بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب افشین فروتنی معتهد می شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه ، حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران ، که در این پژوهش از آنها استفاده شده است ، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع ومأخذ ذکر گردیده است .این پایان نامه/رساله قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارایه نشده است .در صورت اثبات (تخلف) در هر زمان مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

نام ونام خانوادگی دانشجو

امضاء

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

دانشکده علوم پایه

خانواده هنون و انشعابات آن

نگارش :

افشین فروتنی

استاد راهنما : دکتر منیره اکبری

استاد مشاور : آقای عبد الرضا اسکویی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته **ریاضی**

مهر ۱۳۹۰

تأییدیه هیأت داوران

تقدیم به:

"آتش عشق معلمی"

که در هر که در گرفت، خوش بسوخت تا خاکستر شد

صمیمانه از زحمات و راهنمایی های

استاد گرانقدر، دکتر منیره اکبری که در این مدت

فراتر از وظیفه استادی عمل نموده و از هیچگونه کمکی دریغ نکرده اند

همچنین دیگر اساتیدی که به نحوی مرا در این راه یاری کردند،

تشکر و قدردانی می نمایم و تا پایان عمر خودم را مدیون

راهنماییهای ارزشمند آنها میدانم.

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فهرست نمودار ها	ه
فهرست شکل ها	و
چکیده	ز
مقدمه	ح
فصل اول : معرفی نگاشت هنون	
بخش ۱- ۱: مقدمه	۲
بخش ۱-۲ : وابر ریختی بودن نگاشت هنون	۲
بخش ۱-۳ : پارامتر های نگاشت	۴
فصل دوم : نقاط ثابت ، متناوب و انشعاب	
بخش۲- ۱ : نقاط ثابت و متناوب	۸
بخش ۲-۲ : نقاط جاذب ، دافع و زینی	۱۲
بخش ۲-۳ : انشعاب	۱۴
فصل سوم : اتومورفیسمهای انتقال در نگاشت هنون	
بخش ۳-۱ : مقدمه و چند لم	۱۸
بخش ۳-۲ : ساختار نعل اسبی نگاشت هنون	۲۶
فصل چهارم: آبشار دوره – دوبرابر ساز اختلال بزرگ نگاشت هنون	
بخش۴- ۱: مقدمه و تعاریف مورد نیاز	۳۶
بخش۴- ۲: قضیه آبشار دوره - دو برابر ساز	۳۸
مراجع :	۴۷

فهرست نمودار ها

	صفحه
فصل اول :	
نمودار ۱-۲-۱	۴
نمودار ۱-۲-۲	۵
فصل دوم :	
نمودار ۲-۱-۱	۱۱
فصل سوم :	
نمودار ۳-۱-۱	۱۸
نمودار ۳-۱-۲	۱۹
نمودار۳-۱-۳	۲۰
نمودار ۳-۱-۴	۲۱

فهرست شکل‌ها

	صفحه
فصل اول :	
شکل ۱-۲-۱	۳
فصل دوم :	
شکل ۲-۲-۱	۱۳
شکل ۲-۲-۲	۱۳
شکل ۲-۳-۱	۱۵
شکل ۲-۳-۲	۱۶
فصل سوم :	
شکل ۳-۱- ۱	۲۱
شکل ۳-۱-۲	۲۳
شکل ۳-۱-۳	۲۴
شکل ۳-۱-۴	۲۴
شکل ۳-۱-۵	۲۵
شکل ۳-۲-۱	۲۶
شکل ۳-۲-۲	۲۸
شکل ۳-۲-۳	۲۹
شکل ۳-۲-۴	۲۹
شکل ۳-۲-۵	۳۰
شکل ۳-۲-۶	۳۱
شکل ۳-۲-۷	۳۳

چکیده:

