندازه‌پذیر باشد و حوزه مقادیر آن یک زیرمجموعه‌ی متناهی از $\mathbb{C}$ باشد. در واقع اگر حوزه‌ی مقادیر f به صورت $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ باشد، نمایش استاندارد f به صورت $f = \sum_1^n z_j \chi_{Ej}$ است.

***قضیه ۱-۲-۱۷.* فرض کنیم $(X, \mathcal{C})$ یک فضای اندازه باشد.**

- **اگر $f : X \to [0, \infty]$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه دنباله‌ی ϕ_n از توابع ساده وجود دارد به‌طوری‌که**

$$0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq ... \leq f,$$

و f حد نقطه‌ای ϕ_n است و روی هر مجموعه‌ای که f روی آن کراندار باشد، ϕ_nها به طور یکنواخت به f همگراست.

- **اگر $f : X \to \mathbb{C}$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه دنباله $\{\phi_n\}$ از توابع ساده وجود دارد به‌طوری‌که**

$$0 \leq \mid \phi_1 \mid \leq \mid \phi_2 \mid \leq ... \leq \mid f \mid,$$

و f حد نقطه‌ای ϕ_n است و روی هر مجموعه‌ای که f روی آن کراندار باشد، ϕ_nها به طور یکنواخت به f همگراست.

۱-۳ انتگرال‌گیری توابع غیر منفی

تعریف ۱-۳-۱.

- فضای اندازه $(X, \mathbb{C}, \mu)$ را ثابت می گیریم و L^+ را به صورت زیر تعریف می کنیم

  فضای همه‌ی توابع اندازه‌پذیر از X به $[0, \infty]$ = L^+.

- برای تابع ساده Φ در L^+ با نمایش استاندارد $\Phi = \sum_1^n a_j \chi_{Ej}$، انتگرال Φ نسبت به μ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\int \Phi = \int \Phi d\mu = \sum_1^n a_j \mu(E_j).$$

***قضیه ۱-۳-۲.* فرض کنیم Φ و Ψ دو تابع ساده در L^+ باشند،**

۱. **اگر** $c \geq 0$**، آنگاه** $\int c\Phi = c\int \Phi$.

۲. $\int(\Phi + \Psi) = \int \Phi + \int \Psi$.

۳. **اگر** $\Phi \leq \Psi$**، آنگاه** $\int \Phi \leq \int \Psi$.

۴. **تابع** $A \to \int_A \Phi d\mu$ **یک اندازه روی** $\mathbb{C}$ **است.**

برهان. [۷]. □

اکنون انتگرال را برای همه‌ی توابع $f \in L^+$ با تعریف زیر تعمیم می‌دهیم

تعریف ۱-۳-۳.

$$\int f d\mu = \sup\left\{ \int \phi d\mu \quad : 0 \leq \phi \leq f, \quad \text{ساده است } \phi \right\}.$$

قضیه ۱-۳-۴. **(قضیه همگرایی یکنوا) اگر** $\{f_n\}$ **یک دنباله در** L^+ **باشد به‌طوری‌که برای هر** j**،** $f_j \leq f_{j+1}$ **و** $f = \lim_{n\to\infty} f_n$**، آنگاه** $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

برهان. [۷]

□

قضیه همگرایی یکنوا یک ابزار اصلی در بیشتر موارد است، اما دلیل اصلی به کار بردن این قضیه در آن است که تعریف $\int f$ با گرفتن سوپریمم روی خانواده بزرگی (معمولا ناشمارا) از توابع ساده سرو کار دارد. لذا ممکن است محاسبه‌ی مستقیم $\int f$ از تعریف، مشکل باشد. قضیه همگرایی یکنوا به ما اطمینان می‌دهد که برای محاسبه $\int f$ کافی است $\lim_{n\to\infty} \int \phi_n$ را محاسبه کنیم که در آن $\{\phi_n\}$ یک دنباله دلخواه از توابع ساده است که به‌طور افزایشی به f همگراست و قضیه ۱-۲-۱۷ وجود چنین دنباله‌ای را تضمین می کند.

قضیه ۱-۳-۵. **اگر** $\{f_n\}$ **یک دنباله متناهی یا نامتناهی در** L^+ **باشد و** $f = \sum_n f_n$**، آنگاه** $\int f = \sum_n \int f_n$.

برهان. [۷] □

قضیه ۱-۳-۶. **(لم فتو[۱]) اگر** $\{f_n\}$ **یک دنباله دلخواه در** L^+ **باشد، آنگاه**

$$\int(\liminf f_n) \leq \liminf \int f_n.$$

[۱] Fatou

برهان. [۷] □

قضیه ۱-۳-۷. **فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه، f تابعی اندازه‌پذیر و نامنفی روی X باشند و $A_1, A_2, ...$ دنباله‌ای از اعضای دوبدو مجزای $\mathcal{A}$ باشد. با فرض $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ خواهیم داشت**

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu.$$

برهان. [۴] □

۱-۴ قضیه رادون نیکودیم

تعریف ۱-۴-۱. فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد، $x \in X$ را یک اتم می گوییم هرگاه $\{x\} \in \mathcal{A}$ و $\mu(\{x\}) > 0$. همچنین $\mu(\{x\})$ را اندازه اتم $\{x\}$ می‌نامیم.

