بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

# روش اسپلاین غیرچندجمله‌ای درجه ششم برای حل عددی مسئله Troesch

توسط:

**فاطمه رستمی**

استاد راهنما:

**رضا جلیلیان**

استاد مشاور:

**اسحاق الماسی**

آذر ۱۳۹۱

**بسمه تعالی**

# روش اسپلاین غیرچندجمله‌ای درجه ششم برای حل عددی مسئله Troesch

**توسط:**

**فاطمه رستمی**

پایان نامه ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

**در رشته‌ی:**

**ریاضی محض**

**از دانشگاه ایلام**
**ایلام**
**جمهوری اسلامی ایران**

**درتاریخ..................توسط هیأت داوران زیر ارزیابی و با درجه.............به تصویب نهایی رسید.**

دکتر رضا جلیلیان، استادیار گروه ریاضی دانشگاه ایلام (راهنما)..................................................................

جناب آقای اسحاق الماسی، هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه ایلام (مشاور)............................................

دکتر احمد ملابهرامی، استادیار گروه ریاضی دانشگاه ایلام (داور).............................................................

دکتر علی اصغر ساری زاده، استادیار گروه ریاضی دانشگاه ایلام (داور) ....................................................

**آذر ۱۳۹۱**

## تقدیم به:

اسطوره صداقت و انسانیت و غرور پدرم

تندیس مهر و محبت و فداکاری مادرم

براداران و خواهران عزیزم

و تقدیم به همه کسانی که از حقیقت دفاع می‌کنند...

# تشکر:

اولین و بالاترین سپاس را از خداوند بسیار مهربانم دارم که همیشه بهترینها را برایم را خواسته و در رسیدن به اهدافم همواره کمک کرده و مرا توفیق داده است.

پروردگار بخشنده‌ام را شاکرم که پدر و مادر دلسوز و روشنفکر، برادران و خواهران امیدبخش را بمن عطا کرد.

شایسته است صمیمانه‌ترین تشکرات قلبی خود را تقدیم اساتید بزرگوارم بنمایم که بنده را در تدوین این پایان‌نامه راهنمایی نمودند.

از جناب آقای دکتر رضا جلیلیان استاد راهنمای این پایان‌نامه کمال تشکر و قدردانی را دارم که همواره با صبر و حوصله به سوالاتم پاسخ دادند و در طی این مدت مرا یاری کردند و نقش مهمی در محقق شدن این پژوهش داشتند.

از جناب آقای اسحاق الماسی که قبول زحمت فرمودند و به عنوان استاد مشاور مرا یاری دادند سپاسگزارم و از جناب آقای دکتر ملابهرامی و جناب آقای دکتر ساری‌زاده که داوری این جانب را به عهده گرفتند صمیمانه تشکر می‌نمایم.

از اساتید بزرگوار سرکار خانم دکتر مرادی، سرکار خانم دکتر خوش‌آهنگ، جناب آقای دکتر ساری‌زاده و جناب آقای دکتر رحمانی دوست که افتخار شاگردی آنها را داشته‌ام، بینهایت سپاسگزارم.

و همچنین از زحمات بی‌دریغ برادرم جناب آقای دکتر حمیدرضا رستمی که در تمام مراحل زندگی و تحصیل مشوق بنده بودند کمال تشکر را دارم.

**چکیده**

در این پایان‌نامه مسئله Troesch که یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با شرایط مرزی است با استفاده از اسپلاین غیرچندجمله‌ای که به درجه ششم تقلیل می‌یابد حل می‌شود و یک روش عددی از مرتبه هشتم بدست می‌آید. آنالیز خطا و همگرایی روش مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتایج عددی آورده می‌شود تا همگرایی از لحاظ عددی نیز نشان داده شود و نتایج عددی با روش‌های دیگر مقایسه می‌شود تا کارایی روش نشان داده شود.