در این پایان نامه ابتدا نگاشت دو متغیره هنون معرفی می شود سپس رفتارهای دینامیکی این نگاشت از جمله ساختار نعل اسبی آن ، وجود نقاط ثابت و متناوب به ازای پارامترهای خاص ، نقاط جاذب دافع و زینی همچنین انشعاب دوره - دو برابر ساز و آبشارهای این خانواده مورد بررسی قرار می‌گیرد . ثابت می کنیم که برای کلاس بزرگتری از خانواده هنون ساختارآبشار مشابه با حالت غیر تعمیم یافته است. علاوه بر این می توانیم دوره تناوب آبشارونیزتعداد آبشارهای از هردوره تناوب را بشماریم [۶] . محاسبات عددی و تجربی صورت گرفته توسط هنون[1]، کاری[2] و فیت[3]حاکی از آن است که این نگاشت دارای رباینده غریب[4] است . در این جا نشان داده می شود به ازای پارامتر به اندازه کافی کوچک A همه نقاط صفحه ، تحت تکرار های نگاشت هنون ، سرانجام به سمت بی نهایت حر کت خواهند کرد . ازطرف دیگر وقتی A به اندازه کافی بزرگ باشد مجموعه ناسرگردان نگاشت با خود ریختی ۲- انتقال روی دنباله های با دو نماد ، مزدوج توپولوژیک است.

کلمات کلیدی : نگاشت هنون ، انشعاب ، دوره- دوبرابر ساز ، آبشار ، مجموعه نعل اسبی .

[1] - Henon
[2] - Curry
[3] - Feit
[4] - Strange attractor

مقدمه

بررسی رفتارهای دینامیکی نگاشتها ، از مهمترین اهداف این شاخه از ریاضـیات ، یعنی سیستمهای دینامیکی است که با توجه به کاربردهای روز افزون آن ، مورد توجه ریاضیـــدانان متخصص در این رشته قرار گرفته است . یکی از نگاشتــهای دو متغیره ، نگاشت هنون اســت که بسیار مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است و همانند نگاشت یک متغیره لوجستیکی ، به ازای پارامتر های مختلف، اکثر مباحث رفتارهای دینامیکی را دارا است . این نگاشـــت توسط ستاره شناس فرانسوی پروفسور هنون (برنده جایزه نوبل، به خاطر کشف رباینـــده غریب کهکشان) ابداع شده است که او بیشتر به صورت عددی نشان داد اکثر پدیده ها و دینامیکهای شناخته شده درسیستمها ، در این نگاشت، رخ میدهند . نگاشت هنون یک سیستم دومتغیره غیر خطی است و برای تحلیل سیـــستمهای غیرخطی آشنایی با یک سری مفاهیم اولیه مانند: نقاط ثابت[1] و انشعابها[2] و ... لازم است . این نگاشت یکی از انواع سیستم های دینامیکی با دو پارامتر است که به ازای پارامــترهای خاص آشوبناک است . در فصل ۱ تا حدودی این نگاشت معرفی شده و ثابت شده که وابریختی[3] اســـت ، در فصل دوم به کمک ماتریس ژاکوبین ثابت شده یک نقطه جاذب ، دافع و یا زینی است ، همـــچنین، نشان داده شده که به ازای پارامترهای خاصی ، انشـعاب مماسی و دوره – دوبرابر ساز وجـود دارد ، در فصل سـوم ثابت می شود که به ازای پارامترهای خاصی ، مجموعه نقاط ناسرگردان با مجموعه نعل اسبی مزدوج توپولوژیک است و بالاخره در فصل چهارم ، وجود آبشارهای دوره – دوبرابر ساز ونیز تعداد آنها به کمک قضیه ای مـــورد بررسی قرار گرفته است . در این پایان نامه از مراجع اصلی *[۱]* ، *[۵]* ، *[۶]* و *[۱۲]* استفاده شده است .

