دانشکده‌ی علوم
گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش —آنالیز

توابع تک ارز ، $VMOA$ وفضاهای مرتبط

نگارش:

علی محمدیان

استاد راهنما:

دکتررسول آقالاری

اردیبهشت

۱۳۹۱

قدردانی و تشکر

از جناب آقای دکتررسول آقالاری بخاطر تمام زحمات و رهنمودهایشان، کمال تشکر را دارم. همچنین از تمامی اساتید گروه ریاضی سپاسگزارم.

فهرست مندرجات

چکیده

این پایان نامه به طور عمده راجع به فضای لگاریتمی بلوخ $(B_{\log})$ است که شامل آن دسته از توابع مانند fاند، که در دیسک واحد D تحلیلی بوده و در شرط $\sup\limits_{|z|<1}(1-|z|)\log\frac{1}{1-|z|}|f'(z)|<\infty$ صدق می‌کنند و فضاهای تحلیلی بزو، B^p که $1\leq p<\infty$، که همه زیر فضاهایی از فضای $VMOA$ هستند.

پیشگفتار

این پایان نامه بر اساس مقاله

Univalent Functions , VMOA and Related Spaces Petros Galan

Poulos. Daniel Girela. Rodrigo Hernandez (Mathematica Josephina, Inc.2011)

نوشته شده. در این پایان نامه کلاس خاصی از توابع تک ارز و عضویت آنها در فضای $VMOA$ و فضاهای وابسته بررسی شده و قضایای مربوط به آن بیان و ثابت شده است در سراسر این پایان نامه در باره روابط بین این فضاها مطالعه می‌کنیم و توجه خاصی به عضویت توابع تک ارز در آنها داریم. مثالهای روشنی از آن می آوریم.نشان می دهیم که :

یک تابع تک ارز کراندار در $U_{p>1}B^p$ قرار دارد اما متعلق به فضای لگاریتمی بلوخ نیست.همچنین با ارائه یک مثال نشان می دهیم که :

یک تابع تک ارز کراندار در $B_{\log}$ قرار دارد، اما در هیچ یک از فضاهای بیزو، B^p با $p < 2$ نیست.

این پایان نامه مشتمل بر ۳ فصل است که به طور مختصر قسمت‌های مختلف آن را در اینجا شرح می‌دهیم.

فصل اول شامل دو بخش است که در هر یک از این بخشها به طور جداگانه تعاریف و قضایای اساسی از آنالیز حقیقی وآنالیز مختلط مطرح می شود و به این دلیل که مباحث این فصل در دروس آنالیز حقیقی و مختلط

تدریس می‌شود، اثبات قضایای مربوطه را به مراجع مناسب ارجاع می‌دهیم.

در فصل ۲ با معرفی فضاهای مختلف از جمله فضاهای برگمن، هاردی کلاسیک H^p، بیزو، دیریکله، $BMOA$، $VMOA$، فضاهای لیپ شیتز، لگاریتمی بلوخ ($B_{\log}$) و بیان برخی خواص این فضاها تلاش کردیم تا خواننده آشنایی مقدماتی با این فضاها را داشته باشد.

در فصل سوم : قضایای اصلی بیان و ثابت شده‌اند.

فصل ۱

تعاریف و قضایایی از آنالیز حقیقی و مختلط

تعریف ۱.۰.۱ فرض کنیم X یک فضای اندازه‌ی دلخواه با اندازه‌ی مثبت μ باشد. اگر $0 < p < \infty$ و f یک تابع اندازه پذیر مختلط بر X باشد. تعریف می‌کنیم.

$$||f||_p = \{\int_X |f|^p d\mu\}^{\frac{1}{p}}$$

و $L^p(\mu)$ از تمام fهایی تشکیل شده است که $||f||_p < \infty$.

$||f||_p$ را نرم L^pی f نامیم.