# فهرست مطالب

## فهرست مطالب

**عنوان** **صفحه**

## فهرست جداول

**عنوان** **صفحه**

# فهرست شکل‌ها

**عنوان** **صفحه**

# فصل اول

# مقدمه و کلیات

## ۱-۱- مقدمه

فصل اول به ارائه تعاریف و مفاهیمی می‌پردازد که در سراسر تحقیق مورد استفاده قرار می‌گیرند. ابتدا تعاریفی از آنالیز عددی[1] و درونیابی[2] ارائه می‌شود. سپس تعاریفی از تابع اسپلاین[3] و اسپلاین غیرچندجمله‌ای[4] مطالعه می‌شود و بعد از آن به انواع ماتریس‌ها[5] پرداخته می‌شود.

فصل دوم به پیشینه‌ای از تحقیقات صورت گرفته اختصاص دارد.

فصل سوم ابتدا به تجزیه و تحلیل تابع اسپلاین غیرچندجمله‌ای درجه ششم پرداخته می‌شود و فرمول اسپلاین درجه ششم غیرچندجمله‌ای بدست می‌آید و پس از آن آنالیز همگرایی[6] روش بحث می‌شود و سپس به محاسبه خطای[7] این نوع اسپلاین پرداخته می‌شود.

در نهایت، فصل آخر هم به حل عددی مسئله Troesch و همچنین به مقایسه نتایج عددی بدست آمده با نتایج عددی روش‌های دیگر پرداخته می‌شود.

1 - Numerical Analysis
2 - Interpolation
3 - Spline
4 - Non-polynomial spline
5 - Matrix
6 - Convergence analysis
7 - Error

## ۱-۲-آنالیز عددی

آنالیز عددی الگوریتم حل مسئله در ریاضیات پیوسته (ریاضیاتی که بعد از ریاضیات گسسته است) را مورد مطالعه قرار می‌دهد. آنالیز عددی اساساً به مسائل مربوط به متغیرهای حقیقی و متغیرهای مختلط و نیز جبر خطی عددی به علاوه حل معادلات دیفرانسیل و دیگر مسائلی که از فیزیک و مهندسی مشتق می‌شود، می‌پردازد. تعدادی از مسائل در ریاضیات پیوسته دقیقا با یک الگوریتم حل می‌شوند که به روش‌های مستقیم حل مسئله معروف‌اند. برای مثال روش حذفی گاوس برای حل دستگاه معادلات خطی است و نیز روش سیمپلکس در برنامه‌ریزی خطی مورد استفاده قرار می‌گیرد ولی روش مستقیم برای حل خیلی از مسائل وجود ندارد و ممکن است از روش‌های دیگر مانند روش تکرارشونده استفاده شود. چون این روش می‌تواند در یافتن جواب مسئله موثرتر باشد.

تخمین خطاهای موجود در حل مسائل از مهمترین قسمت‌های آنالیز عددی است. این خطاها در روش‌های تکرارشونده وجود دارد. چون به هر حال جواب‌های تقریبی بدست آمده با جواب دقیق مسئله، اختلاف دارد و یا وقتی که از روش‌های مستقیم برای حل مسئله استفاده می‌شود خطاهایی ناشی از گرد کردن اعداد بوجود می‌آید. در آنالیز عددی می توان مقدار خطا را در خود روش که برای حل مسئله به کار می‌رود، تخمین زد.

الگوریتم‌های موجود در آنالیز عددی برای حل بسیاری از مسائل موجود در علوم پایه و رشته‌های مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای مثال از این الگوریتم‌ها در طراحی بناهایی مانند پل‌ها، در طراحی هواپیما، در پیش‌بینی آب و هوا، تهیه نقشه‌های جوی از زمین، تجزیه و تحلیل ساختار مولکول‌ها، پیدا کردن مخازن نفت، استفاده می‌شود. همچنین اکثر ابر رایانه‌ها به طور مداوم براساس الگوریتم‌های آنالیز عددی برنامه‌ریزی می‌شوند. به طور کلی، آنالیز عددی از نتایج عملی حاصل از اجرای محاسبات برای پیدا کردن روش‌های جدید برای تجزیه و تحلیل مسائل، استفاده می کند.

## ۱-۳- درونیابی

در محاسبات عددی، درونیابی روشی است برای یافتن مقدار تابع درون یک بازه، زمانی که مقدار تابع در تعدادی از نقاط گسسته معلوم است.