---

[1] - *fixed points*
[2] - *bifurcations*
[3] - *diffeomorphism*

فصل اول : معرفی نگاشت هنون

۱-۱ مقدمه

تابعی که از یک مجموعه ، به خودش تعریف می شود را « نگاشت » روی آن مجموعه نامیم .
نگاشت هنون یک تابع دو متغیره روی صفحه $\mathbb{R}^۲$ است که ضابطه آن با در نظر گرفتن دو پارامتر a و b به صورت زیر است :

$$H_{a,b}(x,y) = (a - x^۲ + by\ , x)$$

در فصل ۴ تعمیمی از این نگاشت را خواهیم دید که طبق قضیه ای ثابت می شود آبشار برای این تعمیم ، مشابه آبشار خانواده هنون است . در اینجا همان طور که دیده می شود مولفه اول تابعی غیر خطی بر حسب x و y اولیه و مولفه دوم همان x اولیه است ؛ بنابر این ضابطه نگاشت ، ضابطه ای نسبتاً ساده است . با این وجود مانند نگاشت لوجستیکی، بسیاری از ویژگیهای سیستم های دینامیکی پیچیده در آن دیده می شود . در بسیاری از کتب که در رابطه با سیستم های دینامیکی دو بعدی بحث شده است از نگاشت هنون به عنوان یک مثال مهم و کارآمد استفاده شده است .

۱-۲ وابرریختی بودن نگاشت هنون

نشان می دهیم با فرض $b \neq ۰$ نگاشت H یک وابرریختی است .

۱. **H یک به یک است** :

فرض کنیم:

$$H(x_۱, y_۱) = H(x_۲, y_۲)$$

پس :

$$(a - x_۱^۲ + by_۱, x_۱) = (a - x_۲^۲ + by_۲, x_۲)$$

بنابراین :

$$\begin{cases} x_۱ = x_۲ \\ a - x_۱^۲ + by_۱ = a - x_۲^۲ + by_۲ \end{cases}$$

در نتیجه :

$$\begin{cases} x_۱ = x_۲ \\ by_۱ = by_۲ \end{cases} \Rightarrow \ (x_۱, y_۱) = (x_۲, y_۲)$$

۲. **H پوشا است :**

اگر $(x_۱, y_۱) \in \mathbb{R}^۲$ دلخواه باشد ، قرار می دهیم :

$$\begin{cases} x = y_۱ \\ y = \frac{x_۱ - a + y_۱^۲}{b} \end{cases}$$

از آنجا داریم:

$$\begin{cases} x = y_۱ \\ by = x_۱ - a + y_۱^۲ \end{cases}$$

بنا بر این برای پوشا بودن کافی است قرار دهیم :

$$\begin{cases} y_۱ = x \\ x_۱ = a - x^۲ + by \end{cases}$$

۳. H یک نگاشت C^∞ است :

با توجه به $H_{a,b}(x,y) = (a - x^۲ + by\ , x)$ دیده می شود که مؤلفه ها C^∞ پس H یک نگاشت C^∞ است .

۴. $H^{-۱}$ نیز با فرض $b \neq ۰$ ، C^∞ است:

زیرا :

$$H^{-۱}(x,y) = (\ y\ ,\ \frac{a-x-y^۲}{b})$$

که مؤلفه ها C^∞ هستند .

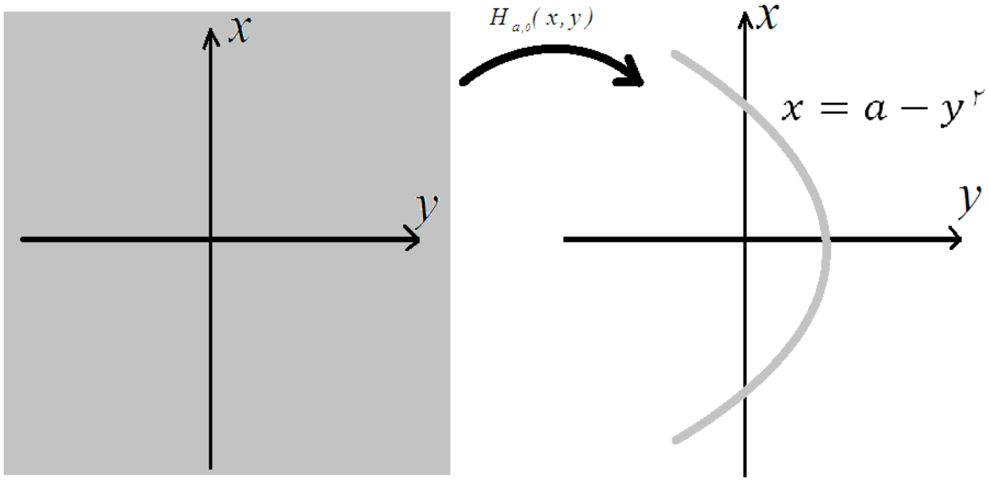
پس ثابت شد که H با فرض $b \neq ۰$ یک وابر ریختی است .