قضیه ۲.۰.۱ (نامساوی هولدر[1] و مینکوفسکی[2]) فرض کنیم p و q نماهای مزدوج بوده و $1 < p < \infty$. همچنین X یک فضای اندازه با اندازه مثبت μ باشد. و نیز f, g توابعی اندازه پذیر بر X با برد در $[0, \infty]$ باشند. در این صورت داریم :

---

[1] Holder

[2] Minkowski

$$\int_X fgd\mu \leq \{\int_X f^p d\mu\}^{\frac{1}{p}}\{\int_X g^q d\mu\}^{\frac{1}{q}} \qquad (۱)$$

$$\int_X (f+g)^p d\mu\}^{\frac{1}{p}} \leq \int_X (f)^p d\mu\}^{\frac{1}{p}} + \{\int_X (g)^p d\mu\}^{\frac{1}{p}} \qquad (۲)$$

نامساوی (۱) به نامساوی هولدر و نامساوی (۲) به نامساوی مینکوفسکی معروف است اگر $p = q = ۲$ آنگاه نامساوی (۱) به نامساوی شوارتز معروف است.

برهان : به قضیه ۵.۳ از کتاب آنالیز حقیقی و مختلط رودین مراجعه شود.

تعریف ۳.۰.۱ $\sigma-$ متناهی بودن μ یعنی X اجتماع تعداد شمارش پذیر مجموعه‌ها مانند $E_n \in m$ $(n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$ است که $\mu(E_n)$ متناهی است.

قضیه ۴.۰.۱ (قضیه‌ی فوبینی) فرض کنیم (χ, φ, μ) و (Y, F, λ) دو فضای اندازه‌ی $\sigma-$ متناهی باشند. همچنین فرض کنید f تابعی $(\varphi \times F)$ اندازه پذیر و مثبت بوده که یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$\int_X d\mu(x) \int_Y |f(x,y)| d\lambda(y) < \infty$$

و یا

$$\int_Y d\lambda(y) \int_X |f(x,y)| d\mu(x) < \infty$$

در اینصورت می‌توان ترتیب انتگرال گیری را تعویض نمود یعنی :

$$\int_X d\mu(x) \int_Y |f(x,y)| d\lambda(y) = \int_Y d\lambda(y) \int_X |f(x,y)| d\mu(x) < \infty$$

برهان : به قضیه ۸.۸ از آنالیز مختلط رودین مراجعه شود.

تعریف ۵.۰.۱ فرض کنیم μ یک اندازه‌ی $\sigma-$ متناهی بر مجموعه‌ی Ω باشد. برای $۰ < p < \infty$ قرار می‌دهیم :

$$L^p(\Omega, d\mu) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}\ \text{و}\ \text{اندازه پذیر بوده}\ f\ ،\int_\Omega |f|d\mu < \infty\}$$

و نیز

$$L^\infty(\Omega, d\pi) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} :\ \text{و}\ f\ \text{اندازه پذیر بوده،}\ ||f||_\infty = \text{ess sup}\{|\text{f(x)}| : \text{x} \in \Omega\} < \infty\}$$

در این صورت L^p تحت نرم $||.||_p$ و L^∞ تحت نرم $||.||_\infty$ فضاهای باناخ هستند.

۱.۱ تعاریف و قضایایی از آنالیز مختلط

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم $\mathbb{C}$ صفحه‌ی مختلط باشد. مجموعه‌ی

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

را قرص واحد باز در $\mathbb{C}$ و مجموعه‌ی $T = \partial\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ را دایره‌ی واحد می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ اگر $a, r > 0$ یک عدد مختلط باشد،

$$\Delta(a; r) = \{z : |z - a| < r\}$$

یک قرص مستدیر باز به مرکز a و شعاع r است. $\bar{\Delta}(a; r)$ بست $\Delta(a; r)$ است و

$\Delta'(a; r) = \{z : 0 < |z - a| < r\}$ را قرص سفته به مرکز a و شعاع r در نظر می‌گیریم.