## ۱-۴- تابع اسپلاین

فرض کنیم $N$ یک عدد صحیح نامنفی باشد تابع $S:[a,b]\rightarrow R$ با ضابطه:

$$S_l(x)=\sum_{k=0}^{N} a_k(x-x_l)^k \;, \; l=0,1,2,...,n,$$

که در آن $a_k$ ضرایبی حقیقی و مجهول می‌باشند که بایستی تعیین شوند، یک تابع اسپلاین درجه $N$ام نام دارد هرگاه:

۱. $S\in C^{N-1}[a,b]$ یعنی تابع $S$ تا مرتبه $(N-1)$ام مشتق‌پذیر و پیوسته است.

۲. در هر زیربازه‌ی $[x_{l-1},x_l]$ ، $0<l<n$ ، $S(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر $N$ است که در آن:

$$a=x_\circ<x_1<...<x_n=b,$$

۳. $S(x_l)=u_l, \qquad l=0,1,...,n,$

اگر $\Omega_n=\{x_l\}_{l=\circ}^{n}$ یک افراز روی $[a,b]$ باشد مجموعه تمام توابع اسپلاین روی این افراز را با $S_l(\Omega_n)$ نمایش می‌دهیم.

### ۱-۴-۱- تابع اسپلاین درجه سه

تابع اسپلاین درجه سه $S(x)$، از دسته $C^2[a,b]$، تابع $u(x)$ را در $[a,b]$ درونیابی می‌کند بطوریکه:

۱. در هر زیربازه‌ی $[x_{l-1},x_l]$، $S(x)$ یک چندجمله‌ای درجه سه است.

۲. مشتقات اول و دوم $S(x)$ در بازه ی $[a,b]$ پیوسته می‌باشند.

۳. با شرایط درونیابی

$$S(x_l) = u_l, \qquad S(x_{l+1}) = u_{l+1},$$
$$S''(x_l) = M_l, \qquad S''(x_{l+1}) = M_{l+1},$$

### ۱-۴-۲- تابع اسپلاین درجه شش

تابع اسپلاین درجه شش، از دسته $C^5[a,b]$، تابع $u(x)$ را در $[a,b]$ درونیابی می‌کند بطوریکه:

۱. در هر زیربازه‌ی $[x_{l-1}, x_l]$، $S(x)$ یک چندجمله‌ای درجه شش است.

۲. مشتقات اول و دوم و سوم و چهارم و پنجم $S(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته می‌باشند.

۳. با شرایط درونیابی

$$S(x_l) = u_l, \qquad S(x_{l+1}) = u_{l+1},$$
$$S'(x_l) = m_l, \qquad S'(x_{l+1}) = m_{l+1},$$
$$S''(x_l) = M_l, \qquad S''(x_{l+1}) = M_{l+1},$$
$$S^{(4)}(x_l) = F_l, \qquad S^{(4)}(x_{l+1}) = F_{l+1},$$

### ۱-۴-۳- تابع اسپلاین غیرچندجمله‌ای

برای هر زیربازه‌ی $[x_{l-1}, x_l]$، $0 < l < N$ تابع اسپلاین غیرچندجمله‌ای $S(x)$ مرتبه $N$ام به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_l(x) = \sum_{k=0}^{N-2} a_k (x - x_l)^k + c \sin \tau (x - x_l) + d \cos \tau (x - x_l),$$
$$l = 0,1,2,\dots,n,$$

که

که در آن $a_k$ها، $c$ و $d$ مقادیری حقیقی هستند و $\tau$ یک پارامتر آزاد است. مزیت این روش نسبت به روش تفاضلات متناهی در این است که می‌توان جواب و مشتقات مراتب بالاتر آن را در هر نقطه تقریب زد و همچنین بی‌نهایت بار پیوسته و مشتق‌پذیر بودن تابع اسپلاین غیرچندجمله‌ای باعث حفظ مشتق‌پذیری در نقاط گره‌ای می‌شود، پایه اسپلاین‌های غیرچندجمله‌ای مراتب مختلف را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$T_3 = span\{1, x, \cos(\tau x), \sin(\tau x)\},$$
$$T_4 = span\{1, x, x^2, \cos(\tau x), \sin(\tau x)\},$$
$$T_5 = span\{1, x, x^2, x^3, \cos(\tau x), \sin(\tau x)\},$$
$$T_6 = span\{1, x, x^2, x^3, x^4, \cos(\tau x), \sin(\tau x)\},$$
$$T_7 = span\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \cos(\tau x), \sin(\tau x)\},$$
.