تعریف ۱-۴-۲. μ را گسسته اتمی گوییم اگر تعدادی شمارش‌پذیر اتم داشته باشد و توسط مجموعه‌ی اتم‌هایش حمل شود یعنی اگر A مجموعه‌ی اتم‌های μ باشد، در این صورت داشته باشیم

$$\mu(X - A) = 0.$$

تعریف ۱-۴-۳. فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد و μ و ν دو اندازه روی $\mathcal{A}$ باشند. می گوییم ν نسبت به μ پیوسته مطلق است و می‌نویسیم $\nu \ll \mu$، اگر برای هر Aی اندازه‌پذیر که $\mu(A) = 0$ داشته باشیم $\nu(A) = 0$.

قضیه ۱-۴-۴. **(قضیه رادون-نیکودیم) کنیم $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و ν و μ اندازه‌های $\sigma-$متناهی روی $\mathcal{A}$ باشند و $\nu \ll \mu$. در این صورت تابع اندازه‌پذیر و نامنفی f_0 وجود دارد به‌طوری‌که**

$$\int_A f_0 d\mu = \nu(A), \quad \text{برای هر } \mathbf{A} \text{ در } \mathcal{A}$$

اگر g تابعی اندازه‌پذیر و نامنفی دیگری با خاصیت مذکور باشد آنگاه

$$g = f, \quad a.e.$$

برهان. [۷] □

ملاحظه ۱-۴-۵. **هر تابع مانند f_0 در قضیه‌ی بالا را یک مشتق رادون- نیکودیم ν نسبت به μ گوییم.**

۱ - ۵ انواع همگرایی

در این بخش فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{C}, \mu)$ یک فضای اندازه ، $f_1, f_2, ...$ دنباله‌ای از تابعهای حقیقی اندازه‌پذیر و f تابعی حقیقی و اندازه‌پذیر روی فضای داده شده باشند.

تعریف ۱ - ۵ - ۱ . اگر در دنباله‌ی $\{f_n, n \geq 1\}$، داشته باشیم $\mu\{x: \quad f_n \nrightarrow f\} = 0$، می‌گوییم دنباله‌ی $\{f_n\}$ تقریبا همه جا به f میل می‌کند و می‌نویسیم

$$f_n \to f, \qquad a.e.$$

تعریف ۱ - ۵ - ۲ . اگر در دنباله‌ی $\{f_n, n \geq 1\}$، داشته باشیم $\mu\{x: \quad | f_n - f | > \delta\} \to 0$، می‌گوییم دنباله $\{f_n\}$ در اندازه به f میل می‌کند.

تعریف ۱ - ۵ - ۳ . اگر k یک عدد طبیعی باشد و در دنباله‌ی $\{f_n, n \geq 1\}$، داشته باشیم

$$\int_X | f_n - f |^k \, d\mu \to 0,$$

می‌گوییم دنباله در میانگین k−ام به f میل می‌کند و این همگرایی با L^k نشان داده می‌شود.

اگر $k = 1$، به اختصار می‌گوییم $f_n \to f$ در میانگین.

قضیه ۱ - ۵ - ۴ . اگر $f_n \to f$ همگرا در L^1 باشد، آنگاه $f_n \to f$ همگرا در اندازه است.

برهان. فرض کنیم $E = \{x: \quad | f_n(x) - f(x) | \geq \varepsilon\}$ آنگاه

$$\int | f_n - f | \geq \int_E | f_n - f | \geq \varepsilon \mu(E).$$

در نتیجه

$$\mu(E) \leq \varepsilon^{-1} \int | f_n - f | \to 0.$$

□

قضیه ۱ - ۵ - ۵ . همگرایی در هر یک از میانگین‌ها همگرایی در اندازه را نتیجه می‌دهد.

برهان. برای $\delta > 0$ و برای n دلخواه داریم

$$\underbrace{\int_X | f_n - f |^k \, d\mu}_{\to 0} = \int_{\{|f_n - f| > \delta\}} | f_n - f |^k \, d\mu + \int_{\{|f_n - f| \leq \delta\}} | f_n - f |^k \, d\mu$$

$$\geq \int_{\{|f_n-f|>\delta\}} | f_n - f |^k \, d\mu \geq \int_{\{|f_n-f|>\delta\}} \delta^k d\mu$$
$$= \delta^k \mu\{| f_n - f |> \delta\} \geq \circ.$$

در نتیجه برهان کامل است. □

فصل ۲

نظریه احتمال