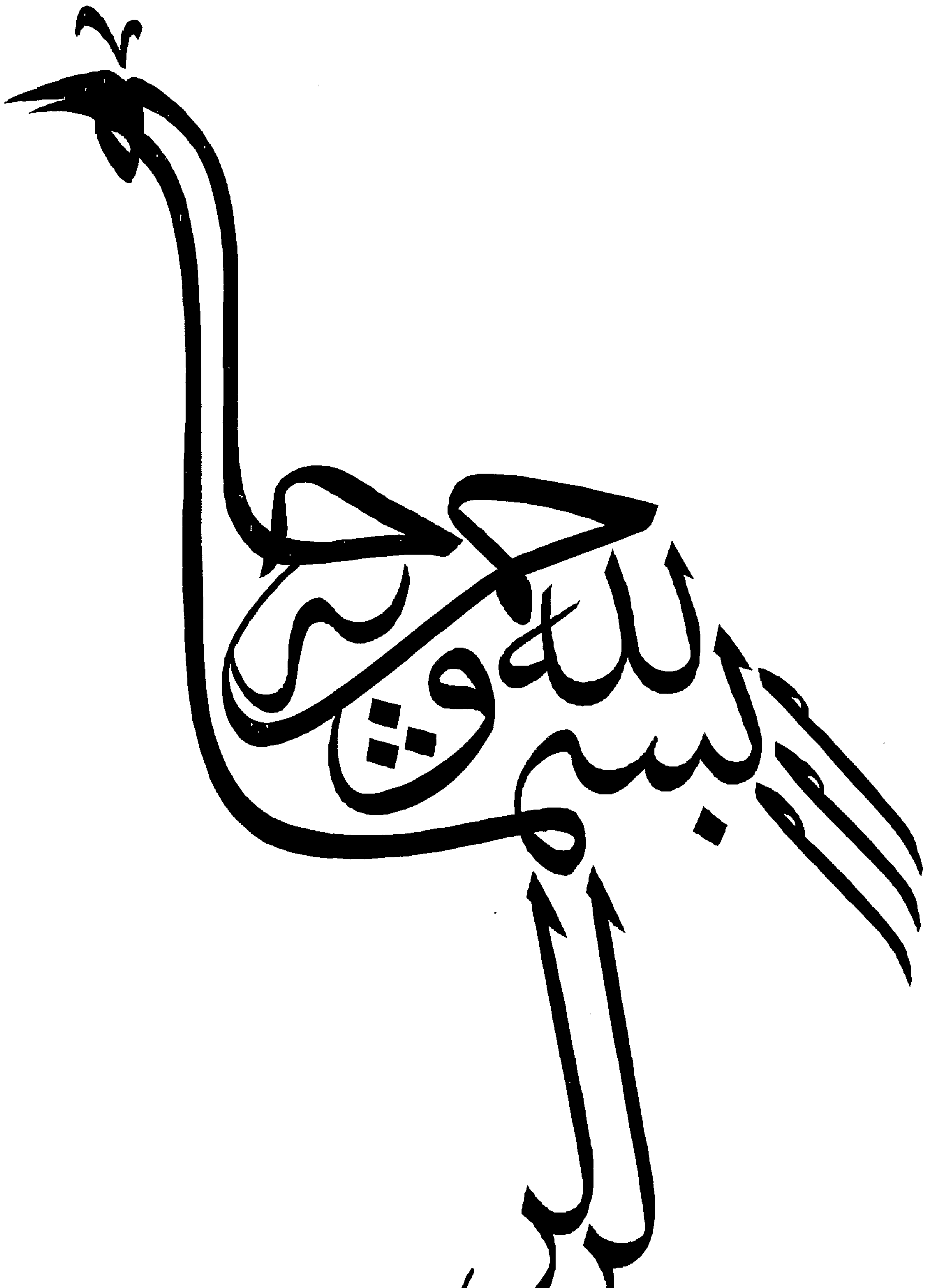

۶۷۲۴۶

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

۱۳۸۴ /۳/ ۳۷

پایان نامه

کارشناسی ارشد ریاضی محض(جبر)

عنوان

حاصلضرب تانسوری جبرهای جابجایی روی یک میدان

نگارش

مسعود کریمی

استاد راهنما

اقای دکتر مسعود طوسی

۷۲۴۶

استاد مشاور

اقای دکتر صمد حاج جباری

دی۱۳۸۳

تاریخ ....

شماره ....

پیوست..................