حال با فرض اینکه b=۰ باشد نگاشت H به صورت $H_{a,۰}(x,y) = (a - x^۲\ , x)$ در می آید که این ضابطه کل صفحه را به سهمی p به صورت $x = a - y^۲$ می نگارد. شکل (۱-۲-۱).

اثبات :

برد = $\{(x_۱, y_۱) | x_۱ = a - x^۲\ , y_۱ = x\ \} = \{(x_۱, y_۱) | x_۱ = a - y_۱^۲\ \} =$

= ($x = a - y^۲$ نمودار سهمی)



شکل۱-۲-۱: تأثیر نگاشت $H_{a,۰}(x,y) = (a - x^۲\ , x)$ بر $\mathbb{R}^۲$

حال نشان می دهیم تحدید این H به p با $g(y) = a - y^{۲}$ مزدوج توپولوژیک است . داریم :

$$H_{a,\cdot}\big|_p (a - y^{۲}\,, y) \to (a - (a - y^{۲})^{۲}\,, a - y^{۲})$$

برای اثبات، نگاشت تصویر را روی محور yها به صورت زیر در نظر می گیریم :

$$p_{۲}(x\,, \mathrm{y}) = \mathrm{y}$$

حال باید ثابت کنیم نمودار زیر (۱-۲-۱) جابجایی بوده و تابع $p_{۲}$ همسانریختی[1] است :

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r, "H_{a,0}"] \arrow[d, "p_2"'] & p \arrow[d, "p_2"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "g(y)=a-y^2"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

نمودار ۱-۲-۱

از یک طرف:

$$(a - y^{۲}\,, y) \xrightarrow{H_{a,\cdot}} (a - (a - y^{۲})^{۲}\,, a - y^{۲}) \xrightarrow{p_{۲}} a - y^{۲}$$

و از طرف دیگر:

$$(a - y^{۲}\,, y) \xrightarrow{p_{۲}} \mathrm{y} \xrightarrow{\mathrm{g(y)}} a - y^{۲}$$

بنابر این نمودار (۱-۲-۱) جابـجایی است . و نیز چون مؤلفه $p_{۲}(x, y) = \mathrm{y}$ ، پیوسته ، با وارون پیوسته بوده و روی سهمی p یک به یک و پوشا است ، پس $p_{۲}$ همسانریختی است ؛ نتیجه اینکه تحدید $H_{a,\cdot}$ به سهمی p با $g(y) = a - y^{۲}$ مزدوج توپولوژیک است .

۳-۱ پارامتر های نگاشت

همچنین ثابت می شود هرگاه $۱ \geq |b| > ۰$ باشد ، A و B وجود دارن بطوریکه $|B| > ۱$ و $H_{a,b}$ با $H^{-۱}_{A,B}$ مزدوج توپولوژیک است .

[1]- *Homeomorphism*

برای اینکارهمسانریختی تزویج را به صورت $p(x,y) = (mx + ny\ , rx + sy\ )$ در نظر می گیریم که مؤلفه ها ، خطی هستند . برای مشخص کردن m ، n ، r و s ، با توجه به نمودار زیر (۱-۲-۲) ، قرار می دهیم :

$$poH_{a,b} = H_{A,B}^{-۱}op \qquad (۱\text{-}۳\text{-}۱)$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "H_{a,0}"] \arrow[d, "p(x,y)"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "p(x,y)"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "H^{-۱}_{A,B}"'] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