تعریف ۳.۱.۱ در این پایان نامه، اندازه مساحت روی Δ را با dA نشان می‌دهیم که نرمالیزه است یعنی مساحت Δ برابر ۱ است $(A(\Delta) = 1)$. لذا خواص زیر برقرار هستند :

$$dA(z) = \frac{1}{\pi}dxdy = \frac{r}{\pi}drd\theta$$

که $z = x + iy = re^{i\theta}$ (اندازه ناحیه لبگ در $\mathbb{C}$, $dA(z) = rdrd\theta = dxdy$ خواهد بود)

تعریف ۴.۱.۱ تابع مختلط $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ را در نقطه‌ی $z_\circ \in \Delta$ مشتق پذیر نامیم هر گاه $\lim_{z \longrightarrow z_\circ} \frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ}$ موجود باشد. این حد را با $f'(z_\circ)$ نشان می‌دهیم.

اگر $f'(z_\circ)$ به ازای هر $z_\circ \in \Delta$ موجود باشد گوئیم f هلوریخت (یا تحلیلی [۳]) در Δ است. رده تمام توابع هلوریخت (تحلیلی) در Δ را با $H(\Delta)$ نشان می‌دهیم.

تابع $\varphi : \Delta \longrightarrow \Delta$ را نگاشت موبیوس نامیم اگر تحلیلی ، یک به یک و پوشا باشد . مجموعه‌ی تمام نگاشتهای موبیوس در Δ را با $\mathrm{Aut}(\Delta)$ نشان می‌دهیم بدیهی است که $\mathrm{Aut}(\Delta)$ تحت ترکیب، یک گروه است که گروه موبیوس یا گروه خودریخت از Δ نامیم.

تعریف ۵.۱.۱ به ازای هر $a \in \Delta$ تعریف می‌کنیم :

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{۱ - \bar{a}z} \qquad\qquad (z \in \Delta).$$

ویژگیهای مهم نگاشت $\varphi_a(z)$ در گزاره زیر مطرح شده است.

گزاره ۶.۱.۱ به ازای هر $z \in \Delta, a \in \Delta$، φ_a یک نگاشت یک به یک بوده که $\partial\Delta$ را به روی $\Delta, \partial\Delta$ را به روی Δ می‌نگارد و همچنین داریم :

۱. $\varphi_a(\circ) = a$،

۲. $\varphi_a(a) = \circ$،

۳. $\varphi_{-a} o \varphi_a(z) = z$،

---

[۳] Analytic

۴. $|\varphi_a'(z)| = \frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}z|^2}$،

برهان : برای اثبات به قضیه (۴.۲۱) از آنالیز مختلط رودین مراجعه شود

تعریف ۷.۱.۱ اگر G یک زیر مجموعه‌ی باز $\mathbb{C}$ باشد.

گوییم تابع $f : G \longrightarrow R$ همساز[۴] است هر گاه f دارای مشتق‌های جزئی دوم پیوسته باشد و معادله لاپلاس

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

برقرار باشد.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم G ناحیه‌ای در صفحه باشد. تابع گرین همراه با تکین لگاریتمی در $a \in G$ را بوسیله‌ی $g(z,a) = \log \frac{1}{|\varphi_a(z)|}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۹.۱.۱ تابع $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ (G یک ناحیه در $\mathbb{C}$) را نگاشت همدیس گوئیم هر گاه اندازه و جهت زاویه را حفظ نماید.

قضیه ۱۰.۱.۱ (مقدار میانگین) اگر $U : G \longrightarrow R$ تابعی همساز و $\bar{\Delta}(a;r)$ قرص بسته‌ای واقع در G باشد، آن گاه داریم :

$$U(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta$$

تعریف ۱۱.۱.۱ به هر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ عددی مانند $R \in [0,\infty]$ چنان نظیر است که سری به ازای هر $r < R$ در $\bar{\Delta}(a;r)$ به طور مطلق و به طور یکنواخت همگراست و برای $z \notin \bar{\Delta}(a;r)$ واگرا

[۴] Harmonic

می‌باشد. شعاع همگرایی R از آزمون ریشه به دست می آید :

$$\frac{۱}{R} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sup |c_n|^{\frac{۱}{n}}$$

گوئیم تابع f تعریف شده در مجموعه‌ی باز Ω به وسیله سری توانی در Ω قابل نمایش است اگر به ازای هر قرص $\Delta(a;r) \subseteq \Omega$ سری به شکل بالا نظیر شده باشد که به ازای هر $z \in \Delta(a;r)$ همگرا به $f(z)$ باشد.