دانشگاه شهید بهشتی

فرم شمارۀ ۱۰(کارشناسی ارشد)

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
تلفن: ۲۹۹۰۱

صورتجلسۀ دفاع از پایان نامه

۱۳۸۴ /۳/ ۳۷

جلسۀ هیأت داوران ارزیابی پایان نامۀ **آقای مسعود کریمی** به شماره شناسنامۀ **۲۰۴** صادره از **بجنورد** متولد **۱۳۵۹** دانشجوی دورۀ کارشناسی ارشد ناپیوستۀ رشتۀ **ریاضی** با عنوان:

« حاصلضرب تانسوری جبرهای جابجایی روی میدان»

به راهنمایی **آقای دکتر مسعود طوسی** طبق دعوت قبلی در تاریخ ۸۳/۱۰/۳۰ تشکیل شد و بر اساس رأی هیأت داوران و با عنایت به مادۀ ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۳/۱۰/۲۵ پایان نامه با نمرۀ ۱۹(نوزده تمام) و درجۀ عالی مورد تصویب قرار گرفت.

هیأت داوران	مرتبۀ علمی	نام دانشگاه
۱. **استاد راهنما:** آقای دکتر مسعود طوسی	دانشیار	شهید بهشتی
۲. **استاد مشاور:** آقای دکتر صمد حاج جباری	استادیار	شهید بهشتی
۳. **داور:** آقای دکتر حسین ذاکری	استاد	تربیت معلم
۴. **داور:** خانم دکتر نگار شهنی کرمزاده	استادیار	شهید بهشتی
۵. **مدیر گروه ریاضی:** خانم دکتر ویدا میلانی	استادیار	شهیدبهشتی

زندگی صحنه یکتای هنرمندی ماست
هر کسی نغمه خود خواند و از صحنه رود

صحنه پیوسته به جاست

خرم آن نغمه که مردم بسپارند بیاد

تقدیم به

پدر بزرگوار و مادر مهربانم

تقدیر و تشکر

بعد از شکر خدای که عنایت و توفیق او، توانایی اتمام رساندن این مقطع از تحصیلات را به من بخشید و سپاس فراوان از خانوادهٔ خود که شرایط مساعد پیشرفت تحصیلی مرا فراهم آورد، به رسم قدر شناسی لازم می دانم تا مراتب سپاس خود را از تمام اساتید بزرگوار و دوستان گرانمایه که به نحوی در طول دورهٔ فوق لیسانس و گرداوری این رساله یاری رسان من بودند اعلام دارم.

تشکر ویژهٔ من از استاد دانشمند، جناب آقای دکتر مسعود طوسی است که به جهت حسن خلق و تبحری که در جبر جابجایی دارند، در طول دورهٔ فوق لیسانس موجب علاقه‌مند شدن من به این شاخه از ریاضیات شدند و در ایام تدوین این رساله همواره راهنمایی‌های صبورانهٔ ایشان راهگشا بود و ویراستاری موشکافانهٔ ایشان موجب شکل‌گیری چنین رساله‌ای شد.

و نیز لازم است در این مجال از اساتید بزرگوار آقای دکتر حاج جباری که مشاورهٔ رساله را به عهده داشتند و جناب پروفسور ذاکری از دانشگاه تربیت معلم که با وجود مشغلهٔ بسیار با کمال دقت این رساله را مطالعه نمودند و داوری آن را به عهده گرفتند تشکر و قدردانی نمایم. همچنین از زحمات سرکار خانم دکتر کرمزاده به‌خاطر مطالعهٔ رساله و داوری آن سپاسگزارم.

در ضمن از همکاری گروه ریاضی دانشکدهٔ علوم ریاضی و آمار، کتابخانهٔ دانشکده و دانشگاه، کتابخانهٔ مرکز تحقیقات ریاضی و فیزیک نظری و کتابخانهٔ موسسهٔ ریاضی دکتر مصاحب سپاسگزار هستم.

در پایان ارادت خالصانه و قدردانی صمیمانهٔ خود را تقدیم تمام دوستان عزیزم می‌کنم که در طول دورهٔ فوق لیسانس همراه من بودند و در روز سرد و برف‌آلود جلسهٔ دفاع، حضور دلگرم کننده‌ای داشتند.