نمودار ۱-۲-۲

باتوجه به رابطه فوق (۱-۳-۱) داریم :

$$p(a - x^{۲} + by\ , x) = (m(a - x^{۲} + by) + nx\ , r(a - x^{۲} + by) + sx) = H_{A,B}^{-۱}(mx + ny\ , rx + sy)$$

حال به دو طرف تساوی اخیر ، $H_{A,B}(x,y) = (A - x^{۲} + By, x)$ را اثر می دهیم :

$$H_{A,B}(m(a - x^{۲} + by) + nx\ , r(a - x^{۲} + by) + sx)$$
$$= (mx + ny\ , rx + sy)$$

در نتیجه :

$$\begin{pmatrix} A - (m(a - x^{۲} + by) + nx)^{۲} + B(r(a - x^{۲} + by) + sx) \\ m(a - x^{۲} + by) + nx \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} mx + ny \\ rx + sy \end{pmatrix}$$

که این معادلات به ازای $m =۰\ ,\ s =۰\ ,\ n = r = \frac{۱}{b}$ برقرار هستند . و با این فرض داریم :

$$B = \frac{۱}{b} \quad \text{و} \quad A = \frac{a}{b^۲}$$

و در نتیجه :

$$۰ < |b| \le ۱ \;\Rightarrow\; |B| > ۱$$

پس درحالت کلی می توانیم پارامتر b را طوری انتخاب کنیم که قدر مطلق آن کمتر یا مساوی یک و بیشتر از صفر باشد . چون در صورتی که پارامتر b بزرگتر از یک باشد با یک تزویج توپولوژیک مناسب نگاشت معادل با نگاشت قبلی که پارامتر آن کمترازیک باشد،را جایگزین میکنیم . در اینجا ما معمولاً b را ثابت بین صفر و یک اختیار کرده و پارامتر a را تغییر می دهیم .

فصل دوم : نقاط ثابت و متناوب وانشعاب

۲-۱ : نقاط ثابت و متناوب

۲-۱-۱ : نقـــاط ثابت

نقاط ثابت در بررسی رفتار نگاشتها ، از اهمیت خاصی برخـوردار هستند و براساس آن می توان نحوه تحول سیستم را تا حدودی درک کرد. در تعریف نقطه ثابت نگاشت دو متغیره $F: \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ می‌توان گفت که: «هر نقطه از مجموعه $\mathbb{R}^۲$ که شرط $F(x,y) = (x,y)$ در آن صدق کند نقطه ثابت نگاشت به شمار می‌آید » .

وجود نقطه یا نقاط ثابت ، برای نگاشت هنون $H_{a,b}(x,y) = (a - x^۲ + by\,, x)$ وابسته به پارامتر های نگاشت است .

$$H_{a,b}(x,y) = (x,y)$$

بنابراین :

$$\begin{cases} a - x^۲ + by = x \\ x = y \end{cases} \Rightarrow\; a - x^۲ + by = \; x$$

پس از مرتب کردن بدست می آید :

$$x^۲ + (-b + ۱)x - a = ۰$$

که یک معادله درجه دوم است . حال در وجود جوابها بحث کنیم . داریم :

$$\Delta = (-\mathrm{b} + ۱)^۲ + ۴\mathrm{a}$$

سه حالت وجود دارد :

$$(-\mathrm{b} + ۱)^۲ + ۴\mathrm{a} > ۰ \quad \Rightarrow a > \; -\frac{(-\mathrm{b}+۱)^۲}{۴}$$
$$(-\mathrm{b} + ۱)^۲ + ۴\mathrm{a} = ۰ \quad \Rightarrow a = \; -\frac{(-\mathrm{b}+۱)^۲}{۴}$$
$$(-\mathrm{b} + ۱)^۲ + ۴\mathrm{a} < ۰ \quad \Rightarrow a < \; -\frac{(-\mathrm{b}+۱)^۲}{۴}$$