.

.

$$T_N = span\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, ..., x^{N-2}, \cos(\tau x), \sin(\tau x)\},$$
که از این رابطه‌ها نتیجه گرفته می‌شود:

$$\lim_{\tau \to \infty} T_N = span\{1, x, x^2, x^3, ..., x^N\},$$
که ارتباط بین اسپلاین‌های غیرچندجمله‌ای و اسپلاین‌های چندجمله‌ای می‌باشد.

### ۱-۴-۴- تابع اسپلاین درجه سه غیرچندجمله‌ای

تابع اسپلاین $S(x)$ از دسته‌ی $C^\infty[a,b]$، تابع $u(x)$ را در نقاط شبکه‌ای $\{x_l\}$، $l = 1,2,...n$ درونیابی می‌کند که به یک پارامتر $\tau$ وابسته می‌شود و وقتی که $\tau \to 0$ به تابع اسپلاین درجه سه $S(x)$ تقلیل می‌یابد، یک اسپلاین درجه سه‌ی پارامتری یا غیرچندجمله‌ای نامیده می‌شود.

$$T_3 = span\{1, x, \cos(\tau x), \sin(\tau x)\},$$
که $\tau$ دوره تناوب قسمت مثلثاتی تابع اسپلاین است که می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد و از آن برای بالا بردن دقت روش استفاده می‌شود بنابراین در هر زیربازه‌ی $[x_l, x_{l+1}]$ داریم:

$$span\{1, x, \cos(\tau x), \sin(\tau x)\},$$
$$span\{1, x, x^2, x^3\}, (when\ \tau \to 0),$$
که این بدیهی است، وقتی که رابطه بین توابع پایه‌ای اسپلاین چندجمله‌ای و غیرچندجمله‌ای به صورت زیر نوشته شود:

$$T_3 = span\{1, x, \cos(\tau x), \sin(\tau x)\},$$

یا

$$= span\left\{1, x, \frac{2}{\tau^2}(1-\cos(\tau x)), \frac{6}{\tau^3}(\tau x - \sin(\tau x))\right\},$$

از این رابطه نتیجه گرفته می‌شود که:

$$\lim_{\tau\to\infty} T_3 = span\{1, x, x^2, x^3\},$$

این تابع وقتی که پارامتر $\tau \to 0$ به تابع اسپلاین درجه سه تبدیل می‌گردد، این تابع اسپلاین در مجموعه نقاط $\{x_l\}$ در بازه‌ی $[a,b]$ تابع $u(x)$ را درونیابی می‌کند.

### ۱-۴-۵- تابع اسپلاین درجه شش غیرچندجمله‌ای

تابع اسپلاین $S(x)$ از دسته‌ی $C^\infty[a,b]$، تابع $u(x)$ را در نقاط شبکه‌ای $\{x_l\}$ ، $l=1,2,...n$ درونیابی می‌کند که به یک پارامتر $\tau$ وابسته می‌شود و وقتی که $\tau \to 0$ به تابع اسپلاین درجه شش $S(x)$ تقلیل می‌یابد، یک تابع اسپلاین درجه شش پارامتری یا غیرچندجمله‌ای نامیده می‌شود.

پایه توابع اسپلاین مرتبه شش به این شکل است:

$$T_6 = span\{1, x, x^2, x^3, x^4, \cos(\tau x), \sin(\tau x)\},$$

که $\tau$ دوره تناوب قسمت مثلثاتی تابع اسپلاین است که می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد و از آن برای بالا بردن دقت روش استفاده می‌شود بنابراین در هر زیربازه‌ی $[x_l, x_{l+1}]$ داریم:

$$span\{1, x, x^2, x^3, x^4, \cos(\tau x), \sin(\tau x)\},$$

یا

$$span\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}, \ (when\ \tau \to 0)$$