فهرست مندرجات

چکیده

با فرض میدان K و حلقه‌های جابجایی A, B که K–جبر نیز هستند، دیده می‌شود که حاصلضرب تانسوری A, B روی K، یعنی $A \otimes_K B$، یک K–جبر است. این حلقه در صورتی که A, B حوزهٔ صحیح باشند و K میدان به‌طور جبری بسته باشد، حوزهٔ صحیح است و عناصر یکال آن به‌صورت $a \otimes b \in A \otimes_K B$ می‌باشند.

اگر $A \otimes_K B$ موضعی باشد، در این صورت حلقه‌های A, B نیز موضعی هستند و یکی از آن‌ها روی K، جبری است و حاصلضرب تانسوری میدان‌های خارج‌قسمتی آن‌ها نیز موضعی است.

اگر A, B میدان باشند، برای بررسی تعداد ایده‌ال‌های اول می‌نیمال $A \otimes_K B$، به کمک توپولوژی زاریسکی و گالوایی، کافی است A, B، توسیع‌های جبری و تفکیک‌پذیر K در نظر گرفته شوند و دیده می‌شود که نوتری بودن $A \otimes_K B$ به پایه‌های تعالی A, B روی K بستگی دارد.

اگر I, J به‌ترتیب ایده‌ال‌هایی از A, B باشند و T ایده‌ال تولیدشده توسط آن‌ها در $A \otimes_K B$ باشد، رابطهٔ مستقیمی بین ارتفاع T و ارتفاع I, J موجود است. همچنین اگر P ایده‌ال اول در $A \otimes_K B$ باشد بین نمرهٔ P در $A \otimes_K B$ و نمرهٔ ایده‌ال‌های تحدیدی P در A, B، رابطه‌ای مستقیم وجود دارد.

اگر $A \otimes_K B$، MPC (کوماکسیمال بودن ایده‌ال‌های اول می‌نیمال) باشد، A, B نیز MPC است. و اگر A, B دو حوزهٔ صحیحاً بسته باشند، $A \otimes_K B$، MPC است.

پیشگفتار

در چند دههٔ اخیر عرصهٔ جبر جابجایی دست‌خوش تحولات و بسط و گسترش بوده است. که این امر حاصل تحقیقات و مقالات متعدد جبردانان کثیری می‌باشد. در این میان شاخه‌هایی از ریاضیات، مانند هندسهٔ جبری و توپولوژی جبری، با توجه به ارتباطی که میان آن‌ها به واسطهٔ پرداختن به مفاهیم مشترک میان جبر و هندسه و توپولوژی، وجود دارد، روند رو به رشد بیشتری داشه‌اند.

یکی از این مفاهیم، مفهوم تانسور است که اصولاً یک مفهوم هندسی-فیزیکی می باشد. تانسور در جبر، در نقش یک نوع عمل بین ساختاری (درون ساختاری) ظاهر می‌شود.

یکی از ساختارهایی که در جبر جابجایی وجود دارد، با فرض حلقهٔ R، R−جبرها هستند. این ساختار در واقع حلقه‌ای است که در عین حال R−مدول نیز می‌باشد.

با در دست داشتن R−جبرهای A, B، و به کمک مفهوم ضرب تانسوری، قادریم R−جبر جدیدی به دست آوریم. در واقع می‌توان با ضرب تانسوری R−مدول‌های A, B، یعنی $A \otimes_R B$، و با توجه به ساختار حلقه‌های A, B، یک ساختار حلقه‌ای روی آن بنا نمود.

این فرایند هنگامی‌که حلقهٔ R با میدانی چون K تعویض گردد، و با توجه به‌اینکه محور اصلی در مباحث هندسهٔ جبری، بررسی K−جبرهای متناهی مولد است (جبرهای آفین)، تبدیل به یک سرفصل مهم در هندسهٔ جبری و حتی توپولوژی جبری، با عنوان ضرب تانسوری جبرهای روی میدان می‌شود. از این روست که مطالعهٔ نظریهٔ کلاسیک ضرب تانسوری جبرها، به بررسی جبرهای روی میدان می‌پردازد.

زمینهٔ اصلی و مورد توجه در مطالعهٔ ضرب تانسوری جبرهای روی میدان، در واقع شناخت خواص حلقه (جبر) حاصل می‌باشد. البته علت اصلی معطوف شدن تلاش‌ها به این سو،

چیزی جز غیر شفاف بودن ساختار این حلقه نیست. که این امر هم به طور طبیعی از خاصیتی که ضرب تانسوری در جبر دارد ناشی می‌شود.