قضیه ۱۲.۱.۱ هر گاه

$$f(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad (z \in \Delta(a;R))$$

و $۰ < r < R$، آن گاه

$$\sum_{n=۰}^{\infty} |c_n|^۲ r^{۲n} = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a+re^{i\theta})|^۲ d\theta$$

رابطه‌ی اخیر حالات خاصی از فرمول پارسوال [5] می‌باشد.

قضیه ۱۳.۱.۱ هر گاه $f \in H(\Delta(a;R))$ و به ازای هر $z \in \Delta(a;R)$، $|f(z)| < M$، آن گاه

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n} \qquad (n = ۱, ۲, \ldots)$$

این قضیه به قضیه تخمینهای کوشی معروف است.

برهان : به قضیه‌ی ۲٦.۱۰ از <u>آنالیز مختلط</u> رودین مراجعه شود. .

[5] parseval formula

قضیه ۱۴.۱.۱ (اصل مدول ماکزیمم) فرض کنید G یک ناحیه در صفحه باشد و

$f \in H(G)$ و $\bar{\Delta}(a;r) \subseteq G$ در این صورت داریم :

$$|f(a)| \leq max|f(a+re^{i\theta})| \qquad (\circ \leq \theta \leq ۲\pi) \qquad (۱)$$

تساوی در (۱۱) برقرار است اگر و فقط اگر f در G ثابت باشد. لذا $|f|$ در هیچ نقطه از G ماکزیمم موضعی ندارد مگر f ثابت باشد.

برهان : به آنالیز مختلط رودین قضیه ۲۴.۱۵ مراجعه شود.

قضیه ۱۵.۱.۱ (**لم شوارتز**)[۶] فرض کنیم f در A تحلیلی ،کراندار و یک به یک بوده و $f(\circ) = \circ$. در این صورت داریم:

$$|\ f(z)\ | \leq |\ z\ |, \quad z \in \Delta \qquad (۱)$$

و

$$|\ f'(\circ)\ | \leq ۱ \qquad (۲)$$

هرگاه در (۱) به ازای یک $z \in \Delta - \{\circ\}$ تساوی برقرار باشد یا در (۲) تساوی داشته باشیم، آنگاه $f(z) = \lambda z$ که در آن λ ثابت است، $|\ \lambda\ | = ۱$.

برهان : به آنالیز مختلط رودین قضیه‌ی ۲.۱۲ مراجعه شود.

تعریف ۱۶.۱.۱ دو ناحیه‌ی $\Omega_۱, \Omega_۲$ را به طور همدیس هم‌ارز گویند هرگاه تابعی مانند $\varphi \in H(\Omega_۱)$ موجود باشد به طوری که φ در $\Omega_۱$ یک به یک بوده و $\varphi(\Omega_۱) = \Omega_۲$. لذا نواحی به طور همدیس هم‌ارز

[۶] Schwarz Lemma

همانریخت هستند.

قضیه ۱۷.۱.۱ (نگاشت ریمان): هر ناحیه همبند ساده مانند Ω در صفحه (غیر از خود صفحه) به طور همدیس هم‌ارز قرص یکه‌ی Δ می‌باشد.

برهان : فصل [۱۴] آنالیز مختلط رودین مراجعه شود.

۲.۱ توابع تک ارز و مشتق شوارتزین

تعریف ۱.۲.۱ در سراسر این پایان نامه نماد Ω برای نشان دادن دامنه در صفحه مختلط $\mathbb{C}$ بکار می‌رود و $\partial\Omega$ مرز آن خواهد بود، برای هر $\omega \in \Omega$، $d_\Omega(\omega)$ فاصله ω از مرز Ω خواهد بود.