که این بدیهی است، وقتی که رابطه بین توابع پایه‌ای اسپلاین چندجمله‌ای و غیرچندجمله‌ای به صورت زیر نوشته شود:

$$T_6 = span\{1, x, x^2, x^3, x^4, \cos(\tau x), \sin(\tau x)\},$$

یا

$$= span\left\{1, x, x^2, x^3, x^4, \frac{120}{\tau^5}\sin(\tau x), \frac{720}{\tau^6}(1-\cos(\tau x))\right\},$$

از این رابطه‌ها نتیجه گرفته می‌شود که:

$$\lim_{\tau\to\infty} T_6 = span\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$$

این تابع وقتی که پارامتر $\tau \to 0$ به تابع اسپلاین درجه شش تبدیل می‌گردد، این تابع اسپلاین در مجموعه نقاط $\{x_l\}$ در بازه‌ی $[a,b]$ تابع $u(x)$ را درونیابی می‌کند.

## ۱-۵- ماتریس سه قطری[1]

ماتریس مربع $A$ را سه قطری می‌نامند. هرگاه

$$a_{ij} = 0 \, , | i - j | > 1$$

## ۱-۶- ماتریس وارون‌پذیر[2]

ماتریس مربع $A$ از مرتبه $n$ را وارون‌پذیر گویند هرگاه ماتریسی مانند $B$ چنان یافت شود که $AB = BA = I_n$. در این صورت $B$ را وارون $A$ نامیده و با $A^{-1}$ نشان می‌دهند.

## ۱-۷- ماتریس قطری غالب[3]

ماتریس مربعی $A$ از مرتبه $n$ را قطری غالب گویند هرگاه . $\left|a_{ii}\right| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right| \, , i = 1,\ldots,n$

## ۱-۸- مسئله مقدار مرزی مرتبه دوم[4]

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $u'' = f(x,u,u')$، $x \in [a,b]$، با شرایط مرزی $\begin{cases} u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$ را مسئله مقدار مرزی مرتبه دوم می‌نامیم.

---

[1] - Tri - Diagonal Matrix
[2] - Invertible Matrix
[3] - Diagonally Dominant Matrix
[4] - Two – Order Boundary Valve Problem

## ۱-۹- دستگاه معادلات غیرخطی[1]

شکل کلی یک دستگاه از معادلات غیرخطی عبارت است از:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \end{cases}$$

که در آن هر $f_i$ فضای $n$ بعدی $R^n$ را بتوی خط حقیقی می‌نگارد. اغلب مطلوب است که دستگاه به گونه‌ای دیگر با تعریف یک تابع $F$ نمایش داد که $R^n$ بتوی $R^n$ با

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = (f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_n(x_1, x_2, ..., x_n))$$

می‌نگارد. با استفاده از نماد بردار جهت نمایش متغیرهای $x_1, x_2, ..., x_n$، می‌نویسیم $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$، یا برای سادگی، $(x_1, x_2, ..., x_n)^T$. لذا دستگاه به شکل زیر است:

$$F(x) = 0.$$

## ۱-۱۰- بسط تیلور[2]

فرض کنیم $f \in C^n[a,b]$ و $f^{(n+1)}$ بر $[a,b]$ موجود باشد.

همچنین $x_\circ \in [a,b]$. در این صورت به ازای هر $x \in [a,b]$، نقطه‌ای مانند $\alpha(x) \in (a,b)$ وجود دارد بطوریکه $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$ که در آن

$$p_n(x) = f(x_\circ) + f'(x_\circ)(x - x_\circ) + \frac{f''(x_\circ)}{2!}(x - x_\circ)^2$$
$$+ ... + \frac{f^{(n)}(x_\circ)}{n!}(x - x_\circ)^n = \sum_{k=\circ}^{n} \frac{f^{(k)}(x_\circ)}{k!}(x - x_\circ)^k,$$

و

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha(x))}{(n+1)!}(x - x_\circ)^{n+1},$$

در اینجا $p_n(x)$ چندجمله‌ای تیلور درجه $n$ام $f$ حول $x_\circ$ و $R_n(x)$ جمله‌ی باقیمانده (خطای برشی) وابسته به $p_n(x)$ نامیده می‌شود.

---
[1] - Nonlinear equations system
[2] - Taylors expansion

# فصل دوم

# مروری بر پیشینه تحقیق