رساله‌ای که هم اکنون در دست دارید، به بررسی تعدادی از مقالات و تحقیقاتی که در چند سالهٔ اخیر در این زمینه انجام شده است، می‌پردازد. یکی از نقاط قوت و مواردی که می‌تواند باعث شود این رساله مورد توجه محققان قرار بگیرد، توانایی آن در پاسخ دادن به سوالات رایج کسانی است که موضوع تحقیق آن‌ها پیرامون ضرب تانسوری جبرهای روی میدان است، می‌باشد.

چرا که در این فرصت سعی شده است خواصی از حلقهٔ $A \otimes_K B$، که معمولاً برای کار کردن با آن نیاز است، گردآوری شود. از جملهٔ این موارد می‌توان به مقسوم‌علیه‌های صفر، موضعی بودن و نوتری بودن اشاره کرد.

نکته‌ای که ذکر آن لازم به نظر می‌رسد، این است که هنوز سوالاتی در این زمینه وجود دارد که یا هنوز به آن‌ها پاسخ داده نشده است و یا این‌که پاسخی قطعی برای آن‌ها یافت نشده است. از جمله آن‌ها، وجود شرایط لازم و کافی برای نوتری بودن، شرایط حوزه بودن و میدان بودن این نوع حلقه‌ها مورد سوال است. که به بعضی از این سوالات می‌توان در حالات خاصی پاسخ داد.

نگارش این رساله در یازده فصل تنظیم شده است. ذیلاً به معرفی و توضیح در مورد آن‌ها پرداخته می‌شود.

پنج فصل اول این رساله به معرفی پیشنیازها و مقدمات لازم برای مطالعهٔ فصلهای تخصصی‌تر اختصاص داده شده است.

فصل اول، مفاهیم اولیه‌ای چون جبرها، ضرب تانسوری جبرها و یکریختی‌های مهمی را در بر دارد.

فصل دوم، ردهٔ خاصی از حلقه‌ها، یعنی حلقه‌های منظم فون نیومن را مورد بررسی قرار

می‌دهد. ضرورت نوشتن چنین فصلی از آن‌جا مشخص می‌شود که در بسیاری از مواقع می‌توان حلقه‌ها را منظم فون نیومن در نظر گرفت. لذا لازم است که با خواص این نوع حلقه‌ها آشنا بود.

فصل سوم، با توجه به گستردگی استفاده از مفهوم وابستگی صحیح و نیاز به در دست بودن قضایا و تعاریف و استفادهٔ مکرر از آن‌ها، تحت عنوان وابستگی ارایه شده است.

فصل چهارم تماماً به معرفی توپولوژی زاریسکی می‌پردازد. یکی از نکات مهم که در بررسی بعضی از مقالات دیده شد، استفاده از تکنیک‌های توپولوژیکی است. از جملهٔ مهمترین و معروفترین توپولوژی‌ها که در جبر بررسی می‌شود، توپولوژی زاریسکی است.

فصل پنجم، به نظریهٔ میدان‌ها اختصاص دارد. همچنان که قبلاً هم ذکر شد، نظریهٔ کلاسیک ضرب تانسوری جبرها، به مطالعهٔ جبرهای روی میدان می‌پردازد. از سوی دیگر گاهی مواردی پیش می آید که لازم است جبرهای مورد بررسی، میدان‌ها باشند. از این رو با توجه به این‌که در این رساله به‌طور مکرر از تعاریف و قضایای نظریهٔ میدان‌ها استفاده می‌شود و از آن‌جا که این قضایا و تعاریف باید همواره در دسترس باشند، این فصل ارایه شده است.

فصل ششم آغاز مطالب اصلی و تخصصی این رساله است. که در آن ضمن معرفی مفهوم الحاق آزاد، مقسوم علیه‌های صفر بررسی می شوند.

فصل هفتم به نوعی شبیه فصل قبل است. در این فصل مقسوم علیه‌های یک (عناصر یکال)، در حاصلضرب تانسوری جبرهای خاصی روی یک میدان به طور جبری بسته مورد بررسی قرار می گیرند.

فصل هشتم به بررسی شرایط لازم و کافی برای موضعی بودن حاصلضرب تانسوری دو جبر روی میدان می‌پردازد.

فصل نهم یکی از تکنیکی‌ترین فصل‌های این رساله است. که در آن باید از همهٔ پنج فصل مقدماتی استفاده نمود. در قسمت اول این فصل، طیف اول حاصلضرب تانسوری دو جبر روی میدان، از نظر تعداد اعضای آن بررسی می‌شود. در قسمت دوم، مباحثی در باب نوتری

بودن این حلقه ارائه می‌گردد.