تعریف ۲.۲.۱ یک تابع مختلط تعریف شده در Δ تک ارز گفته می‌شود اگر تحلیلی و یک به یک باشد. به طور معادل تابع تحلیلی f روی دیسک واحد Δ را تک ارز گوئیم هر گاه برای هر $z_۱, z_۲$ در D که $z_۲ \neq z_۱$ داشته باشیم $f(z_۱) \neq f(z_۲)$. برای مطالعه نظریه این توابع به منابع [۱۴, ۲۳],[۲٦] رجوع شود.

نمادگذاری : کلاس همه توابع تک ارز در Δ با U نشان داده می‌شود وزیر کلاسهای نرمال شده از U مانند کلاس $S, S_\circ$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$S = \{f \in U : f(\circ) = \circ \ , \ f'(\circ) = ۱\}$$

$$S_\circ = \{f \in U : \text{در } \Delta \text{ صفری ندارد } f, f(\circ) = ۱\}$$

نکته ۳.۲.۱ می‌توان دید که هر $f \in S$ دارای بسط تیلور به فرم زیر می‌باشد

$$f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad |z| < ۱$$

قضیه ۴.۲.۱ اگر $f \in S$ آنگاه :

$$|a_۲| \leq ۲ \quad , \quad |a_۳ - a_۲^۲| \leq ۱$$

برهان : به قضیه ۱.۵ از مرجع [۲۳] مراجعه شود.

قضیه ۵.۲.۱ (قضیه[۷] کوبه $\frac{۱}{۴}$) فرض کنید $f \in S$ در این صورت برد f قرص به مرکز مبدأ و شعاع $\frac{۱}{۴}$ را می‌پوشاند.

برهان : به مرجع [۱۴] مراجعه شود.

تعریف ۶.۲.۱ تابع $f(z)$ را در نقطه $z_۰$ موضعاً تک ارز گوئیم، هرگاه در یک همسایگی $z_۰$ تک ارز باشد.

مثال ۷.۲.۱ تابع $k(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲} = z + ۲z^۲ + \ldots$ را در نظر بگیریم. این تابع در Δ تحلیلی و تک ارز است. این تابع اهمیت خاصی در نظریه توابع تحلیلی دارد و به تابع کوبه[۸] معروف هست.

تعریف ۸.۲.۱ دامنه $\Omega \subset \mathbb{C}$ را نسبت به $z_۰$ ستاره گون گوئیم هر گاه هر پاره خطی که نقاط Ω را به $z_۰$ وصل می‌کند دقیقاً داخل Ω قرار می‌گیرد.

تعریف ۹.۲.۱ تابع f متعلق به S را ستاره گون (نسبت به مبدأ ستاره گون) گوئیم اگر چنان که قرص واحد باز Δ، با f بر دامنه‌ای نگاشته شود که نسبت به $z_۰ = ۰$ ستاره گون است. این زیر رده از S را با S^* نشان

[۷] Koebe one-Quartwr theorem

[۸] Koebe Function

می‌دهیم.

بطور معادل تابع $f \in H(\Delta)$ ستاره گون نامیده می‌شود هر گاه تک ارز باشد و $f(\Delta)$ یک ناحیه ستاره گون نسبت به مبدأ باشد.

قضیه ۱۰.۲.۱ تابع تحلیلی f ستاره گون است اگر و فقط اگر :

$$Re(\frac{zf'(z)}{f(z)}) > ۰ \qquad (z \in \Delta)$$

برهان : به قضیه ۲.۷ از مرجع [۲۳] مراجعه شود.

مثال ۱۱.۲.۱ تابع کوبه $k(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲}$ یک تابع ستاره گون است. زیرا :

$$Re(\frac{zk'(z)}{k(z)}) = Re\{\frac{۱+z}{۱-z}\} > ۰$$

تعریف ۱۲.۲.۱ دامنه $\Omega \in \mathbb{C}$ را محدب گوئیم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه از Ω را به هم وصل می‌کند، تماماً داخل Ω قرار گیرد.

تعریف ۱۳.۲.۱ تابع $f \in S$ را محدب گوئیم اگر چنانچه Δ با f بر یک دامنه‌ی محدب نگاشته شود این زیررده از S را با K نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۴.۲.۱ تابع $f \in S$ محدب است اگر و تنها اگر

$$Re\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > ۰ \qquad (z \in \Delta)$$

برهان : به قضیه ۲.۵ مرجع [۲۳] مراجعه شود.