یعنی برای هر b ، پارامتر وابسته $a = a_۰(b) = -\frac{(-b+۱)^۲}{۴}$ وجود دارد که اگر $a < \; a_۰(b)$ ، H نقطه ثابت ندارد ، اگر $a = \; a_۰(b)$ ، H نقطه ثابـت منحصر به فـرد دارد و اگر $a > \; a_۰(b)$ باشد ،H دو نقطه ثابت دارد . دو نقطه ثابت را با نماد زیر در نظر می گیریم :

$$p_{\pm}(a\,,b) = p_{\pm} = (x_{\pm}\,, x_{\pm}) \quad , \quad x_+ > x_-$$

در بخش انشعاب خواهیم دید که در $a = \; a_۰(b)$ نوع خاصی انشعاب به اسم انشعاب زینی - گره ای روی می دهد .

مثال ۲-۱-۱: اگر a=۰ و b=۰/۴ اختیار شوند، نگاشت هنون به صورت

$$H(x\,,y) = (-x^۲ + ۰/۴y\,, x)$$

در خواهد آمد . در این حالت نقاط ثابت را می توان از تساوی زیر تعیین کرد :

$$(-x^۲ + ۰/۴y\, , x) = (x\, , y)$$

داریم :

$$\begin{cases} -x^۲ + ۰/۴y = x \\ x = y \end{cases}$$

واز آنجا :

$$-x^۲ + ۰/۴x = x \quad \Rightarrow \quad -x^۲ - ۰/x = ۰$$

که به دست می آید :

$$\begin{cases} x = ۰ & \Rightarrow \quad y = ۰ \\ x = -۰/۶ & \Rightarrow \quad y = -۰/۶ \end{cases}$$

بنابر این تنها نقـاط ثابت نگاشت مثال فـوق (مثال ۲-۱-۱) به ازای پارامـتر های مـذکور ، دو نقطه (۰,۰) و (۰/۶-,۰/۶-) هستند. ثابت می کنیم یکی از این نقاط جاذب و دیگری زینی است .

۲-۱-۲ : نقـــاط متناوب

تعریف :۲-۱ : در حـالت ۲ بعـدی ، مدار $\{(x_۱,y_۱),(x_۲,y_۲),\dots,(x_n,y_n)\}$ را جـاذب (دافـع) گوییم هرگاه قدر مطلق مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین $DH^n(x_۱,y_۱)$ کوچکتر (بزرگتر) از ۱ باشند. و در صورتیکه قدر مطلق یکی از دو مقدار ویژه ، بزرگتر از ۱ و قدر مطلق دیگری کوچکتر از ۱ باشد ، مدار را زینی تعریف می کنیم .

اکنون می خواهیم شرایط وجود نقاط از دوره تناوب ۲ را بر رسی کنیم. داریم :

$$HoH(x,y) = (x,y)$$

یعنی :

$$\begin{cases} x = a - (a - x^۲ + by)^۲ + bx \\ y = a - x^۲ + by \end{cases}$$

جواب معادله دوم را برحسب y بدست آورده ودر معادله اول قرار می دهیم . بدست می آید :

$$(x^۲ - a)^۲ + (۱ - b)^۳x - (۱ - b)^۲a =$$
$$= [x^۲ - (۱ - b)x - a + (۱ - b)^۲][x^۲ + (۱ - b)x - a] = ۰$$

در اینجا عامل $[x^۲ + (۱ - b)x - a]$ همان عامل بدست آمده برای نقطه ثابت است و مشخص است که نقاط ثابت ، هر دوره تناوبی را دارند . اما عامل دیگر است که شرط اصلی برای وجود نقطه یا نقاط با دوره تناوب دقیقاً ۲ را به ما می دهد. که در اینجا نیز داریم :

$$\Delta = (۱ - b)^۲ - ۴(-a + (۱ - b)^۲)$$

در اینجا نیز سه حالت برای نقطه متناوب از دوره تناوب ۲ داریم :

$$۴a > ۳(۱ - b)^۲ \quad \Longrightarrow \quad a(b) > \frac{۳(۱-b)^۲}{۴}$$

$$۴a = ۳(۱ - b)^۲ \quad \Longrightarrow \quad a(b) = \frac{۳(۱-b)^۲}{۴}$$