فصل دهم به مطالعهٔ مفاهیمی چون دنباله‌ها، ارتفاع و درجهٔ ایده‌ال‌ها، در حاصلضرب تانسوری دو جبر روی میدان می‌پردازد. در واقع این شاخص‌ها در مورد ایده‌ال‌های خاصی مورد محاسبه قرار می‌گیرد.

فصل یازده، آخرین فصل این رساله است. در فصل نهم ثابت می‌شود که ایده‌ال‌های اول می‌نیمال، در حاصلضرب تانسوری میدان‌ها، کوماکسیمال هستند. حلقه‌هایی که چنین خاصیتی دارند، MPC نامیده می‌شوند. اینک در فصل حاضر، شرایطی را که باعث می‌شود حاصلضرب تانسوری جبرهای روی میدان، MPC باشد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

اکنون قبل از شروع به خواندن این رساله، چند نکته و قرار داد وجود دارد که لازم است به آن‌ها دقت شود:

۱) در سراسر این رساله، تمام حلقه‌ها ناصفر، یکدار و جابجایی هستند.

۲) اگر مشخصهٔ حلقه‌ای $p \neq ۰$ باشد، در این‌صورت منظور $p > ۱$ می‌باشد.

۳) در تمام همریختی های حلقه‌ای مانند $f : A \longrightarrow B$، همواره $f(۱_A) = ۱_B$.

۴) اگر I ایده‌الی از A و J ایده‌الی از B باشد، توسیع I توسط f را به‌صورت IB یا $f(I)B$ یا I^e نمایش می‌دهیم و تحدید J توسط f را به‌صورت $J \cap A$ یا $f^{-۱}(J)$ و یا J^c نشان می‌دهیم.

۵) تمام زیر ساختارهای جبری، از جمله ایده‌ال‌ها، حلقه‌ها، مدول‌ها، جبرها و میدان‌ها، باتوجه به سره بودن یا ناسره بودن آن‌ها،با نمادهای $\subsetneq$ و $\subseteq$ نمایش داده می‌شوند.

۶) اگر E زیرمجموعهٔ حلقهٔ R باشد، ایده‌ال تولید شده توسط E در R را با $\langle E\rangle$ نشان می‌دهیم. و اگر $a_۱, \cdots, a_n \in R$، آن‌گاه ایده‌ال تولید شده توسط این عناصر در R با نمادهای $(a_۱, \cdots, a_n)$ یا $(a_۱, \cdots, a_n)R$ یا $a_۱R + \cdots + a_nR$ نمایش داده می‌شوند.

۷) بافرض حلقهٔ R، منظور از $R[x_۱, \cdots, x_n]$، حلقهٔ چندجمله‌ای‌های از n متغیر است که $n \in \mathbb{N}$. و اگر R حوزهٔ صحیح باشد، منظور از $R(x_۱, \cdots, x_n)$، میدان کسرهای $R[x_۱, \cdots, x_n]$ است.

۸) مطالب این رساله در قالب تعریف، قضیه، لم، گزاره، تذکر و مثال گنجانده شده‌اند، که متناظر با هر یک از این موارد، شماره‌ای به‌صورت $m.n$ به‌طور منحصر بفرد اختصاص داده شده است. منظور از n، شمارهٔ فصلی است که مطلب مورد نظر در آن قرار دارد و m، شمارهٔ مطلب مورد نظر در فصل nام است.

۹) هنگام ارجاع دادن به مطالبی که در رساله وجود دارد، فقط به شمارهٔ آن مطلب به‌صورت $(m.n)$ اشاره می‌شود.

۱۰) علامت □ در انتهای اثبات قضایا و لم‌ها استفاده شده است و به معنی پایان یافتن اثبات است.

۱۱) در ابتدای هر فصل، ضمن معرفی کلی مباحث آن، بعضی از منابع و مراجعی که از آن‌ها در فصل مورد نظر استفاده شده است، معرفی می‌شوند. افراد علاقه‌مندی که بخواهند مطالب تکمیلی بحث‌ها را ببینند، می‌توانند به این منابع رجوع کنند.

آن‌چه که مسلم است، خطا و اشتباه جزء لاینفک هر نوع فعالیت بشری می‌باشد و تنها می‌توان این خطاها را کاهش داد. این رساله نیز از این موضوع مستثنی نبوده و احتمال وجود اشکالات نیز هست که در این‌صورت، غالب آن‌ها در حین تایپ متن بوجود آمده‌اند. اما در این‌جا نیز سعی بر آن بوده است که بتوان حتی‌المقدور این احتمال را کاهش داد.