تعریف ۱۵.۲.۱ تابع $f \in S$ را نزدیک به محدب گوئیم اگر و تنها اگر یک تابع محدب g (نه لزوماً نرمالیزه) چنان موجود باشد که $Re\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\} > ۰$ و این معادل است با اینکه تابع ستاره گون h چنان باشد که $Re\{\frac{zf'(z)}{h(z)}\} > ۰$ این زیررده از S را با C نشان می‌دهیم.

تذکر ۱۶.۲.۱ واضح است که $K \subseteq S^* \subseteq C \subseteq S$

برهان : به مرجع [۱۴ فصل ۲۰] و [۲۸ فصل ۲] مراجعه شود.

قضیه ۱۷.۲.۱ (قضیه نوشیرو – وارچوسکی) اگر f یک تابع تحلیلی در دامنه محدب Δ بوده و $Re\{f'(z)\} > ۰$ آنگاه f در Δ تک ارز است.

برهان : به مرجع [۲۷] رجوع شود.

قضیه ۱۸.۲.۱ هر تابع نزدیک به محدب تک ارز است.

برهان : فرض کنیم تابع f نزدیک به محدب باشد در این صورت تابع محدبی مانند g موجود است که $Re\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\} > ۰$ و فرض کنیم Ω برد g باشد، در نظر می‌گیریم

$$h(\omega) = f(g^{-۱}(\omega)) \qquad \omega \in \Omega$$

لذا

$$h'(\omega) = \frac{f'(g^{-۱}(\omega))}{g'(g^{-۱}(\omega))} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

در نتیجه

$$Re\{h'(\omega)\} > ۰ \qquad \omega \in \Omega$$

پس طبق نوشیرو وارچوسکی h تک ارز است، بنابراین f تک ارز است.

تعریف ۱۹.۲.۱ فرض کنیم I بازه‌ای از اعداد حقیقی و X یک فضای توپولوژیک باشد، هر نگاشت پیوسته مانند $\gamma : I \longrightarrow X$ را یک خم می نامیم .

تعریف ۲۰.۲.۱ خم γ را ساده گوئیم اگر برای هر $x, y \in I$ داشته باشیم :

$$\gamma(x) = \gamma(y) \Longrightarrow x = y$$

تعریف ۲۱.۲.۱ خم γ را بسته گوئیم اگر $\gamma(a) = \gamma(b)$ به طور معادل نقطه‌های (انتهایی) آن به هم برسند و برهم منطبق باشند.

تعریف ۲۲.۲.۱ خم ساده بسته را خم ژوردن نیز می‌نامند.

تعریف ۲۳.۲.۱ ناحیه داخلی یک خم ژوردن را ناحیه ژوردن می‌نامند.

قضیه ۲۴.۲.۱ (قضیه کاراتئودوری) Ω یک حوزه ژوردان است اگر و فقط اگر f یک توسیع پیوسته و یک به یک به $\bar{\Delta}$ داشته باشد. (f همان نگاشت ریمن است که از Δ به روی Ω تعریف شده است)

برهان : به‌قضیه ۲.٦ مرجع [٢٦] مراجعه شود.

قضیه ۲۵.۲.۱ هر خم ساده بسته γ، صفحه را به سه زیر مجموعه جدا از هم درون، بیرون خم و روی خم تقسیم می‌کند.

تعریف ۲۶.۲.۱ اگر X یک فضای متری بامتر d باشد آنگاه طول خم $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ را با

$$L(\gamma) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) : n \in N, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$$

تعریف می‌کنیم که در آن سوپریم روی تمام افرازهای ممکن از $[a,b]$ در نظر گرفته می‌شود. هرگاه $L(\gamma) < \infty$ گوییم خم γ با طول متناهی است.

تذکر ۲۷.۲.۱ اگر $X = R^n$ اختیار شود و $\gamma : [a,b] \longrightarrow R^n$ مشتق پذیر پیوسته باشد آنگاه :

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$