فصل ۱

جبرها و تانسور آن‌ها

در این فصل به مفاهیم و قضایایی از جبر جابجایی می‌پردازیم که دراکثر قسمتهای این رساله استفاده می‌شود. لذا در برخی از موارد از بیان اثبات خودداری می‌شود. در این‌صورت به یکی از مراجعی که حکم از آن گرفته شده است ارجاع داده می‌شود.

مطالبی که در این فصل ارائه می‌گردد، غالباً از منابع [SW1], [BK], [Sh], [AM] اخذ شده‌اند.

۱.۱ تعریف: حلقهٔ R مفروض است. منظور از یک R–جبر، حلقه‌ای مانند S است که خاصیت R–مدولی دارد و در شرط زیر صدق می کند:

به ازاء هر $a \in R$ و $x, y \in S$ داریم: $a(xy) = (ax)y = x(ay)$.

۲.۱ تذکر: به راحتی دیده می‌شود که اگر S یک توسیع حلقه‌ای R باشد آن‌گاه S یک R–جبر است.

۳.۱ تعریف: فرض کنید R یک حلقه و S', S دو R–جبر باشند:

الف): زیرجبر S، یک زیرحلقهٔ S می‌باشد به‌طوریکه R–زیرمدول S نیز باشد.

ب): نگاشت $\varphi : S \longrightarrow S'$ یک همریختی R–جبرها است اگر، φ هم همریختی R–مدولی و هم همریختی حلقه‌ای باشد.

۴.۱ لم: فرض کنید R, S, S' حلقه باشند. دراین‌صورت:

الف) S یک R−جبر است اگر و تنها اگر همریختی حلقه‌ای $f : R \longrightarrow S$ موجود باشد. دراین حالت f همریختی ساختاری R−جبر S نامیده می‌شود.

ب) نگاشت $\varphi : S \longrightarrow S'$ همریختی R−جبرها است، اگر و تنها اگر φ همریختی حلقه‌ها باشد و همریختی حلقه‌های $f : R \longrightarrow S$ و $f' : R \longrightarrow S'$ موجود باشند به‌طوریکه $f' = \varphi \circ f$.

۵.۱ قضیه: فرض کنید S_1, S_2 دو R−جبر باشند. در این‌صورت $S_1 \otimes_R S_2$ همراه با ضرب زیر یک R−جبر است

$$\begin{array}{rcl} (S_1 \otimes_R S_2) \times (S_1 \otimes_R S_2) & \longrightarrow & (S_1 \otimes_R S_2) \\ (\sum_{i=1}^{n} s_i \otimes t_i, \sum_{j=1}^{m} s'_j \otimes t'_j) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} s_i s'_j \otimes t_i t'_j \end{array}$$

برهان: رجوع کنید به [AM, page30].

۶.۱ تذکر: توجه داشته باشید هرگاه در (۴.۱)، حلقهٔ R میدان K باشد، آن‌گاه f یک‌به‌یک است. لذا می‌توان هر K−جبر را در حد یکریختی، توسیع حلقه‌ای K در نظر گرفت.

۷.۱ تعریف: فرض کنید S یک R−جبر باشد و $\Gamma \subseteq S$، دراین‌صورت R−زیرجبر تولید شده توسط Γ، کوچکترین R−زیرجبر S شامل Γ تعریف می‌شود.

به راحتی دیده می‌شود که R−زیرجبر تولید شده توسط Γ، اشتراک تمام R−زیرجبرهای S است که شامل Γ می‌باشند. و اگر $|\Gamma| < \infty$، R−جبر تولید شده توسط Γ، R−زیرجبر متناهی مولد نامیده می‌شود.

۸.۱ لم: فرض کنید S یک R−جبر و $\Gamma \subseteq S$. قرار دهید: $A = \{a1_S | a \in R\}$. دراین‌صورت R−زیرجبر تولید شده توسط Γ برابر است با:

$$A[\Gamma] = \{f(a_1, \cdots, a_n) | a_i \in \Gamma, n \in \mathbb{N}, f(x_1, \cdots, x_n) \in A[x_1, \cdots, x_n]\}$$

به‌ویژه اگر $\Gamma = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$، آن‌گاه

$$A[\Gamma] = A[\alpha_1, \cdots, \alpha_n] = \{f(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) | f \in A[x_1, \cdots, x_n]\}$$